УДК 517+518.392

РЕШЕТЧАТЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.И.Половинкин (Красноярск)

Многие работы С.Л.Соболева и других авторов, в частности [1-5], посвящены исследованию последовательностей кубатурных формул с регулярным пограничным слоем (сокр. ПКФСРПС) и последовательностей кубатурных формул с пограничным слоем (сокр. ПКФСПС). Совокупность ПКФСПС включает в себя как подкласс множество ПКФСРПС.

При выборе кубатурных формул для приближенного интегрирования формулы желательно выбирать такими, чтобы суммы абсолютных величин их коэффициентов были минимальными. Если для вычисления интеграла с постоянной весовой функцией применяется формула с положительными коэффициентами, точная на константах, то сумма абсолютных величин коэффициентов минимальна и равна мере области интегрирования.

Из определения ПКФСПС вытекает, что если шаг сетки стремится к нулю, то суммы абсолютных величин коэффициентов формул из таких последовательностей стремятся к мере области интегрирования. Это обстоятельство не принижает существенно значения свойства положительности для кубатурных формул, образующих ПКФСПС. Дело в том, что при стремлении к нулю шага сетки суммы абсолютных величин коэффициентов кубатурных формул, образующих ПКФСПС, могут стремиться к мере области интегрирования относительно медленно, а при реальном численном интегрировании шаг сетки узлов не может быть сколько угодно малым.

В настоящей работе показывается, что для областей, удовлетворяющих слабому условию конуса, можно построить ПКФСПС и ПКФСРПС, состоящие из формул с положительными коэффициентами; рассматривается задача о построении решетчатых формул с положительными коэффициентами, образующих асимптотически оптимальные в классах $L_p^m(\Omega)$, $L_p^m(E_n)$ ПКФСПС.

Построение решетчатых формул с положительными коэффициентами, образующих ПКФСПС, проводится в данной работе методом, сходным со способом, с помощью которого в [1, с.705-706] строились формулы с регулярным пограничным слоем. В обоих случаях кубатурные формулы строятся с помощью суммирования экстраполяционных решетчатых кубатурных формул для разбиений областей интегрирования. В настоящей статье, в отличие от [1], на экстраполяционные формулы для разбиений области интегрирования накладывается следующее условие: расстояния между узлами формул должны быть достаточно большими по сравнению с диаметрами разбиений и расстояниями от разбиений до ближайших к ним узлов, соответствующих им, экстраполяционных кубатурных формул.

Обозначения: m - натуральное число; E_n - n-мерное евклидово пространство; h - положительный параметр; R_n - множество векторов из E_n с целочисленными компонентами; Ω - ограниченная область в E_n; если x - точка, M - множество из E_n, то

$$x+M:\ \{y : y=x+z,\ z\in M\};\ G_h=\{x=(x_1,\dots,x_n):\ 0<x_1,\dots,x_n<h\};$$
$$Q(h,\gamma)=[h\gamma+G_h]\cap\Omega;\quad B_h=\{\gamma:\gamma\in R_n,\ \operatorname{mes} Q(h,\gamma)>0\};$$
$$\mathcal{D}_h=\{\gamma:\gamma\in R_n,\ [h\gamma]\in\overline{\Omega}\}.$$

Определение 1. Последовательность кубатурных формул

$$\int_\Omega f(x)dx\approx\sum_{\beta\in\mathcal{D}_h} c_\beta^h f(h\beta) \tag{1}$$

(c_β^h - постоянные) называется ПКФСПС, если существуют конечное множество $\mu\subset R_n$, константы $L>0, c_z, z\in\mu, c_\beta^h, c_{\gamma,\beta}^h, \beta\in\mathcal{D}_h, \gamma\in B_h$, удовлетворяющие следующим условиям:

а) кубатурные формулы

$$\int_{Q(h,\gamma)} f(x)dx\approx\sum_{\beta\in\mathcal{D}_h} c_{\gamma,\beta}^h f(h\beta),\quad \gamma\in B_h, \tag{2}$$

точны на многочленах степени ниже m;

б)

$$c_\beta^h=\sum_{\gamma\in B_h} c_{\gamma,\beta}^h; \tag{3}$$

в) $|c_{\gamma,\beta}^h|<Lh^n$;

г) если расстояние в E_n от $h\gamma$ до $E_n\setminus\Omega$ больше Lh, то $c_{\gamma,\beta}^h=h^n c_{\beta-\gamma}$ при $[\beta-\gamma]\in\mu$, $c_{\gamma,\beta}^h=0$ при $[\beta-\gamma]\notin\mu$.

Определение 2 [6, с.118]. Область Ω удовлетворяет слабому условию конуса, если существуют число $H>0$, замкнутые прямые круговые конусы с вершиной в начале координат, высотой H; $V_1(H),\dots$

$\ldots, V_s(H)$ - такие, что для всякого $x \in \overline{\Omega}$ существует $j(x) \in \{1, \ldots, s\}$, при котором $\{x + V_{j(x)}(H)\} \subset \Omega$.

Т е о р е м а 1. Если область Ω удовлетворяет слабому условию конуса, то для нее существует ПКФСПС, формулы из которой имеют положительные коэффициенты.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть область Ω удовлетворяет слабому условию конуса. Считаем далее, что конусы $V_1(H), \ldots, V_s(H)$ и функция $j(x)$, соответствующие ей в определении 2, выбраны.

Если число $A > 0$, то обозначим

$$V_j(A) = \{x : x = AH^{-1}y, \ y \in V_j(H)\} \qquad j = 1, \ldots, s.$$

Положим также $R_{n,m} = \{\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) : \tau_1, \ldots, \tau_n \in \{0, \ldots, m-1\}\}$, $R'_{n,m} = R_{n,m} \setminus 0 = R_{n,m} \setminus (0, \ldots, 0)$.
Условимся, что буква τ будет обозначать векторы из $R_{n,m}$, а координаты τ будут обозначаться $\tau_1, \ldots, \tau_n$, т.е. будет всегда

$$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in R_{n,m}.$$

Выберем системы линейно-независимых между собой векторов $\{g_i^1\}_{i=1}^n, \ldots$ $\ldots, \{g_i^s\}_{i=1}^n \subset R_n$ и число $A > 0$ так, что при $\tau \in R'_{n,m}$, $j = 1, \ldots, s$,

$$\left\{\sum_{i=1}^n \tau_i g_i^j + \overline{G}_1\right\} \subset V_j(A). \tag{4}$$

Через $\mathfrak{X}$ обозначим натуральное число, большее диаметров $V_j(A)$, $j = 1, \ldots, s$.

Если вектор $x \in E_n$, $j \in \{1, \ldots, s\}$, то символы x_i^j, $i = 1, \ldots, n$, будут обозначать координаты x в разложении по базису $\{g_i^j\}_{i=1}^n$.

Определим многочлены P_τ^j, $\tau \in R_{n,m}$, $j \in \{1, \ldots, s\}$,

$$P_\tau^j(x) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{\substack{d_k=0 \\ d_k \neq \tau_k}}^{m-1} \frac{x_k^j - d_k}{\tau_k - d_k}.$$

Покажем, что если f - многочлен степени ниже m, то при $j \in \{1, \ldots, s\}$

$$\sum_{\tau \in R_{n,m}} f\left(\sum_{i=1}^n \tau_i g_i^j\right) P_\tau^j(x) = f(x). \tag{5}$$

Действительно, свойство определенной в E_n функции f быть многочленом степени ниже m не зависит от выбора базиса в E_n. Поэтому для справедливости (5) достаточно установить это равенство для одночленов от переменных $x_1^j, \ldots, x_n^j$:

$$f(x) = (x_1^j, \ldots, x_n^j)^\alpha = (x_1^j, \ldots, x_n^j)^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = (x_1^j)^{\alpha_1} \ldots (x_n^j)^{\alpha_n} \tag{6}$$

при $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n < m$.

Пусть f имеет вид (6). Тогда

$$\sum_{r\in R_{n,m}} f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i g_i^j\right) P_r^j(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{r_k=0}^{m-1} r_k^{\alpha_k} \prod_{\substack{d_k=0\\ d_k\neq r_k}}^{m-1} \frac{x_k^j - d_k}{r_k - d_k}\right). \tag{7}$$

Так как интерполяционные операторы Лагранжа, интерполирующие по m точкам, отображают многочлены степени ниже m в себя, то выражение в скобках справа в (7) равно $(x_k^j)^{\alpha_k}$ и равенство (5) верно.

Из определения R_r^j, $j\in\{1,\dots,s\}$, $r\in R_{n,m}$, также при $\rho\in R_{n,m}$ следует

$$P_\rho^j\left(\sum_{i=1}^{n} r_i g_i^j\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } r=\rho, \\ 0 & \text{при } r\neq\rho. \end{cases} \tag{8}$$

Введем обозначение: если число $a>0$, то

$G[a] = \{x=(x_1,\dots,x_n): |x_1|,\dots,|x_n|<a\}$.

Из (8) и непрерывности функций P_ρ^j вытекает, что можно найти число $\delta\in(0,1)$ такое, что при $j=1,\dots,s$

$$|R_0^j(x)| > 1/2, \quad \text{если } x\in G[\delta(x+1)], \tag{9}$$

$$|R_r^j(x)| < [2^{n+1} s(x+1)^n m^n]^{-1}, \quad \text{если } r\in R'_{n,m},\ x\in G[\delta(x+1)]. \tag{10}$$

Выберем натуральное $\lambda > \delta^{-1}$. Считаем в дальнейшем

$$h = \{\lambda^{-i}\}_{i=t}^{\infty}, \tag{11}$$

где натуральное t таково, что

$$\lambda^{-t+1} < HA^{-1}. \tag{12}$$

Ниже определим векторы d_y^h, $y\in B_h$. При $[hy]\in\bar\Omega$ положим $d_y^h = hy$.

Пусть $y\in B_h$, $[hy]\notin\bar\Omega$. Для таких y выберем точки $c(h,y)\in Q(h,y)$. Если $h<HA^{-1}$, в частности, когда h,t удовлетворяют (11), (12), конус $[c(h,y)+V_{j(c(h,y))}(Ah)]\subset\bar\Omega$ и содержит некоторую точку $d_y^h = h\beta$, где $\beta\in\mathcal{D}_h$. Выберем при каждом $y\in B_h$, $[hy]\notin\bar\Omega$ по такой точке d_y^h.

Обозначим: $C_h = \{y: y\in B_h,\ [hy+G_h]\subset\Omega,\ [hy+h\lambda\sum_{i=1}^{n} r_i g_i^1]\in\bar\Omega$ при $r\in R_{n,m}\}$,

$$j(h,y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y\in C_h, \\ j(d_y^h) & \text{при } y\notin C_h. \end{cases}$$

Из определения C_h вытекает, что $d_y^h = hy$ при $y\in C_h$.

Оценки (11) и (12) показывают, что

$$h\lambda < HA^{-1}. \tag{13}$$

Из (13), включения (4), принадлежности d_y^h к $\bar\Omega$ вытекает, что при $y\in B_h$, $r\in R_{n,m}$

$$\left[d_\gamma^h + h\lambda \sum_{i=1}^{n} \tau_i g_i^{j(h,\gamma)}\right] \in \bar{\Omega} \tag{14}$$

и, кроме того, при $\tau \in R'_{n,m}$

$$\left\{d_\gamma^h + h\lambda \sum_{i=1}^{n} \tau_i g_i^{j(h,\gamma)} + \bar{G}_{\lambda h}\right\} \subset \bar{\Omega}. \tag{15}$$

Формула (15) показывает, что если $\tau \in R'_{n,m}$, то

$$mes\left\{\left\{d_\gamma^h + h\lambda \sum_{i=1}^{n} \tau_i g_i^{j(h,\gamma)} + G_h\right\} \cap \Omega\right\} = h^n. \tag{16}$$

Введем операторы $\mathcal{J}_\gamma^h$, $\gamma \in B_h$:

$$(\mathcal{J}_\gamma^h f)(x) = \sum_{\tau \in R_{n,m}} f\left(d_\gamma^h + h\lambda \sum_{i=1}^{n} \tau_i g_i^{j(h,\gamma)}\right) P_\tau^{j(h,\gamma)}\left(\frac{x - d_\gamma^h}{h\lambda}\right), \tag{17}$$

если $x \in Q(h,\gamma)$. При $x \in [\Omega \setminus Q(h,\gamma)]$ считаем $\mathcal{J}_\gamma^h(x) = 0$. Из (17) и (14) вытекает, что $\mathcal{J}_\gamma^h$ определены на функциях, непрерывных в $\bar{\Omega}$.

Рассмотрим последовательности кубатурных формул

$$\int_\Omega f(x)dx \approx \int_\Omega \sum_{\gamma \in B_h} (\mathcal{J}_\gamma^h f)(x)dx. \tag{18}$$

Последовательности (18) имеют вид (1) и являются ПКФСПС. Формулы (2), соответствующие им в определении 1, могут быть взяты такими

$$\int_{Q(h,\gamma)} f(x)dx \approx \int_{Q(h,\gamma)} (\mathcal{J}_\gamma^h f)(x)dx. \tag{19}$$

Через $C_{\gamma,\beta}^h$, C_β^h, $\beta \in \mathcal{D}_h$, $\gamma \in B_h$ обозначим коэффициенты формул (19) и (18) при узлах $h\beta$. Они удовлетворяют равенствам (3). Положим также:

$\mathcal{D}_h^1 = \{\beta : \beta \in \mathcal{B}_h, C_\beta^h \neq 0, mes\,Q(h,\beta) < h^n\}$, $\mathcal{D}_h^2 = \{\beta : \beta \in \mathcal{D}_h, C_\beta^h \neq 0, mes\,Q(h,\beta) = h^n\}$.

Покажем, что при $\beta \in \mathcal{D}_h$

$$C_{\gamma,\beta}^h \geqslant 0. \tag{20}$$

Рассмотрим вначале случай, когда $\beta \in \mathcal{D}_h^1$.

Из (16) следует, что

$$C_{\gamma,\beta}^h = 0 \quad \text{, когда } d_\gamma^h \neq \beta h,\ \beta \in \mathcal{D}_h^1,\ \gamma \in B_h. \tag{21}$$

Установим теперь, что при всех $\beta \in \mathcal{D}_h$, $\gamma \in B_h$,

$$C_{\gamma,\beta}^h > mes\,Q(h,\gamma)/2 \quad \text{, если } d_\gamma^h = h\beta. \tag{22}$$

Обозначим
$$U_\gamma^h = \inf_{x \in Q(h,\gamma)} \left\{P_0^{j(h,\gamma)}\left(\frac{x - d_\gamma^h}{h\lambda}\right)\right\}.$$

При $x \in Q(h,\gamma)$ точка $(x - d_\gamma^h) \in G[(\varkappa+1)h]$, откуда следует, что

$$\mathcal{U}_\gamma^h \geq \inf_{x\in G[(\varkappa+1)/\lambda]} \left\{ P_0^{j(h,\gamma)} \left(\frac{x-d_\gamma^h}{h\lambda} \right) \right\}. \tag{23}$$

Из (23), (9) и неравенства $\lambda < \delta^{-1}$ следует, что $\mathcal{U}_\gamma^h > 1/2$. Но поскольку при $\beta\in\mathcal{D}_h$, $\gamma\in\mathcal{B}_h$, таких, что $d_\gamma^h = h\beta$,

$$c_{\gamma,\beta}^h = \int_{Q(h,\gamma)} P_0^{j(h,\gamma)} \left(\frac{x-d_\gamma^h}{h\lambda} \right) dx \geq \operatorname{mes} Q(h,\gamma)\, \mathcal{U}_\gamma^h,$$

то формула (22) верна.

Из (22), (21) и (3) следует (20) при $\beta\in\mathcal{D}_h^1$.

Рассмотрим случай $\beta\in\mathcal{D}_h^2$.

Если $\gamma\in\mathcal{B}_h$, $\tau\in R_{n,m}^1$ таковы, что

$$d_\gamma^h + h\lambda \sum_{i=1}^n q_i^{j(h,\gamma)} \tau_i = h\beta, \tag{24}$$

то $c_{\gamma,\beta}^h = \int_{Q(h,\gamma)} P_\tau^{j(h,\gamma)} \left(\frac{x-d_\gamma^h}{h\lambda} \right) dx$, откуда, аналогично (23), получаем

$$\begin{gathered} |c_{\gamma,\beta}^h| \leq \int_{Q(h,\gamma)} \left| P_\tau^{j(h,\gamma)} \left(\frac{x-d_\gamma^h}{h\lambda} \right) \right| dx \leq \\ \leq h^n \sup_{x\in G[(\varkappa+1)/\lambda]} \left\{ \left| P_\tau^{j(h,\gamma)}(x) \right| \right\}. \end{gathered} \tag{25}$$

Из (25) и (10) выводим, что при $\gamma\in\mathcal{B}_h$, $\beta\in\mathcal{D}_h^2$, $h\beta \neq d_\gamma^h$,

$$|c_{\gamma,\beta}^h| < h^n \left[2^{n+1} s(\varkappa+1)^n m^n \right]^{-1}. \tag{26}$$

Положим: $\mathcal{B}(h,\beta)$ - множество $\gamma\in\mathcal{B}_h$ таких, что при некоторых $\tau\in R_{n,m}^1$ выполняется (24). Через $\pi_h(\beta)$ обозначим количество элементов $\mathcal{B}(h,\beta)$.

При $\beta\in\mathcal{D}_h^2$ имеет место $[h\beta]\in\bar{\Omega}$ и $\operatorname{mes} Q(h,\beta) = h^n$. Отсюда и из (22) следует, что $c_{\beta,\beta}^h > h^n/2$. Это неравенство, формулы (26) и (3) показывают, что

$$c_\beta^h \geq c_{\beta,\beta}^h - \sum_{\gamma\in\mathcal{B}(h,\beta)} |c_{\gamma,\beta}^h| > 2^{-1} h^n \left[1 - \left[2^n s(\varkappa+1)^n m^n \right]^{-1} \pi_h(\beta) \right]. \tag{27}$$

Если фиксированы $\beta\in\mathcal{D}_h$, $j\in\{1,\dots,s\}$, $\tau\in R_{n,m}^1$, равенство (24) может выполняться лишь для единственного d_γ^h, $\gamma\in\mathcal{B}_h$. Всякому $x\in\mathcal{D}_h$ может соответствовать не более $(2\varkappa+2)^n$ элементов $\gamma\in\mathcal{B}_h$ таких, что $x = d_\gamma^h$. Следовательно,

$$\pi_h(\beta) < 2^n (\varkappa+1)^n s m^n. \tag{28}$$

Неравенства (27) и (28) показывают, что (20) справедливо при $\beta\in\mathcal{D}_h^2$. Отсюда следует (20) при $\beta\in\mathcal{D}_h$ и утверждение теоремы.

Определение 3. Если задана ПКФСПС, μ, c_z, $z\in\mu$ - множество и числа, соответствующие ей в определении 1, то функционал ℓ, определенный равенствами

$$(\ell, f) = \int_{G_1} f(x)dx - \sum_{z\in\mu} c_z f(z),$$

называется сопутствующим функционалом данной ПКФСПС.

Определение 4. ПКФСПС называется ПКФСРПС, если она обладает сопутствующим функционалом, значения которого на всех многочленах степени m равны 0.

Теорема 2. Если область Ω удовлетворяет слабому условию конуса, то для нее существует ПКФСРПС, формулы из которой имеют положительные коэффициенты.

Доказательство. Определения 1 и 3 ПКФСПС и ПКФСРПС зависят от числа m, входящего в формулировки этих определений. Назовем это число "точностью" ПКФСПС или ПКФСРПС. Всякая ПКФСПС точности $m+1$ является ПКФСРПС точности m. Отсюда и из справедливости теоремы 1 для ПКФСПС произвольной точности следует теорема 2.

В [1-4] был рассмотрен вопрос о существовании асимптотически оптимальных ПКФСПС или, что то же самое, о существовании ПКФСПС, таких, что функционалы ошибок формул из них образуют асимптотически оптимальные последовательности функционалов. Интегрируемые функции предполагаются в [1] принадлежащими классам $L_2^m(E_n)$, $L_2^m(\Omega)$, в [2, 3] классам $L_p^m(\Omega)$, $L_p^m(E_n)$, $p\in(1,\infty)$. Работа (4) посвящена одномерному случаю. В $L_2^m(\Omega)$, $L_2^m(E_n)$ асимптотически оптимальны ПКФСРПС.

Подробного описания класса областей интегрирования, для которых справедливы результаты [2, 3], в этих работах не приводилось. Из результатов [7] следует, что теоремы, доказанные в [2, 3], верны для широкого класса областей интегрирования, в частности, для областей, граница которых удовлетворяет условию конуса из [6]. Этот класс у́же класса областей, удовлетворяющих слабому условию конуса. Для областей интегрирования из [7, с.6] существуют асимптотически оптимальные в $L_p^m(\Omega)$, $L_p^m(E_n)$, $\min\{m/n, 1\} < p < \infty$, ПКФСПС. ПКФСПС с сопутствующим функционалом асимптотически оптимальны в $L_p^m(\Omega)$, $L_p^m(E_n)$, если справедливы равенства

$$(\ell(x), x^\alpha) = \begin{cases} b_\alpha & \text{при } |\alpha| = m, \\ 0 & \text{при } |\alpha| < m \end{cases} \tag{29}$$

при определенных числах b_α, $|\alpha| = m$, [2, 3]. Отсюда и из теоремы 1 вытекает, что при областях интегрирования из [7] для доказательства существования асимптотически оптимальных в $L_p^m(\Omega)$, $L_p^m(E_n)$ ПКФСПС, формулы из которых имеют положительные коэффициенты, достаточно установить справедливость следующей ниже теоремы 3.

Т е о р е м а 3. Если область Ω такова, что для нее существует ПКФСПС, формулы из которой имеют положительные коэффициенты, то для любых чисел b_α, $|\alpha|=m$, найдутся решетчатые формулы с положительными коэффициентами, образующие ПКФСПС с сопутствующим функционалом l, удовлетворяющим (29).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность кубатурных формул вида (1) удовлетворяет условиям определения 1, C_β^h, $C_{\gamma,\beta}^h$, $\beta\in\mathcal{D}_h$, $\gamma\in B_h$, - постоянные, соответствующие ей в этом определении, причем $C_\beta^h \geq 0$, ρ - ее сопутствующий функционал, b_α, $|\alpha|=m$, - произвольные постоянные.

Обозначим через η конечное подмножество R_n такое, что система, линейная относительно переменных a_z, $z=(z_1,\dots,z_n)\in\eta$

$$\sum_{z\in\eta} a_z z^\alpha = \begin{cases} b_\alpha-(\rho(x),x^\alpha) & \text{при } |\alpha|=m, \\ 0 & \text{при } |\alpha|<m, \end{cases} \tag{30}$$

разрешима. Пусть совокупность a_z, $z\in\eta$, дает решение (30) и фиксирована. Выберем натуральное число τ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\tau^{-m}\sum_{z\in\eta}|a_z|\leq 1. \tag{31}$$

Определим функционалы Δ из равенств

$$(\Delta,f)=\tau^{-m}\sum_{z\in\eta}a_z f(\tau z).$$

Из (30) следует, что

$$(\Delta(x),x^\alpha)=\begin{cases} b_\alpha-(\rho(x),x^\alpha) & \text{при } |\alpha|=m, \\ 0 & \text{при } |\alpha|<m. \end{cases} \tag{32}$$

Обозначим: $M_h=\{\gamma:\gamma\in B_h,\ C_{\gamma+q}^h=h^n$, если $q=\tau z, z\in\eta\}$.

Построим при $\gamma\in B_h$ кубатурные формулы

$$\int_{Q(h,\gamma)} f(x)dx\approx\sum_{\beta\in\mathcal{D}_h} b_{\gamma,\beta}^h f(h\beta) \tag{33}$$

следующим образом: при $\gamma\in M_h$ и β таких, что $\beta=\gamma+\tau z$, $z\in\eta$, положим

$$b_{\gamma,\beta}^h=C_{\gamma,\beta}^h+\tau^{-m}h^n a_z. \tag{34}$$

При остальных $\gamma\in B_h$, $\beta\in\mathcal{D}_h$ будем считать $b_{\gamma,\beta}^h=C_{\gamma,\beta}^h$. Суммированием формул (33) построим ПКФСПС

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx \approx \sum_{\gamma\in B_h} \sum_{\beta\in\mathcal{D}_h} b^h_{\gamma,\beta} f(h\beta). \tag{35}$$

Когда β таковы, что $c^h_\beta \neq h^n$, коэффициенты формул (33) при узлах $h\beta$ равны $c^h_{\gamma,\beta} \geq 0$. Из (34) и (31) следует, что и остальные коэффициенты при узлах $h\beta$ неотрицательны. Если ℓ - сопутствующий функционал ПКФСПС (35), то $\ell=\rho+\Delta$. Отсюда и из (32) вытекает (29). Так как числа b_α, $|\alpha|=m$, произвольны, то теорема 3 справедлива.

На задачу о построении решетчатых формул с положительными коэффициентами, образующих ПКФСПС и ПКФСРПС, внимание автора обратил В.И.Лебедев.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул, М., "Наука", 1974, 803 с.
2. Половинкин В.И. Асимптотическая оптимальность последовательностей формул с регулярным пограничным слоем при нечетных m. - "Сиб. мат. журн.", 1975, т.16, № 2, с.328-335.
3. Половинкин В.И. Асимптотически наилучшие последовательности кубатурных формул. - "Сиб. мат. журн.", 1975, т.16, № 6, с.1255-1262.
4. Половинкин В.И. Последовательности квадратурных формул с пограничным слоем. - В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л.Соболева), Новосибирск, 1977, № 1, с.149-158.
5. Бесов О.В. Межъячеичные усреднения и оценка ошибок кубатурных формул в пространствах С.Л.Соболева и их обобщения. - "Труды Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР", 1977, т.143, с.42-56.
6. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., "Наука", 1975, 480 с.
7. Половинкин В.И., Дидур Л.И. О порядке сходимости кубатурных формул. - В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики (Изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР), 1975, вып.34, с.3-14.