УДК 517.392

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ОДНИМ КЛАССОМ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е.А.Х а м а е в (Улан-Удэ)

В в е д е н и е

В настоящей работе мы рассматриваем вопрос о порядке убывания нормы функционала погрешности

$$\ell(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(x_k)$$

при возрастании числа узлов, считая, что выбор узлов произволен. С.Л.Соболевым в [1] изучено асимптотическое поведение (при шаге сетки $h \to 0$) последовательности норм функционалов ошибок над пространством $L_2^m(E_n)$. Эти результаты были обобщены на различные классы функций в работах М.Д.Рамазанова [8], Ц.Б.Шойнжурова [7], В.И.Половинкина [6], О.В.Бесова [5] и др.

В работе изучается асимптотическое поведение норм функционалов погрешности над $L_2^{\mu}(E_n)$- пространством функций, дифференциальные свойства которых определяются некоторым классом псевдодифференциальных операторов.

§ 1. Некоторые обозначения и вспомогательные леммы

Рассмотрим псевдодифференциальное уравнение

$$pu = \int_{E_n} e^{2\pi i x\xi} p(2\pi i\xi)\hat{u}(\xi)d\xi = f(x) \qquad (1)$$

с символом $p(2\pi i\xi)$, удовлетворяющим следующим условиям:

1) Существует вещественный вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ такой, что для любого $\lambda > 0$

$$p(2\pi i\xi\lambda^{\alpha}) = p(2\pi i\xi_1\lambda^{\alpha_1}, 2\pi i\xi_2\lambda^{\alpha_2}, \ldots, 2\pi i\xi_n\lambda^{\alpha_n}) = \lambda p(2\pi i\xi).$$

Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ будем называть показателем однородности символа $p(2\pi i\xi)$.

2) Для любого $\xi \in E_n$

$$C_2|\xi|_1 \geq |p(2\pi i\xi)| \geq C_1|\xi|_1 ,$$

где $|\xi|_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{2/\alpha_j}\right)^{1/2}$.

3) $|\mathcal{D}^\beta p(2\pi i\xi)| \le C \dfrac{|\xi|^{|\beta|+\tau}+1}{|\xi|^{|\beta|}}$; $|\beta| = 0,\dots,[\tau]+2N$, $\tau \ge 0$, $N > 2n$.

4) $p(2\pi i(-\xi)) = p(2\pi i\xi)$.

Положим $(u,v) = \int u\bar{v}\,dE_n$, $p^* u = \int_{E_n} e^{2\pi i x\xi}\,\overline{p(2\pi i\xi)}\,\hat{u}(\xi)\,d\xi$.

Обозначим через S_N множество бесконечно дифференцируемых функций, для которых выполнено

$$\sup_{x\in E_n} |\varphi|(1+|x|)^{2N+\tau} < \infty$$

$$|\mathcal{D}^\beta \hat{\varphi}| \le C_\varphi \frac{|\xi|^{N}+[\tau]}{(1+|\xi|)^{2N+[\tau]}}, \quad |\beta| = 0,1,\dots,N+[\tau], \quad \tau \ge 0, \tag{2}$$

а константа C_φ зависит от функции φ.

Будем говорить, что функция $\varphi \in S_N'$, если $\varphi \in L_2^{loc}$ и для почти всех $x \in E_n$

$$|\varphi(x)|(1+|x|)^{-N} \le K_0(x), \quad \text{где } K_0(x) \in L_1(E_n).$$

Введем обобщенное решение уравнения (1). Пусть $f \in S_N'$, тогда функция $u \in S_N'$ является обобщенным решением уравнения (1), если для любой функции $\varphi \in S_N$ выполняется равенство

$$(P^*\varphi, u) = (\varphi, f).$$

Существование такого решения следует из [4].

Определим класс $L_2^\mu(E_n)$, считая что символ $\mu(2\pi i\xi)$ удовлетворяет условиям (1-4) : $u \in L_2^\mu(E_n)$, если $u \in S_N'$ и

$$\|u\|_{L_2^\mu(E_n)} = \left\| \int_{E_n} \mu^{1/2}(2\pi i\xi)\hat{u}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi \right\|_{L_2(E_n)} =$$

$$= \sup_{\varphi\in S_{2N}} \frac{(\mu^{1/2}(2\pi i\xi)\hat{u}(\xi), \check{\varphi})}{\|\varphi\|_{L_2}} = \sup_{\varphi\in S_{2N}} \frac{(\hat{u}, \mu^{1/2}(2\pi i\xi)\check{\varphi})}{\|\varphi\|_{L_2}} =$$

$$= \sup_{\varphi\in S_{2N}} \frac{(u, \widehat{(\mu^{1/2}(2\pi i\xi)\check{\varphi})})}{\|\varphi\|_{L_2}} < \infty. \tag{3}$$

Из определения классов $L_2^\mu(E_n)$ и из работы [4] следует, что функция $u \in L_2^\mu(E_n)$ имеет представление

$$u(x) = \mathcal{P}_m(x) + \lim_{h\to 0} \int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|} \int_{E_n} \hat{G}\left(\frac{t-x}{v^\alpha}\right) f(t)\,dt\,dv, \tag{4}$$

где

$$G(t) = G_1(t)\frac{1}{\mu(2\pi i\xi)},$$

$$G_1(t)=G_0(t)\sum_{j=1}^{n} t_j^{4k},$$

$$G_0(t)=exp\left(-\sum_{j=1}^{n} t_j^{4k}(\alpha_j 4k)^{-1}\right),$$

$\mathcal{P}_m(x)$ - полином степени $\underbrace{m-1,\ m=}(m_1,\dots,m_n)$, а

$$f(x)=\mu^{1/2}(2\pi i\xi)\hat{u}. \tag{5}$$

Таким образом, пространство L_2^μ можно разложить в алгебраическую сумму

$$L_2^\mu = P_m + PL_2^\mu,$$

где P_m - конечномерное пространство полиномов степени m, а PL_2^μ - множество функций вида

$$Pu=\lim_{h\to 0}\int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|}\int_{E_n}\hat{G}\left(\frac{t-x}{v^\alpha}\right)f(t)dtdv.$$

Л е м м а 1. Если $m-1>\ell+n$, где $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n)$

$$\ell_j=\begin{cases}\left[\frac{1}{\alpha_j}\right]-1 & \text{при } 1/\alpha_j \text{ целом},\\ \left[\frac{1}{\alpha_j}\right] & \text{при } 1/\alpha_j \text{ нецелом},\end{cases}$$

то замыкание множества Pu по норме L_2^μ не выводит из класса L_2^μ.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из работы [4].

Л е м м а 2. Пусть $u(x)\in L_2^\mu(E_n)$ и $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ - показатель однородности μ (для $\mu^{1/2}$ показатель однородности $2\alpha=(2\alpha_1,\dots,2\alpha_n)$). Если $|\alpha|<1$, то $u(x)$ непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы следует из известных теорем вложения для пространств Хёрмандера [3]. Для полноты изложения докажем это утверждение. Так как для $\mu^{1/2}(2\pi i\xi)$ показатель однородности равен $2\alpha=(2\alpha_1,\dots,2\alpha_n)$, то из представления (5) и работы [4] следует, что функция $u(x)$ может быть представлена в виде

$$u(x)=u_1(x)+\lim_{h\to 0}\int_h^1 v^{-2|\alpha|}\int_{E_n}\hat{G}\left(\frac{t-x}{v^{2\alpha}}\right)f(t)dtdv,$$

где $u_1(x)=\int_{E_n}\hat{G}(t-x)u(t)dt$, $\|f\|_{L_2}=\|u\|_{L_2^\mu}$, а $G(t)$ удовлетворяет (5). Поэтому достаточно показать, что

$$|u_h(x)|=\left|\int_{h_1}^{h_2} v^{-2|\alpha|}\int_{E_n}\hat{G}\left(\frac{t-x}{v^{2\alpha}}\right)f(t)dtdv\right|\leq c\left|h_2^\beta-h_1^\beta\right|\cdot\|f\|_{L_2}. \tag{6}$$

Действительно, используя неравенство Гёльдера, имеем:

$$|u_h(x)| \leq \int\limits_{h_1}^{h_2} v^{-2|\alpha|} \left(\int\limits_{E_n} \left(\hat{G}\left(\frac{t-x}{v^{2\alpha}}\right)\right)^2 dt \right)^{1/2} \cdot \|f\|_{L_2} dv,$$

откуда и следует (6).

Пусть Ω - ограниченная область с кусочно-гладкой границей в E_n и $(\ell_\Omega(x), x^\alpha) = 0, \alpha_j = m_j$, где

$$\ell_\Omega(x) = \varepsilon_\Omega(x) - \sum_{K=1}^{N} c_K \delta(x - x_K)$$

- функционал погрешности кубатурной формулы в Ω. Введем скалярное произведение

$$(u, v)_{L_2^\mu(E_n)} = \int\limits_{E_n} \hat{u}\, \bar{\hat{v}}(\xi) \mu(2\pi i \xi) d\xi, \quad u \in L_2^{\mu*}(E_n),$$

$v \in L_2^\mu(E_n)$, тогда $|(u,v)| \leq \|u\|_{L_2^{\mu*}} \cdot \|v\|_{L_2^\mu}$.

Пусть $pu = \ell_\Omega(x)$ - псевдодифференциальное уравнение в пространстве $L_2^\mu(E_n)$ или

$$\int\limits_{E_n} e^{2\pi i x \xi} \mu(2\pi i \xi) \hat{u}(\xi) d\xi = \ell_\Omega(x). \tag{7}$$

Считая, что решение $u^\circ(x)$ уравнения (7) имеет вид из [4]

$$u^\circ(x) = \nu_\mu(x) * \ell_\Omega(x) + p_\mu(x), \tag{8}$$

где

$$\nu_\mu(x) = \int\limits_{h}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|} \hat{G}\left(\frac{x}{v^\alpha}\right) dv, \tag{9}$$

$p_\mu(x)$ - многочлен степени m, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, а $G(x)$ удовлетворяет представлению (5) с символом $p(2\pi i \xi) = \mu(2\pi i \xi)$, докажем, что

$$(\ell_\Omega(x), u^\circ(x)) = \|\ell_\Omega(x)\|^2_{L_2^{\mu*}(E_n)}.$$

Имеем

$$(\ell, u^\circ) = \int\limits_{E_n} \hat{u}^\circ \bar{\hat{\ell}}(\xi) \mu(2\pi i \xi) d\xi = (\ell, pu^\circ) = \|\ell\|^2_{L_2^\mu(E_n)},$$

т.е. $\|\ell\|^2_{L_2^\mu(E_n)} = (\ell, u^\circ)$.

Функцию $u^\circ(x)$ назовем экстремальной для функционала погрешности $\ell_\Omega(x)$. Оценим норму функционала погрешности, следуя методике, разработанной С.Л.Соболевым в [1].

Найдем явное выражение для $u^\circ(x)$

$$u^\circ(x) = \int\limits_\Omega \nu_\mu(y - x) dx - \sum_{K=1}^{N} c_K \nu_\mu(x - y_K) + p_\mu(x). \tag{10}$$

Используя (10), вычислим квадрат нормы функционала погрешности $\ell_{\Omega}(x)$ в $L_2^{\mu}(E_n)$

$$\|\ell\|^2_{L_2^{\mu*}(E_n)} = (\ell_{\Omega}(x), u^{\circ}(x)) = (\ell_{\Omega}(x), (\nu_{\mu}(x) * \ell_{\Omega}(x) + p_{\mu}(x))) =$$

$$= (\ell_{\Omega}(x), \int_{\Omega} \nu_{\mu}(y-x)dx - \sum_{k=1}^{N} c_k \nu_{\mu}(x-y_k)).$$

Учитывая четность символа $\mu(2\pi i \xi)$, имеем $\nu_{\mu}(x-y) = \nu_{\mu}(y-x)$, откуда

$$\|\ell\|^2_{L_2^{\mu*}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} c_k c_j \nu_{\mu}(x_j - x_k) - 2 \sum_{k=1}^{N} c_k \int_{\Omega} \nu_{\mu}(x - y_k) dx +$$

$$+ \iint_{\Omega} \nu_{\mu}(x-y) dx dy. \tag{11}$$

Минимизируя квадрат нормы функционала погрешности по коэффициентам C_k, применяя метод Лагранжа, получаем (см. [1]):

$$\psi_1(c, b) = \psi(c) + 2 \sum_{i=1}^{M} b_i (\ell_{\Omega}(x), x^{\alpha}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} c_j c_k \nu_{\mu}(x_j - x_k) - 2 \sum_{k=1}^{N} c_k \int_{\Omega} \nu_{\mu}(x - y_k) dx +$$

$$+ \iint_{\Omega} \nu_{\mu}(x-y) dx dy + 2 \sum_{i=1}^{M} b_i \int_{\Omega} x^{\alpha_i} dx - 2 \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} b_i c_k x_k^{\alpha_i}$$

$$\frac{\partial \psi_1(c, b)}{\partial c_k} = 2 \sum_{j=1}^{N} c_j \nu_{\mu}(x_j - y_k) - 2 \int_{\Omega} \nu_{\mu}(x - y_k) dx -$$

$$- 2 \sum_{i=1}^{M} b_i x_k^{\alpha_i} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_1(c, b)}{\partial b_i} = 2 \int_{\Omega} x^{\alpha_i} dx - 2 \sum_{k=1}^{N} c_k x_k^{\alpha_i} = 0. \tag{12}$$

Из (12) имеем

$$\int_{\Omega} x^{\alpha_i} dx = \sum_{k=1}^{N} c_k x_k^{\alpha_i}.$$

Обозначим:

$$M_\kappa = \sum_{j=1}^{N} c_j\, \nu_\mu (x_j - y_\kappa) - \sum_{i=1}^{M} b_i\, x_\kappa^{\alpha_i},$$

$$m_\kappa = \int_\Omega \nu_\mu\, (x - y_\kappa) dx, \quad \mathcal{F}_i - \sum_{\kappa=1}^{N} c_\kappa x_\kappa^{\alpha_i}, \quad f_i = \int_\Omega x^{\alpha_i} dx.$$

Тогда система (12) примет вид

$$\begin{cases} M_\kappa = m_\kappa , \\ \mathcal{F}_i = f_i \ . \end{cases} \tag{13}$$

Разрешимость этой системы следует из самого метода Лагранжа. Пусть константы C_κ^0 и b_i^0 есть решение этой системы, тогда они дают условный минимум для функции $\psi_1(c, b)$ и, очевидно, C_κ^0 дают минимум для функции $\psi(c)$, т.е. квадрату нормы функционала погрешности. Отсюда следует, так же как в [1] ,

Т е о р е м а (И.Бабушка). Если коэффициенты кубатурной формулы оптимальны, то экстремальную функцию $u^0(x)$ можно выбрать так, что ее значения в узлах x_κ будут равны нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (8) следует, что

$$u^0(x) = \nu_\mu (x) * \ell_\Omega (x) + P_\mu (x).$$

Выберем многочлен $P_\mu (x)$ в виде $\sum_{i=1}^{M} b_i\, x^{\alpha_i}$, где b_i пока произвольны. Найдем значение экстремальной функции в узлах x_κ , используя (8)

$$u^0(x_\kappa) = \int_\Omega \nu_\mu\, (x_\kappa - y) dy - \sum_{\kappa=1}^{M} c_\kappa \nu_\mu (x_\kappa - x_j) + \sum_{i=1}^{M} b_i\, x_\kappa^{\alpha_i} .$$

Выберем коэффициенты b_i так, чтобы они удовлетворяли системе (13), и найдем из этой системы $\sum_{i=1}^{M} b_i\, x_\kappa^{\alpha_i}$; учитывая четность $\nu_\mu (x)$, имеем

$$u^0(x_\kappa) - \int_\Omega \nu_\mu (x_\kappa - y) - \sum_{\kappa=1}^{N} c_\kappa \nu_\mu (x_\kappa - x_j) + \sum_{j=1}^{N} c_j \nu_\mu (x_j - x_\kappa) - M_\kappa = 0,$$

так как $M_\kappa = m_\kappa - \int_\Omega \nu_\mu\, (x - y_\kappa)\, dx .$

Теорема доказана.

§ 2. Погрешность кубатурных формул в периодическом случае

В этом параграфе мы рассмотрим кубатурные формулы с функционалом погрешности вида

$$\ell_{\Omega_0}(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \left(1 - \Phi_0\left(h^{-1}H^{-1}x\right)\right), \tag{14}$$

где H - матрица порядка $n \times n$,

$$\Phi_0(x) = \sum_{\beta \in B_n} \delta(x - hH\beta), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

$$B_n : \left\{ \beta \in E_n, \beta_i = 0, \pm 1, \dots, i = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad h^n = \frac{1}{N},$$

Ω_0 $\left(|\Omega_0| = mes\, \Omega_0\right)$ называется основным или фундаментальным параллелепипедом, соответствующим матрице периодов H. Функционал (14) будем рассматривать на функциях из пространства $\tilde{L}_2^{\mu}(E_n)$- совокупности периодических функций $u(x) \in S'(E_n)$, для которых интеграл

$$|u|_{\tilde{L}_2^{\mu}} = \left(\sum_{\beta} \left| c[\beta] \right|^2 \mu\left(\beta H^{-1}\right)\right)^{1/2}$$

конечен.

Определение. Обобщенная функция $u(x) \in S'(E_n)$ называется периодической с основной матрицей периодов $H\,(\det H = 1)$, если равенство $\left(u(x), \varphi(x) - \varphi(x - H\beta)\right) = 0$ выполняется для любой основной функции $\varphi(x) \in S(E_n)$.

Если в $\tilde{L}_2^{\mu}(\Omega_0)$ ввести скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_{\tilde{L}_2^{\mu}(\Omega_0)} = \sum_{\beta} \hat{c}_u[\beta] \cdot \bar{\hat{c}}_v[\beta] \mu\left(\beta H^{-1}\right),$$

то оно становится гильбертовым. Пространство $\tilde{L}_2^{\mu *}$ будет состоять из всех периодических функционалов, которые ортогональны единице

$$(\ell(x), 1) = 0 \tag{15}$$

в силу того, что любой периодический многочлен является величиной постоянной; это условие не зависит от μ. Поэтому задача о построении кубатурной формулы сводится к задаче о приближении функционала, равного единице в области интегрирования, с помощью линейной комбинации

$$(\det H) \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(x - x_k).$$

В периодическом случае эта задача переходит в задачу о приближении единицы на Ω_0 с помощью функционалов вида

$$\ell(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \Phi_0\left(H^{-1}(x - x_k)\right).$$

В этом случае, при условии (15), функционал погрешности кубатурной формулы запишется в виде (14), где

$$\sum_{k=1}^{N} C_k = 1.$$

Функционалы вида

$$\ell_0\left(\frac{x}{h}\right) = 1 - \Phi_0\left(h^{-1}H^{-1}x\right) = 1 - h^n \sum_{\beta} \delta\left(x - hH\beta\right)$$

назовем элементарными функционалами погрешности.

Элементарный функционал с матрицей периодов H есть среднее значение элементарных функционалов погрешностей с периодами $\mathcal{B} = HK$, где K - некоторая целочисленная диагональная матрица с положительными элементами $k_1, k_2, \ldots, k_n$, а $\mathcal{B}$ есть матрица периодов для функционала (14).

Рассмотрим псевдодифференциальное уравнение

$$PU = \ell_{\Omega_0}(x), \tag{16}$$

решением которого из [4] является функция

$$U_0(x) = \nu_\mu(x) * \ell_{\Omega_0}(x) + C_0,$$

где

$$\nu_\mu(x) = \int_0^\infty \sigma^{-|\alpha|} \hat{G}\left(\frac{x}{\sigma^\alpha}\right) d\sigma, \tag{17}$$

$U_0(x)$, как и прежде, назовем экстремальной для функционала погрешности $\ell_{\Omega_0}(x)$. Наряду с уравнением (16) рассмотрим уравнение

$$PU = \ell_0\left(\frac{x}{h}\right), \tag{18}$$

его решение

$$U_0(x) = \nu_\mu(x) * \ell_0\left(\frac{x}{h}\right) + C_0. \tag{19}$$

Аналогично, как и в [1], имеет место

Т е о р е м а. Экстремальная функция $U_0(x)$ функционала погрешности $\ell_0\left(\frac{x}{h}\right)$ является экстремальной функцией и для функционала погрешности $\ell_{\Omega_0}(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы не отличается от приведенного в [1]. Поэтому для оценки нормы функционала погрешности мы будем в дальнейшем рассматривать уравнение (18).

$$\left\|\ell_0\left(\frac{x}{h}\right)\right\|^2_{\tilde{L}_2^{\mu*}} = \left(\ell_0\left(\frac{x}{h}\right), U_0(x)\right).$$

Используя представление (17), найдем явное выражение $U_0(x)$. Вычислим свертку, применяя равенство $\hat{\Phi}_0\left(h^{-1}H^{-1}x\right) = h^n \Phi_0\left(hH^*\xi\right)$:

$$\left(\nu_\mu(x) * \ell_0\left(\frac{x}{h}\right)\right) = \left(\nu_\mu\widehat{(x) * \ell_0}\left(\frac{x}{h}\right)\right) -$$

$$=\left(v_\mu(x) * \check{\widehat{\left(1-h^n\sum_\beta \delta(x-hH\beta)\right)}}\right)=\left(\hat{v}_\mu(\xi), \check{\left(\delta(\xi)-h^n\Phi_0(hH^*\xi)\right)}\right), \qquad (20)$$

$$\hat{v}_\mu(\xi)=\int_0^\infty \upsilon^{-|\alpha|}\check{\hat{G}}\left(\frac{x}{\upsilon^\alpha}\right)d\upsilon=\int_0^\infty G(\upsilon^\alpha\xi)d\upsilon=$$

$$=\int_0^\infty \frac{G_1(\upsilon^\alpha\xi)}{\mu(2\pi i\upsilon^\alpha\xi)}d\upsilon=\int_0^\infty \frac{G_1(\upsilon^\alpha\xi)}{\upsilon\mu(2\pi i\xi)}d\upsilon. \qquad (21)$$

Из (20),(21) имеем:

$$\left(v_\mu(x)*\ell_0\left(\frac{x}{h}\right)\right)=\left(\hat{v}_\mu(\xi), \check{\left(\delta(\xi)-h^n\Phi_0(hH^*\beta)\right)}\right)=$$

$$=-\int_{E_n}\int_0^\infty \frac{G_1(\upsilon^\alpha\xi)}{\upsilon\mu(2\pi i\xi)}\cdot\sum_{\beta\neq0}\delta\left(\xi-h^{-1}H^{-1*}\beta\right)\ell^{2\pi ix\xi}d\xi d\upsilon=$$

$$=-\int_{E_n}\int_0^\infty \frac{G_1(\upsilon^\alpha\xi)}{\upsilon\mu(2\pi i\xi)}\cdot\sum_{\beta\neq0}\delta\left(\xi-h^{-1}H^{-1*}\beta\right)\ell^{2\pi ix\xi}d\xi d\upsilon=$$

$$=-\sum_{\beta\neq0}\frac{\ell^{2\pi ih^{-1}H^{-1*}\beta x}}{\mu(2\pi ih^{-1}H^{-1*}\beta)}\int_0^\infty\frac{G_1(h^{-1}H^{-1*}\upsilon^\alpha\beta)}{\upsilon}d\upsilon. \qquad (22)$$

Для простоты обозначим

$$K=\int_0^\infty\frac{G_1(h^{-1}H^{-1*}\beta\upsilon^\alpha)}{\upsilon}d\upsilon$$

и

$$U_\infty(x)=-\sum_{\beta\neq0}\frac{\ell^{2\pi ih^{-1}H^{-1*}\beta x}}{\mu(2\pi ih^{-1}H^{-1*}\beta)}\cdot K, \qquad (23)$$

откуда $U_0(x)=U_\infty(x)+C_0$.

Заметим, что если у символа $\mu(i\xi)$ показатель однородности $\alpha=\alpha_j$ для всех $j=1,2,\dots,n$, то (23) совпадает с соответствующей формулой С.Л.Соболева [1]. Для этого достаточно показать, что $K=1$. Учитывая представление $G_1(x)$, имеем:

$$\mathcal{K} = \int_0^\infty \frac{1}{v} \sum_{j=1}^{n} \left(h^{-1} H^{-1*} \beta v^{\alpha}\right)_j^{4k} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \left(h^{-1} H^{-1*} \beta v^{\alpha}\right)_j^{4k} (\alpha_j 4k)^{-1}\right) dv =$$

$$= \int_0^\infty v^{4k\alpha-1} \sum_{j=1}^{n} \left(h^{-1} H^{-1*} \beta\right)_j^{4k} \exp\left(-\frac{v^{4k\alpha}}{4k\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left(h^{-1} H^{-1*} \beta\right)_j^{4k}\right) dv = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1;$$

где $\frac{\xi}{4k\alpha} v^{4k\alpha} = t$; $\xi = \sum_{j=1}^{n} \left(h^{-1} H^{-1*} \beta\right)_j^{4k}$.

Вычислим норму функционала погрешности $\ell_0\left(\frac{x}{h}\right)$ в пространстве $\tilde{L}_2^{\mu^*}(\Omega_0)$.

Будем считать, что

$$\int_{\Omega_0} u_\infty(x) dx = 0.$$

Справедливость такого требования вытекает из (23). Имеем при $\left(\ell_0\left(\frac{x}{h}\right), 1\right) = 0$,

$$\left\|\ell_0\left(\frac{x}{h}\right)\right\|^2_{\tilde{L}_2^{\mu^*}(\Omega_0)} = \left(\ell_0\left(\frac{x}{h}\right), u^\circ(x)\right) - \left(\ell_0\left(\frac{x}{h}\right), u_\infty(x) + C_0\right) =$$

$$= \left(\ell_0\left(\frac{x}{h}\right), u_\infty(x)\right) = \left(1 - \delta(x), u_\infty(x)\right) = |u_\infty(0)|;$$

$$u_\infty(0) = \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{\mu\left(2\pi i h^{-1} H^{-1*} \beta\right)} \cdot K,$$

отсюда

$$\left\|\ell_0\left(\frac{x}{h}\right)\right\|^2_{\tilde{L}_2^{\mu^*}(\Omega_0)} = \left|\sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{\mu\left(2\pi i h^{-1} H^{-1*} \beta\right)} \cdot K\right|, \qquad (24)$$

$$\inf \|\ell_0\| = \sqrt{\left|\sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{\mu\left(2\pi i h^{-1} H^{-1*} \beta\right)} \cdot K\right|}, \qquad (25)$$

так как среди всех функционалов погрешности, имеющих узлами точки решетки с матрицей периодов H , наименьшую норму имеет тот, у которого все коэффициенты постоянны. Таким образом, $\ell_0\left(\frac{x}{h}\right)$ - оптимальный функционал погрешности.

Литература

1. С о б о л е в С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., "Наука",1974, 808 с.
2. Н и к о л ь с к и й С.М. Квадратурные формулы, М., "Наука", 1974, 223 с.
3. Х ё р м а н д е р Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., "Мир", 1965, 379 с.
4. У с п е н с к и й С.В., Ч и с т я к о в Б.Н. О выходе на полином при стремлении $x_j \to \infty$ решений одного класса псевдодифференциальных уравнений. - "Сиб. мат. журн.", 1975, т.16, № 5, с.1053-1070.
5. Б е с о в О.В. Оценка ошибок кубатурных формул в пространствах С.Л.Соболева и их обобщения. - "Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР", 1977, т.143, с.42-56.
6. П о л о в и н к и н В.И. Кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева, Автореферат докт. дис., Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1975.
7. Ш о й н ж у р о в Ц.Б. Некоторые вопросы теории кубатурных формул в пространстве $W_2^{(m)}$. - "Сиб. мат. журн.", 1967, т.7, № 2, с.433-446.
8. Р а м а з а н о в М.Д. Оптимальный функционал ошибки над периодическими функциями из пространства $\tilde{H}_p^{\mu}$. - "Сиб. мат. журн.", 1972, т.13, №№1,2, с.225-229.