УДК 517.392

О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Г.Г.Р а с п у т и н (Архангельск)

Рассматривается вопрос о получении явной зависимости нормы функционала погрешности квадратурной формулы от значений узлов и коэффициентов. Такую зависимость удается указать в некоторых гильбертовых пространствах функций [1, 2]. В работе обобщаются основные формулы для нормы функционала погрешности из [1, 2] на случай квадратурных формул, содержащих значения производных интегрируемой функции. Показано, что квадрат этой нормы есть значение функционала погрешности специальной кубатурной формулы, связанной с изучаемой квадратурной формулой, на некоторой функции двух переменных.

Используем следующие элементарные факты из теории гильбертова пространства [3]. 1) Пусть H - вещественное гильбертово пространство функций, заданных на отрезке, имеющее воспроизводящее ядро $K(x,y)$, ℓ- линейный ограниченный функционал на H ; тогда $\|\ell\|^2 = \ell_y \ell_x K(x,y)$. (Здесь значок x у ℓ_x означает, что применяя функционал ℓ к $K(x,y)$, рассматриваем ядро как функцию переменной x). 2) Если H - сепарабельное вещественное гильбертово пространство функций, имеющее воспроизводящее ядро, $\varphi_p(x)$, $p = 1,2,\ldots$, - ортонормированный базис H , то

$$K(x,y) = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(x)\cdot\varphi_p(y).$$

Обозначим через R функционал погрешности квадратурной формулы

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\sigma} c_i^{(j)}\cdot f^{(j)}(x_i), \tag{1}$$

$$0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leq 1.$$

Для краткости будем считать, что $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_m = \sigma$.

1. Пусть $H = W_2^{\tau}(0,1)$ - пространство С.Л.Соболева непрерывных функций, заданных на отрезке $[0,1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $(\tau-1)$ и производную порядка τ , суммируемую с квадратом на отрезке $[0,1]$. Предполагаем, что $\tau > \sigma$. Рассмотрим сначала, како-

ва должна быть величина $\|R\|$ для формулы (1) в пространстве H_0. При вычислении $\|R\|$ следуем работе [2]:

$$H_0 = \left\{ f \in W_2^{\tau}(0,1): f^{(2\alpha)}(0) = 0,\ f^{(2\beta+1)}(1) = 0,\ 0 \le 2\alpha,\ 2\beta+1 \le \tau-1 \right\}.$$

Введем скалярное произведение в H_0:

$$(f,g)_{H_0} = \int_0^1 f^{(\tau)}(x)\cdot g^{(\tau)}(x)\,dx.$$

Ортонормированный базис H_0 образуют функции [2]:

$$\varphi_p(x) = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\tau}\cdot\frac{1}{(2p-1)^{\tau}}\cdot\sin\frac{(2p-1)\pi x}{2}, \quad p = 1,2,\ldots\ .$$

Используя 1-периодические продолжения $E_i^*(x)$ с отрезка $[0,1]$ многочленов Эйлера $E_i(x)$ (см. [4]), находим воспроизводящее ядро в H_0

$$K_\tau^0(x,y) = (-1)^{\tau}\cdot\frac{2^{2\tau-2}}{(2\tau-1)!}\cdot\left(E_{2\tau-1}^*\left(\frac{x-y}{2}\right) - E_{2\tau-1}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right),$$

$$\ell_\tau^2 = \|R\|_{H_0}^2 = (-1)^{\tau+1}\cdot\left\{\frac{2^{2\tau+1}}{(2\tau+1)!}\cdot E_{2\tau+1}(0) + \right.$$

$$+\sum_{k,\ell=1}^{m}\sum_{i,j=0}^{\sigma} c_k^{(i)}\cdot c_\ell^{(j)}\cdot\frac{2^{2\tau-i-j-2}}{(2\tau-i-j-1)!}\cdot\left(E_{2\tau-i-j-1}\left(\frac{x_k+x_\ell}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + (-1)^{j+1}\cdot E_{2\tau-i-j-1}^*\left(\frac{x_k-x_\ell}{2}\right)\right) +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{\sigma} c_k^{(i)}\cdot\frac{2^{2\tau-i+1}}{(2\tau-i)!}\cdot E_{2\tau-i}\left(\frac{x_k}{2}\right)\right\}. \tag{2}$$

Для функций из H_0 имеет место точная оценка погрешности квадратурной формулы (1): $|Rf| \le \ell_\tau\cdot\|f\|_{H_0}$. Введем в H скалярное произведение следующим образом:

$$(f,g)_H = (f,g)_{H_0} + \sum_{0\le 2\alpha\le\tau-1} f^{(2\alpha)}(0)\cdot g^{(2\alpha)}(0) + \sum_{0\le 2\beta+1\le\tau-1} f^{(2\beta+1)}(1)\cdot g^{(2\beta+1)}(1).$$

Воспроизводящее ядро в H имеет вид

$$K_\tau(x,y) = K_\tau^0(x,y) + \sum_{0\le 2\alpha\le\tau-1}\frac{x^{2\alpha}\cdot y^{2\alpha}}{[(2\alpha)!]^2} + \sum_{0\le 2\beta+1\le\tau-1}\frac{(x-1)^{2\beta+1}\cdot(y-1)^{2\beta+1}}{[(2\beta+1)!]^2}.$$

Предполагая $\sigma = 0$ для формулы (1), вычисляем

$$\|R\|_H^2 = e_\tau^2 + \sum_{0 \le 2\alpha \le \tau-1} \left(\frac{1}{(2\alpha+1)!} - \sum_{k=1}^{m} C_k^{(0)} \cdot \frac{x_k^{2\alpha}}{(2\alpha)!} \right)^2 +$$

$$+ \sum_{0 \le 2\beta+1 \le \tau-1} \left(\frac{1}{(2\beta+2)!} - \sum_{k=1}^{m} C_k^{(0)} \cdot \frac{(x_k-1)^{2\beta+1}}{(2\beta+1)!} \right)^2 .$$

Если квадратурная формула (1) имеет алгебраическую степень точности $(\tau - 1)$ или выше, то для функций из H выполняется точная оценка погрешности

$$|Rf| \le e_\tau \cdot \| f^{(\tau)} \|_{L^2(0,1)} . \tag{3}$$

2. Пусть $H = \widetilde{W}_2^{\tau}(0,1)$ - пространство 1-периодических функций, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $(\tau - 1)$ и производную порядка τ, суммируемую с квадратом на отрезке $[0,1]$. Полагаем

$$H_0 = \left\{ f \in H : \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}, \ (f,g)_{H_0} = \int_0^1 f^{(\tau)}(x) \cdot g^{(\tau)}(x)dx,$$

$$(f,g)_H = (f,g)_{H_0} + \left(\int_0^1 f(x)dx \right) \cdot \left(\int_0^1 g(x)dx \right).$$

Ортонормированный базис в H_0 образуют функции

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\sin 2\pi p x}{(2\pi p)^\tau} , \quad \sqrt{2} \cdot \frac{\cos 2\pi p x}{(2\pi p)^\tau}, \quad p = 1,2,\dots .$$

Используя 1-периодические продолжения $B_i^*(x)$ с отрезка $[0,1]$ многочленов Бернулли $B_i^+(x)$ (см. [5]), находим воспроизводящее ядро в H_0 :

$$\widetilde{K}_\tau^0(x,y) = (-1)^{\tau+1} \cdot \frac{B_{2\tau}^*(x-y)}{(2\tau)!} ,$$

$$\widetilde{e}_\tau^2 = \|R\|_{H_0}^2 = \sum_{k,\ell=1}^{m} \sum_{i,j=0}^{\sigma} (-1)^{\tau+1+j} \cdot C_k^{(i)} \cdot C_\ell^{(j)} \cdot \frac{B^*_{2\tau-i-j}(x_k - x_\ell)}{(2\tau-i-j)!} . \tag{4}$$

Для функций из H_0 имеет место точная оценка погрешности $|Rf| \le \le \widetilde{e}_\tau \cdot \|f\|_{H_0}$. Ортонормированный базис H получается из базиса H_0 путем добавления одного элемента $\varphi = 1$. Воспроизводящее ядро в H : $\widetilde{K}_\tau(x,y) = = 1 + \widetilde{K}_\tau^0(x,y)$,

$$\|R\|_H^2 = \widetilde{e}_\tau^2 + \left(\sum_{k=1}^{m} C_k^{(0)} - 1 \right)^2 .$$

Если квадратурная формула (1) точна для постоянных функций, т.е.

$$\sum_{k=1}^{m} c_k^{(0)} = 1,$$

то для функций из H имеет место точная оценка погрешности

$$|Rf| \leq \tilde{e}_r \cdot \|f^{(r)}\|_{L_2(0,1)}. \tag{5}$$

3. Рассмотрим величины e_r и $\tilde{e}_r$ для квадратурной формулы (1), не содержащей значения производных. Пусть это формула

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot f(x_k). \tag{6}$$

Введем в рассмотрение кубатурную формулу для квадрата, связанную с формулой (6),

$$\int_0^1\int_0^1 F(x,y)dxdy \cong \sum_{k,l=1}^{m} c_k \cdot c_l \cdot F(x_k, x_l). \tag{7}$$

При $\sigma = 0$ из (2) находим для формулы (6)

$$e_r^2 = \frac{(-1)^{r+1} \cdot 2^{2r-2}}{(2r-1)!} \cdot \left\{ \frac{4}{r(2r+1)} \cdot E_{2r-1}(0) + \frac{4}{r} \cdot \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot E_{2r}\left(\frac{x_k}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k,l=1}^{m} c_k \cdot c_l \cdot \left(E_{2r-1}\left(\frac{|x_k - x_l|}{2}\right) - E_{2r-1}\left(\frac{x_k + x_l}{2}\right)\right)\right\}.$$

Принимая во внимание равенства:

$$\int_0^1 E_{2r}\left(\frac{x}{2}\right)dx = -\frac{2}{2r+1} \cdot E_{2r+1}(0),$$

$$\int_0^1\int_0^1 E_{2r-1}\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy = 0,$$

$$\int_0^1\int_0^1 E_{2r-1}\left(\frac{|x-y|}{2}\right)dxdy = -\frac{4}{r\cdot(2r+1)} \cdot E_{2r+1}(0),$$

величину e_r^2 можно представить в виде:

$$e_r^2 = \int_0^1\int_0^1 F_r(x,y)dxdy - \sum_{k,l=1}^{m} c_k \cdot c_l \cdot F_r(x_k, x_l),$$

$$F_r(x,y) = (-1)^{r+1} \cdot \frac{2^{2r-2}}{(2r-1)!} \cdot \left(E_{2r-1}\left(\frac{|x-y|}{2}\right) - E_{2r-1}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{4}{r} E_{2r}\left(\frac{x}{2}\right)\right). \tag{8}$$

Аналогично для $\sigma = 0$ из (4) получаем

$$\tilde{e}_\tau^2 = \frac{(-1)^{\tau+1}}{(2\tau)!} \cdot \sum_{\kappa,\ell=1}^{m} c_\kappa \cdot c_\ell \cdot B_{2\tau}\left(|x_\kappa - x_\ell|\right).$$

Так как

$$\int_0^1\int_0^1 B_{2\tau}\left(|x-y|\right)dx\,dy = 0,$$

то величину $\tilde{e}_\tau^2$ можно представить в следующем виде:

$$\tilde{e}_\tau^2 = \int_0^1\int_0^1 \tilde{F}_\tau(x,y)\,dx\,dy - \sum_{\kappa,\ell=1}^{m} c_\kappa \cdot c_\ell \cdot \tilde{F}_\tau(x_\kappa, x_\ell),$$

$$\tilde{F}_\tau(x,y) = \frac{(-1)^\tau}{(2\tau)!} \cdot B_{2\tau}\left(|x-y|\right). \qquad (9)$$

Таким образом, квадраты величин e_τ и $\tilde{e}_\tau$, участвующих в точных оценках погрешности (3), (5), есть значения функционала погрешности кубатурной формулы (7) на специальных функциях $F_\tau(x,y)$ и $\tilde{F}_\tau(x,y)$

4. Предположим, квадратурная формула (6) имеет алгебраическую степень точности 2τ или выше. Многочлен $E_{2\tau-1}(x)$ содержит в своей записи x^κ с нечетными κ только при $\kappa = 2\tau-1$, и коэффициент при $x^{2\tau-1}$ равен единице. Многочлен $B_{2\tau}(x)$ содержит x^κ с нечетными κ также только при $\kappa = 2\tau-1$, коэффициент при $x^{2\tau-1}$ равен $(-\tau)$. С учетом этого из (8), (9) находим

$$\tilde{e}_\tau^2 - e_\tau^2 = \int_0^1\int_0^1 G_\tau(x,y)\,dx\,dy - \sum_{\kappa,\ell=1}^{m} c_\kappa \cdot c_\ell \cdot G_\tau(x_\kappa, x_\ell),$$

$$G_\tau(x,y) = \frac{(-1)^{\tau+1}}{(2\tau-1)!\cdot 2} \cdot |x-y|^{2\tau-1}.$$

Для квадратурных формул (6), имеющих алгебраическую степень точности 2τ или выше, точные оценки погрешности (3), (5) выполняются с одинаковой постоянной. (Например, для формулы Гаусса этот факт имеет место при $m \geq \tau+1$.) Величина этой постоянной зависит от того, насколько хорошо соответствующая кубатурная формула (7) интегрирует функцию $|x-y|^{2\tau-1}$ Учитывая оптимальность [6] квадратурной формулы прямоугольников для функций из $\tilde{W}_2^\tau(0,1)$ (см. [7]) и тот факт, что для нее точная оценка погрешности (5) выполняется с постоянной

$$\tilde{e}_\tau^* = \sqrt{\frac{(-1)^{\tau+1}\cdot B_{2\tau}}{(2\tau)!}} \cdot \frac{1}{m^\tau}$$

($B_{2\tau}$ - числа Бернулли) , в предположениях п.4 можно указать неравенство $e_\tau \geq \tilde{e}_\tau^*$.

Л и т е р а т у р а

1. К у з ю т и н В.Ф. Об оценке ошибки квадратурной формулы. - В кн.: Методы вычислений. Изд. Ленинград. ун-та, 1963, вып.2, с.60-66.
2. Z l a m a l M. On the estimate of the error of quadrature formulac.-"Applikace Mathematiky", 1966, v.11, 6, p.423-426.
3. А р о н ш а й н Н. Теория воспроизводящих ядер. - "Математика", 1963, т.7, № 2, с.67-130.
4. N ö r l u n d E. Vorlesungen über Differenzenrechnung. Berlin, Springer-Verlag, 1926.
5. К р ы л о в В.И. Приближенное вычисление интегралов.М.,"Наука",1967,500с.
6. С о б о л е в С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., "Наука", 1974, 808 с.
7. Z e n s y k b a e v A.A. Best quadrature formula for the class W^rL_2. - "Analysis Mathematica", 1977, 3, p.83-93.