УДК 517.946

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В R^n

Л.А.Багиров, В.А.Кондратьев (Москва)

Мы будем изучать эллиптические дифференциальные операторы в R^n, типичным представителем которых является оператор

$$P(x,D) = A_m(D) + A_\ell(D) + B(x,D), \qquad (0.1)$$

где $A_m(D)$ и $A_\ell(D)$ - эллиптические однородные операторы с постоянными коэффициентами порядка m и ℓ соответственно; B - оператор порядка m, коэффициенты которого стремятся к нулю при $r \to \infty$ с определенной скоростью. При этом предполагается, что предельный символ $a_m(\xi) + a_\ell(\xi)$ имеет нуль только при $\xi = 0$.

В случае, когда $A_\ell \equiv 0$, операторы вида (0.1) в R^n изучались в работе [8], в которой доказана конечномерность ядра оператора в $L^p(R^n)$. Более подробно этот случай мы изучили в [2], доказав нетеровость в шкале пространств С.Л.Соболева со степенным весом. При этом оказалось, что конечномерность коядра оператора имеет место не при всех параметрах шкалы. Есть последовательность параметров, при которых это утверждение несправедливо. Полигармонический оператор изучался в работах [1, 4]. Вариационными методами внешняя краевая задача исследовалась в [3]. Квазиэллиптический случай рассмотрен в [5, 6]. Обзор работ по эллиптическим операторам и весовым пространствам содержится в [7].

Трудность в изучении оператора вида (0.1) заключается в том, что оператор $A_m(D)A_\ell^{-1}(D)$ является псевдодифференциальным оператором с негладким при $\xi = 0$ символом, и поэтому прямое применение псевдодифференциальной техники затруднено.

Мы будем применять традиционный метод, заключающийся в предварительном изучении операторов с "замороженными" коэффициентами и последующей "склейке" при помощи разбиения единицы. Особенность задачи состоит в том, что операторы с "замороженными" коэффициентами необходимо изучать уже в пространствах со степенными весами. Для этого понадобились дополнительные сведе-

ния о поведении преобразования Фурье функций из таких пространств. Этот вопрос рассмотрен в § 2. В § 1 содержатся обозначения и основные результаты. В § 3 исследуются задачи с постоянными коэффициентами. Доказательство основной теоремы и следствий из нее приводится в § 4.

§ 1. Обозначения и основные результаты

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n \ni x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ уравнение

$$A(x,D)u(x)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha u(x)=f(x). \tag{1.1}$$

Здесь $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ - целочисленный мультииндекс, $|\alpha|=\sum_1^n \alpha_k$, $D^\alpha=D_{x_1}^{\alpha_1}\dots D_{x_n}^{\alpha_n}$, $D_{x_k}^{\alpha_k}=(-i)^{\alpha_k}\frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial x_k^{\alpha_k}}$. Коэффициенты оператора A - комплекснозначные функции $a_\alpha(x)$. Для простоты считаем, что $a_\alpha(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Будем предполагать выполненными условия:

(i) для $\forall x\in\mathbb{R}^n$ и $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$ $\exists\delta_1>0$ и $\delta_2>0$ такие, что

$$\delta_1|\xi|^m\le\Big|\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha\Big|\le\delta_2|\xi|^m;$$

(ii) $\exists$ ℓ целое, $1<\ell<m$, такое, что для $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$, $\xi\ne0$

$$\varliminf_{|x|\to\infty}\Big|\sum_{|\alpha|=\ell}a_\alpha(x)\xi^\alpha\Big|>0,\quad \varliminf_{|x|\to\infty}\Big|\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha+\sum_{|\alpha|=\ell}a_\alpha(x)\xi^\alpha\Big|>0;$$

(iii) $\varlimsup_{|x|\to\infty}(1+|x|)^{-d_\alpha+|\beta|}|D^\beta a_\alpha(x)|\le\delta_\alpha^\beta$, где $d_\alpha=0$ для $\ell\le|\alpha|\le m$ и $d_\alpha=|\alpha|-\ell$ при $|\alpha|<\ell$.

Введем обозначения: $N_\ell=\{\ell-\frac{n}{2}+k:\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$ при $\ell-n\ge0$; $k=0,1,2,\dots,k=\ell-n,\ell-n-1,\ell-n-2,\dots$ при $\ell-n<0\}$.

$$\Delta_s=\sum_{|\alpha|\ne m,\ell}\delta_\alpha^0+\sum_{\substack{0<|\beta|\le s+m\\|\alpha|\le m}}\delta_\alpha^\beta.$$

Мы будем использовать следующие пространства функций.

$$W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)=\{u:\ u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ D^\alpha u\cdot(1+r)^\gamma\in L^2(\mathbb{R}^n),\ |\alpha|\le s\}.$$

Норму в пространстве $W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ обозначим $|\cdot|_{s,\gamma}$.

$$H_\gamma^s(\mathbb{R}^n)=\{u(x):\ u(x)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ D^\alpha u\cdot(1+r)^{\gamma-s+|\alpha|}\in L^2(\mathbb{R}^n),\ |\alpha|\le s\}.$$

Норму в пространстве $H_\gamma^s(\mathbb{R}^n)$ обозначим $\|\cdot\|_{s,\gamma}$.

$$H_{m,\ell}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)=\{u(x):u(x)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ D^\alpha u\cdot(1+r)^\gamma\in L^2(\mathbb{R}^n),\ m-\ell\le|\alpha|\le s,$$

$$D^\alpha u\cdot(1+r)^{\gamma-s+m-\ell+|\alpha|}\in L^2(\mathbb{R}^n),\ |\alpha|\le s-(m-\ell)\}.$$

Норму в пространстве $H_{m,\ell}^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ обозначим $\|\cdot\|_{s,\gamma,m,\ell}$.

Аналогичным образом определяются пространства $W^{s,\gamma}(\Omega)$, $H^{s,\gamma}(\Omega)$, $H^{s,\gamma}_{m,\ell}(\Omega)$ для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Если Ω не совпадает с $\mathbb{R}^n$, то нормы будем обозначать так:

$|\cdot|_{s,\gamma}(\Omega), \|\cdot\|_{s,\gamma}(\Omega), \|\cdot\|_{s,\gamma,m,\ell}(\Omega)$. Пространство $H^s(\Omega)$ - это обычное пространство С.Л.Соболева $W_2^s(\Omega)$. Норму будем обозначать $\|\cdot\|_s(\Omega)$.

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия (i) - (iii) и пусть $\gamma \geq 0$, Δ_s достаточно мало, $s-\gamma \bar{\in} N_\ell$. Тогда

1°. $\exists$ - ограниченный оператор $R: W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s+m,\gamma}_{m,\ell}(\mathbb{R}^n)$ такой, что

$$ARf = f + Tf, \qquad \forall f \in W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n),$$

а T - вполне непрерывный оператор в пространстве $W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$;

2°. для $\forall u(x) \in H^{s+m,\gamma}_{m,\ell}(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка

$$\|u\|_{s+m,\gamma,m,\ell} \leq c\left\{|Au|_{s,\gamma} + \|u\|_{s-1}(K_a)\right\}, \tag{1.2}$$

где $K_a = \{x : |x| \leq a, a < +\infty\}$. Постоянная c не зависит от $u(x)$.

Следствие 1.1. Для оператора $A: H^{s+m,\gamma}_{m,\ell}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ при выполнении условий теоремы 1.1 справедливы теоремы Нетера.

Следствие 1.2. Пространство $H^{s+m,\gamma}_{m,\ell}(\mathbb{R}^n)$ конечномерно при выполнении условий теоремы 1.1, кроме условия $s-\ell \bar{\in} N_\ell$.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n \setminus G$ - ограниченная область, Γ - гладкая граница области G.

Рассмотрим краевую задачу.

$$Au(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x), \quad x \in \bar{G}; \tag{1.3}$$

$$B_j u = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(x) D^\beta u(x) = g_j(x), \quad j = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \quad x \in \Gamma. \tag{1.4}$$

Теорема 1.2. Пусть выполнены для оператора A все условия теоремы 1.1 и пусть краевая задача (1.3), (1.4) в каждой точке $x \in \Gamma$ удовлетворяет условию Шапиро-Лопатинского. Тогда для оператора

$$(A, B_1, \ldots, B_{\frac{m}{2}}): H^{s+m,\gamma}_{m,\ell}(G) \longrightarrow W^{s,\gamma}(G) \times \prod_{j=1}^{m/2} H^{s+m-m_j-1/2}(\Gamma).$$

справедливы теоремы Нетера.

Доказательство теоремы 1.2 аналогично доказательству теоремы 1.1 с естественными изменениями.

§ 2. Некоторые свойства функций из пространства $W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$

Для получения априорных оценок нам необходимо изучить свойства преобразований Фурье функций из $W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$. Эти свойства будут вытекать из следующих лемм.

Л е м м а 2.1. Пусть $f(x) \in W^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ и $0 \leq \gamma < 1$. Тогда для функции $\tilde{f}(\xi)$ - преобразования Фурье функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-2\gamma} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx, \tag{2.1}$$

где C - постоянная, не зависящая от $f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в полупространстве $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, \xi_{n+1}) : \xi_{n+1} \geq 0\}$ функцию

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \xi_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n) e^{-|x|\xi_{n+1}}. \tag{2.2}$$

Пусть $\tilde{F}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1})$ - ее преобразование Фурье по переменным $(x_1, \dots, x_n)$. Тогда, по равенству Парсеваля,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi_{n+1}} \right|^2 d\xi_1 \dots d\xi_n = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial F}{\partial \xi_{n+1}} \right|^2 dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |f(x)|^2 e^{-2|x|\xi_{n+1}} dx.$$

Умножая последнее равенство на $\xi_{n+1}^{1-2\gamma}$ и интегрируя по ξ_{n+1} от 0 до ∞, получаем

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \xi_{n+1}^{1-2\gamma} \left| \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi_{n+1}} \right|^2 d\xi d\xi_{n+1} = \int_0^\infty \xi_{n+1}^{1-2\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |f(x)|^2 e^{-2|x|\xi_{n+1}} dx d\xi_{n+1} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |f(x)|^2 \int_0^\infty \xi_{n+1}^{1-2\gamma} e^{-2|x|\xi_{n+1}} d\xi_{n+1} dx. \tag{2.3}$$

Если $\gamma < 1$, то $\int_0^\infty t^{1-2\gamma} e^{-2t} dt = C < +\infty$ и из (2.3) получается оценка

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \xi_{n+1}^{1-2\gamma} \left| \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi_{n+1}} \right|^2 d\xi d\xi_{n+1} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx. \tag{2.4}$$

Аналогичным образом выводится оценка

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \xi_{n+1}^{1-2\gamma} \left| \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi_k} \right|^2 d\xi d\xi_{n+1} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

Обозначим $\rho = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 + \xi_{n+1}^2)^{1/2}$, $K = \{(\xi, \xi_{n+1}) : \delta_1|\xi| \leq \xi_{n+1} \leq \delta_2|\xi|\}$.
Из оценок (2.4) и (2.5) следует, что

$$\int\limits_K |\xi|^{1-2\gamma}\left|\frac{\partial\tilde F}{\partial\rho}\right|^2 d\xi\, d\xi_{n+1} \le C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{2\gamma}|f(x)|^2 dx. \qquad (2.6)$$

Значит, для почти всех лучей, составляющих конус K, конечен интеграл

$$\int\limits_0^\infty \rho^{1+n-2\gamma}\left|\frac{\partial\tilde F}{\partial\rho}\right|^2 d\rho < +\infty. \qquad (2.7)$$

Так как $\tilde F \to 0$ при $\rho\to\infty$, то по неравенству Харди при $\gamma < \frac{n}{2}$ имеем

$$\int\limits_0^\infty \rho^{n-2\gamma-1}|\tilde F|^2 d\rho \le \frac{4}{(2\gamma-n)^2}\int\limits_0^\infty \rho^{1-2\gamma+n}\left|\frac{\partial\tilde F}{\partial\rho}\right|^2 d\rho. \qquad (2.8)$$

Пусть ℓ - луч, на котором (2.7) выполнено. Для $(\xi,\xi_{n+1})\in\ell$ по формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\tilde F(\xi,\xi_{n+1}) - \tilde F(\xi,0) = \int\limits_0^{\xi_{n+1}} \frac{\partial\tilde F}{\partial\xi_{n+1}}\, d\xi_{n+1}.$$

Откуда

$$|\tilde f(\xi_1,\dots,\xi_n)|^2 \le 2|\tilde F(\xi,\xi_{n+1})|^2 + 2\int\limits_0^{\xi_{n+1}}\left|\frac{\partial\tilde F}{\partial\xi_{n+1}}\right|^2 d\xi_{n+1}\cdot\xi_{n+1}.$$

Умножим полученное неравенство на $|\xi|^{-2\gamma+n-1}$ и проинтегрируем его по лучу ℓ. Получим

$$\int\limits_{\ell'} |\xi|^{-2\gamma+n-1}|\tilde f(\xi)|^2 d|\xi| \le C_2\int\limits_{\ell}\rho^{-2\gamma+n-1}|\tilde F|^2 d\rho +$$
$$+ C_3\int\limits_{\ell'}\xi_{n+1}\int\limits_0^{\xi_{n+1}}|\xi|^{-2\gamma+n-1}\left|\frac{\partial\tilde F}{\partial\xi_{n+1}}\right|^2 d\xi_{n+1}\, d|\xi|. \qquad (2.9)$$

Так как $\gamma>0$, то в области $\xi_{n+1}\le\delta_2|\xi|$ имеет место $\xi_{n+1}^{-2\gamma}\ge(\delta_2|\xi|)^{-2\gamma}$. Учитывая это обстоятельство, а также оценки (2.8), (2.6) и (2.4), получим оценку (2.1), проинтегрировав (2.9) по угловым переменным. Лемма доказана.

Л е м м а 2.2. Пусть $f(x)\in W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma>0$, $\lambda=\gamma-[\gamma]$. Тогда для функции $\tilde f(\xi)$ - преобразования Фурье функции $f(x)$ выполнено неравенство

$$\sum_{\substack{|\alpha|\le s\\ |\beta|=[\gamma]}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|D_\xi^\beta(\xi^\alpha\tilde f(\xi))|^2|\xi|^{-2\lambda}d\xi \le \bar C|f(x)|^2_{s,\gamma}, \qquad (2.10)$$

где $\bar C$ - постоянная, не зависящая от $f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем мультииндекс α, $|\alpha|\le s$, и обозначаем $v_\alpha(x)=|x|^{[\gamma]}D^\alpha f(x)$. Так как $f(x)\in W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, то $v_\alpha(x)\in W^{0,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Тогда, по лемме 2.1,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-2\lambda} \, |\tilde{v}_\alpha(\xi)|^2 d\xi \le c \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2\lambda} \, |v_\alpha(x)|^2 dx.$$

Суммируя последнее неравенство по α , $|\alpha| \le S$, получаем (2.10) , что и требовалось доказать.

§ 3. Уравнение с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ уравнение

$$A(D)u(x) = [A_m(D) + A_\ell(D)]u(x) = f(x). \tag{3.1}$$

Здесь A_m и A_ℓ - однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка m и ℓ соответственно.

Предположим, что $\exists \delta = const > 0$ такое, что для $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$$|a_m(\xi) + a_\ell(\xi)| \ge \delta |\xi|^\ell (1+|\xi|)^{m-\ell}. \tag{3.2}$$

Здесь $a_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$, $a_\ell(\xi) = \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha \xi^\alpha$ - символы операторов A_m и A_ℓ .

Из (3.2) следует, что A_m и A_ℓ - эллиптические операторы. Запишем уравнение (3.1) в виде

$$A(D)u(x) = B(D)A_\ell u(x) - f(x),$$

где $B(D)u = F^{-1}b(\xi)Fu(x)$ - псевдодифференциальный оператор с символом $b(\xi) = a_m(\xi)a_\ell^{-1}(\xi) + 1$. Сначала изучим уравнение

$$B(D)v(x) = g(x). \tag{3.3}$$

Т е о р е м а 3.1. <u>Пусть выполнено условие (3.2) и</u> $\gamma \ge 0$. <u>Тогда у оператора</u> $B(D): W^{s+m-\ell,\gamma}(\mathbb{R}^n) \to W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ <u>существует ограниченный обратный оператор</u> $B^{-1}: W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n) \to W^{s+m-\ell,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, <u>и для</u> $\forall v(x) \in W^{s+m-\ell,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ <u>справедлива оценка</u>

$$|v|_{s+m-\ell,\gamma} \le c\,|Bv|_{s,\gamma}. \tag{3.4}$$

<u>Постоянная</u> C <u>не зависит от</u> $v(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор B^{-1} определяется по формуле $B^{-1}g(x) = F^{-1}b^{-1}(\xi)Fg(x)$.

Докажем оценку (3.4) . Из (3.3) следует, что $\tilde{v}(\xi) = b^{-1}(\xi)\tilde{g}(\xi)$. Хорошо известно, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha v|^2 (1+z)^{2\gamma} dx - c_1 \Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} \Big[|\xi^\alpha \tilde{v}(\xi)|^2 +$$

$$+ \sum_{|\beta|=[\gamma]} \int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-(n+2\lambda)} |D^\beta (\xi+h)^\alpha \tilde{v}(\xi) - D^\beta \xi^\alpha \tilde{v}(\xi)|^2 dh \Big] d\xi \Big\} = c_1(J_1 + J_2). \tag{3.5}$$

Проведем оценку интегралов $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ отдельно, подставив в (3.5) $\tilde{v}(\xi)=b^{-1}(\xi)\tilde{g}(\xi)$.

Из (3.2) следует, что $|b^{-1}(\xi)|\le \delta_1(1+|\xi|)^{\ell-m}$. Значит, при $|\alpha|\le m-\ell$ имеет место $|\xi^\alpha b^{-1}(\xi)|\le c_2$, а при $|\alpha|>m-\ell$ справедливо $|\xi^\alpha b^{-1}(\xi)\tilde{g}(\xi)|\le$ $\le c_3|\xi^\beta\tilde{g}(\xi)|$, где $|\beta|=|\alpha|-(m-\ell)$. Учитывая это, имеем

$$\mathcal{J}_1\le c_4\int_{\mathbb{R}^n}|\xi^\beta\tilde{g}(\xi)|^2 d\xi, \tag{3.6}$$

где $\beta=0$ при $|\alpha|\le m-\ell$ и $|\beta|=|\alpha|-(m-\ell)$ при $|\alpha|>m-\ell$.

Оценим интеграл $\mathcal{J}_2$. Рассмотрим случай $|\alpha|\le m-\ell$. Используя формулу Лейбница, представим подынтегральное выражение в $\mathcal{J}_2$ в виде

$$|h|^{-(n+2\lambda)}\sum_{p+q=\beta}d_{pq}\Big\{D^p\big[(\xi+h)^\alpha b^{-1}(\xi+h)\big]D^q\tilde{g}(\xi+h)-$$
$$-D^p\big[\xi^\alpha b^{-1}(\xi)\big]\cdot D^q\tilde{g}(\xi)\Big\}=|h|^{-(n+2\lambda)}\sum_{p+q=\beta}d_{pq}G_{pq}(\xi). \tag{3.7}$$

Далее, имеем

$$G_{pq}(\xi)\le|D^p(\xi+h)^\alpha b^{-1}(\xi+h)||D^q\tilde{g}(\xi+h)-D^q\tilde{g}(\xi)|+$$
$$+|D^q\tilde{g}(\xi)||D^p\big[(\xi+h)^\alpha b^{-1}(\xi+h)\big]-D^p\big[\xi^\alpha b^{-1}(\xi)\big]|.$$

Так как при $|\alpha|\le m-\ell$

$$|D^p\big[(\xi+h)^\alpha b^{-1}(\xi+h)\big]|\le c_5, \tag{3.8}$$

то

$$|G_{pq}|^2\le c_6\Big\{|D^q\tilde{g}(\xi+h)-D^q\tilde{g}(\xi)|^2+|D^q\tilde{g}(\xi)|^2M_{p\alpha}^2\Big\}. \tag{3.9}$$

Используя (3.9), (3.5) и (3.7), получаем при $|\alpha|\le m-\ell$

$$\mathcal{J}_2\le c_7\sum_{q+p=[\gamma]}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|h|^{-(n+2\lambda)}\Big[|D^q\tilde{g}(\xi+h)-D^q\tilde{g}(\xi)|^2+$$
$$+|D^q\tilde{g}(\xi)|^2M_{p\alpha}^2(\xi,h)\Big]d\xi dh. \tag{3.10}$$

Поскольку

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|h|^{-(n+2\lambda)}|D^q\tilde{g}(\xi+h)-D^q\tilde{g}(\xi)|^2d\xi dh\le c_8\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^2|x|^{2(q+\lambda)}dx, \tag{3.11}$$

то нам осталось оценить лишь интеграл

$$\mathcal{J}_{p,\alpha}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}|h|^{-(n+2\lambda)}M_{p,\alpha}^2(\xi,h)dh=\int_{|h|\ge\frac{|\xi|}{2}}M_{p,\alpha}^2(\xi,h)|h|^{-(n+2\lambda)}dh+$$

$$+\int\limits_{|h|\le\frac{|\xi|}{2}}|h|^{-(n+2\lambda)}M^2_{p,\alpha}(\xi,h)dh=\mathcal{J}'_{p,\alpha}(\xi)+\mathcal{J}''_{p,\alpha}(\xi).$$

Так как, в силу (3.8), $M^2_{p,\alpha}(\xi,h)$ ограничено при всех ξ и h, то

$$\mathcal{J}'_{p,\alpha}(\xi)\le c_9\int\limits_{|h|\ge\frac{|\xi|}{2}}|h|^{-(n+2\lambda)}dh\le c_{10}|\xi|^{-2\lambda}.$$

Из формулы Лагранжа следует, что $|M_{p,\alpha}(\xi,h)|\le|\nabla D^p(\xi^\alpha b^{-1}(\xi))|\big|_{\xi=\zeta}\cdot|h|$, где $\zeta\in\mathbb{R}^n$, $|\xi|\le|\zeta|\le|\xi+h|$, откуда

$$\mathcal{J}''_{p,\alpha}(\xi)\le\int\limits_{|h|\le\frac{|\xi|}{2}}|h|^{-(n+2\lambda)+2}|\nabla D^p(\xi^\alpha b^{-1}(\xi))|\Big|^2_{\xi=\zeta}dh. \qquad (3.12)$$

Поскольку $|\nabla D^p(\xi^\alpha b^{-1}(\xi))|\le c_{11}|\xi|^{-1}(1+|\xi|)^{\ell-m+|\alpha|-p}$, то, сделав в (3.12) замену $h_i=|\xi|t_i$ $i=1,\dots,n$, мы получим

$$\mathcal{J}''_{p,\alpha}(\xi)\le c_{12}\int\limits_{|t|\le0,5}|\xi|^{-2\lambda}|\xi|^2\cdot|\zeta|^{-2}(1+|\zeta|)^{2(\ell-m+|\alpha|-p)}|t|^{-(n+2\lambda)+2}dt.$$

По условию, $|\alpha|-p-m+\ell\le0$. Значит, $(1+|\zeta|)^{2(\ell-m+|\alpha|-p)}\le1$. Очевидно, что $1\le|\xi||\zeta|^{-1}\le\left|t+\frac{\xi}{|\xi|}\right|$. Значит, $|\xi||\zeta|^{-1}\le\frac{3}{2}$. Следовательно, окончательно имеем $\mathcal{J}''_{p,\alpha}(\xi)\le c_{13}|\xi|^{-2\lambda}$, а значит, $\mathcal{J}_{p\alpha}(\xi)\le c_{14}|\xi|^{-2\lambda}$.

Тогда второй интеграл в правой части (3.10) с помощью леммы 2.2 оценивается сверху величиной

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^2|x|^{2(q+\lambda)}dx. \qquad (3.13)$$

Случай $|\alpha|>m-\ell$ рассматривается аналогично с естественными изменениями в рассуждениях. Таким образом, мы получаем неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha v(x)|^2(1+r)^{2\gamma}dx\le c_{15}\sum_{|\beta|=K}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[|D^\beta g(x)|^2+\sum_{q=0}^{[\gamma]}|D^\beta g(x)|^2r^{2(q+\lambda)}\right]dx. \qquad (3.14)$$

Здесь $K=0$ при $|\alpha|\le m-\ell$ и $K=|\alpha|-(m-\ell)$ при $|\alpha|>m-\ell$. Так как $r^{2(q+\lambda)}\le c_{16}(1+r)^{2\gamma}$, то, суммируя (3.14) по всем α, $|\alpha|\le$ $\le s+m-\ell$, мы получим (3.4). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим уравнение

$$A_\ell(D)u(x)=v(x), \qquad (3.15)$$

где $A_\ell(D)$ - эллиптический однородный оператор с постоянными коэффициентами. Такие операторы рассматривались авторами в [2]. Необходимый нам результат из [2] дает

Т е о р е м а 3.2. <u>Если</u> $A_\ell(D)$ - <u>однородный эллиптический оператор порядка</u> ℓ, <u>то при</u> $s-\nu\,\overline{\in}\,N_\ell$, $s\ge0$, $\nu\in\mathbb{R}^1$.

1) <u>Существует ограниченный оператор</u> $R_\ell: H^s_\nu(\mathbb{R}^n)\longrightarrow H^{s+\ell}_\nu(\mathbb{R}^n)$

такой, что $A_\ell R_\ell v = v + T_\ell v$ для $\forall v \in H_\nu^s(\mathbb{R}^n)$. Здесь T_ℓ - ограниченный оператор из $H_\nu^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s+l}(K_a)$, причем $\operatorname{supp} T_\ell v \subset$ $\subset K_a = \{x : |x| \le a\}$.

2) Для $\forall u(x) \in H_\nu^{s+\ell}(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка

$$\|u(x)\|_{s+\ell,\nu} \le C\left\{\|A_\ell u\|_{s,\nu} + \|u\|_{s+\ell-1}(K_a)\right\}. \tag{3.16}$$

Постоянная C не зависит от $u(x)$.

Таким образом, мы подготовлены к изучению вопроса о разрешимости уравнения (3.1).

Теорема 3.3. Пусть выполнено условие (3.2), $\gamma \ge 0$, $s-\gamma \bar{\in} N_\ell$. Тогда

1). Существует ограниченный оператор $R_A : W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{m,\ell}^{s+m,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ такой, что $AR_A f = f + T_A f$ для $\forall f \in W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$. Здесь T_A - ограниченный оператор из $W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ в $W^{s+l,\gamma+\gamma_1}(\mathbb{R}^n)$, γ_1 - любое положительное число.

2). Для $\forall u(x) \in H_{m,\ell}^{s+m,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|u\|_{s+m,\gamma,m,\ell} \le c\left\{\|Au\|_{s,\gamma} + \|u(x)\|_{s+m-1}(K_{a_1})\right\}. \tag{3.17}$$

Постоянная C не зависит от $u(x)$, $a_1 \ge a$.

Доказательство. Оператор R_A задается формулой $R_A = R_\ell B^{-1}$. Имеем

$$AR_A f = BA_\ell R_\ell B^{-1} f = f + BT_\ell B^{-1} f = f + T_A f.$$

Если $f \in W^{s,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, то $B^{-1} f \in W^{s+m-\ell,\gamma}(\mathbb{R}^n)$. Из свойств T_ℓ следует, что $T_\ell B^{-1} f \in H^{s+m-\ell+1}(K_a)$ и $\operatorname{supp} T_\ell B^{-1} f \subset K_a$. Значит, $T_\ell B^{-1} f \in W^{s+m-\ell+1,\gamma+\gamma_1}$ для $\forall \gamma_1 > 0$. Следовательно, $\|T_A f\|_{s+1,\gamma+\gamma_1} \le C_1 \|f\|_{s,\gamma}$.

Докажем (3.17). Положим в (3.16) $\nu = \gamma$ и воспользуемся тем, что $A_\ell D^\beta u = D^\beta v$. Тогда

$$\|D^\beta u(x)\|^2_{s+\ell,\gamma} \le c\left\{\|D^\beta A_\ell u\|^2_{s,\gamma} + \|D^\beta u\|^2_{s+\ell-1}(K_a)\right\}. \tag{3.18}$$

Так как $\|u(x)\|^2_{s,\gamma} \le C_1 \|u(x)\|^2_{s,\gamma}$, то, суммируя (3.18) по всем β, $|\beta| \le$ $\le m-\ell$ и учитывая (3.4), получаем (3.17). Что и требовалось.

§ 4. Доказательство теоремы 1.1

Основой доказательства является построение для каждого $\varepsilon > 0$ покрытия $\mathbb{R}^n$ счетной системой областей $U_0^\varepsilon, U_1^\varepsilon, \ldots, U_k^\varepsilon, \ldots$ и соответствующего ему разбиения единицы $\varphi_0^\varepsilon(x), \varphi_1^\varepsilon(x), \ldots, \varphi_k^\varepsilon(x), \ldots$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $U_0^\varepsilon = \{x : |x| \le a(\varepsilon)\}$;

(ii) $\max\limits_{x,y\in \mathcal{U}_\kappa^\varepsilon} |a_\alpha(x) - a_\alpha(y)| \le \varepsilon, \quad |\alpha| = m, \ell;$

(iii) $\varphi_\kappa^\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi_\kappa^\varepsilon(x) \subset \mathcal{U}_\kappa^\varepsilon$, $\sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} (\varphi_\kappa^\varepsilon(x)) = 1$;

$|D^\beta \varphi_\kappa^\varepsilon(x)| \le \delta_\beta(\varepsilon)\,|x|^{-|\beta|}$, где $\delta_\beta(\varepsilon) \longrightarrow 0$ при $\varepsilon \to 0$;

(iiii) если $p(x)$ - число областей $\mathcal{U}_\kappa^\varepsilon$, для которых $x \in \mathcal{U}_\kappa^\varepsilon$, то $p(x) \le M = const$.

Покажем, что в случае существования покрытия $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условиям (i)- (iiii), неравенство (1.2) выполнено. В силу условия (iii),

$$\|u\|^2_{s+m,\gamma,m,\ell} = \Big\|\sum_{\kappa=0}^{\infty} \varphi_\kappa^\varepsilon u(x)\Big\|^2_{s+m,\gamma,m,\ell} \le \sum_{\kappa=0}^{\infty} \|\varphi_\kappa^\varepsilon u(x)\|^2_{s+m,\gamma,m,\ell}(\mathcal{U}_\kappa^\varepsilon). \quad (4.1)$$

Если $a(\varepsilon)$ выбрано достаточно большим, то для оператора

$$A_\kappa^{m,\ell}(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_\kappa) D^\alpha + \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(x_\kappa) D^\alpha$$

выполнено условие (3.2) из § 3, а значит, для $\varphi_\kappa^\varepsilon(x) u(x) = u_\kappa(x)$ в силу теоремы 3.3 выполнено неравенство (3.17)

$$\|u_\kappa(x)\|^2_{s+m,\gamma,m,\ell}(\mathcal{U}_\kappa^\varepsilon) \le$$

$$\le C\Big[\|A_\kappa^{m,\ell} u_\kappa(x)\|^2_{s,\gamma}(\mathcal{U}_\kappa^\varepsilon) + \|u(x)\|^2_{s+m-1}(K_a \cap \mathcal{U}_\kappa^\varepsilon)\Big]. \quad (4.2)$$

Заметим, что постоянная C не зависит от x_κ. Второй член в правой части (4.2) отличен от нуля только для конечного числа индексов κ. В силу условия (ii), справедлива оценка

$$\big\|[A_\kappa^{m,\ell}(D) - A^{m,\ell}(x,D)]u_\kappa(x)\big\|^2_{s,\gamma}(\mathcal{U}_\kappa^\varepsilon) \le t(\varepsilon)\|u_\kappa\|^2_{s+m,\gamma,m,\ell}(\mathcal{U}_\kappa^\varepsilon), \quad (4.3)$$

где $t(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Если $|x_\kappa|$ достаточно большое, то, по условию теоремы,

$$\big\|[A^{m,\ell}(x,D) - A(x,D)]u_\kappa\big\|^2_{s,\gamma}(\mathcal{U}_\kappa^\varepsilon) \le t_1(\Delta_s)\|u_\kappa\|^2_{s+m,\gamma,m,\ell}(\mathcal{U}_\kappa^\varepsilon), \quad (4.4)$$

где $t_1(\Delta_s) \to 0$ при $\Delta_s \to 0$.

Для окончания доказательства нам осталось оценить коммутатор $A\varphi_\kappa - \varphi_\kappa A$. По свойству (iii) разбиения единицы и в силу условий на коэффициенты оператора $A(x,D)$

$$\big\|[A\varphi_\kappa^\varepsilon - \varphi_\kappa^\varepsilon A]u\big\|^2_{s,\gamma}(\mathcal{U}_\kappa^\varepsilon) \le t_2(\varepsilon)\|u\|^2_{s+m,\gamma,m,\ell}(\mathcal{U}_\kappa^\varepsilon), \quad (4.5)$$

где $t_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Объединяя обычным образом (4.1) - (4.5), мы получим неравенство (1.2).

Покажем, что с помощью того же разбиения единицы можно построить оператор R, т.е. доказать первую часть теоремы 1.1. Пусть $\psi_\kappa^\varepsilon(x) \in C_0^\infty$,

$supp\,\psi_K^\varepsilon \subset \mathcal{U}_K^\varepsilon$ и $\psi_K^\varepsilon \varphi_K^\varepsilon = \varphi_K^\varepsilon$. Оператор R строится в виде

$$R\varphi = \sum_{K=1}^{\infty} \psi_K^\varepsilon(x) R_{A_K^{m,\ell}} \varphi_K^\varepsilon(x) f(x) + \psi_0^\varepsilon(x) R_0 \varphi_0^\varepsilon(x) f(x).$$

Здесь $R_{A_K^{m,\ell}}$ - операторы, существование которых для каждого оператора $A_K^{m,\ell}$ следует из теоремы 3.3, R_0 - правый регуляризатор для главной части оператора $A(x,D)$ в области K_a. Исследование выражения ARf проводится стандартным образом.

Построим покрытие $\mathcal{U}_0^\varepsilon, \mathcal{U}_1^\varepsilon, \ldots, \mathcal{U}_K^\varepsilon, \ldots$ и соответствующее ему разбиение единицы. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число, $\Omega_N = \{x : |x| = N\}$. Покроем Ω_N областями $\Omega_1^N, \ldots, \Omega_p^N$ с диаметром $d(N)$. Хорошо известно, что существует разбиение единицы $\chi_1(\omega), \ldots, \chi_p(\omega)$ такое, что $supp\,\chi_j(\omega) \subset \Omega_j^N$;

$$\sum_{j=1}^{q} \chi_j(\omega) \equiv 1, \quad \omega \in \Omega_N, \quad |D_\omega^\alpha \chi_j(\omega)| \le C_\alpha (d(N))^{-|\alpha|}. \tag{4.6}$$

Если p - фиксированное число, то всегда можно сделать так, чтобы $d(N) \to \infty$ при $N \to \infty$.

В каждой Ω_j^N выберем точку ω_j и рассмотрим функцию $a_\alpha^j(\tau) = a_\alpha(\tau\omega_j)$ для некоторого фиксированного мультииндекса α, $|\alpha| = m$ или $|\alpha| = \ell$. Зафиксируем j. При $\tau \ge N-1$ область значений функции $a_\alpha^j(\tau)$ - ограниченное множество $M_\alpha^j \subset \mathbb{C}$. Покроем M_α^j кругами радиуса $\varepsilon_1 > 0$. Обозначим эти круги $\mathcal{L}_{\alpha,i}^j$, $i = 1, \ldots, \ell_\alpha^j$. Рассмотрим покрытие полупрямой $\tau \ge N$ областями $V_{\alpha,i}^j = \{\tau : a_\alpha^j(\tau) \in \mathcal{L}_{\alpha,i}^j\}$. Каждая область $V_{\alpha,i}^j$ состоит из конечной или счетной системы интервалов. Очевидно, что

$$|a_\alpha^j(\tau) - a_\alpha^j(\tau_1)| \le \varepsilon_1, \quad \tau, \tau_1 \in V_{\alpha,i}^j. \tag{4.7}$$

Пусть $\Delta_{\alpha,i}^{j,q}$ $q = 1, \ldots, \theta_{\alpha,i}^j$, $\theta_{\alpha,i}^j \le +\infty$ - интервалы, составляющие область $V_{\alpha,i}^j$. Оценим их длину. Если τ_q, τ_{q+1} - концы q-го интервала, то $a_\alpha^j(\tau_{q+1}) - a_\alpha^j(\tau_q) = \frac{da_\alpha^j}{d\tau}(\hat{\tau}_q)(\tau_{q+1} - \tau_q)$, где $\hat{\tau}_q \in \Delta_{\alpha,i}^{j,q}$. По построению, $\varepsilon_1 = |a_\alpha^j(\tau_{q+1}) - a_\alpha^j(\tau_q)|$. Значит, $(\tau_{q+1} - \tau_q)^{-1} \le \varepsilon_1^{-1} \max \left|\frac{da_\alpha^j}{d\tau}\right|$.

Учитывая условие теоремы, получаем оценку

$$(\tau_{q+1} - \tau_q)^{-1} \le \frac{\Delta_S C}{\varepsilon_1 \tau_q}, \tag{4.8}$$

где C - абсолютная постоянная.

Рассмотрим разбиение единицы $\psi_{q,i}^{\alpha,j}(\tau)$, отвечающее покрытию полупрямой $\tau \ge N$ интервалами $\Delta_{\alpha,i}^{j,q}$ при фиксированных α, j. Взяв $\Delta_S \le \varepsilon_1^2$, мы получим оценку

$$|D_x^\beta \psi_{q,i}^{\alpha,j}(\tau)| \le \varepsilon_1^{|\beta|} C_\beta \tau^{-1}, \tag{4.9}$$

где C_β - постоянная.

Система областей $\mathcal{U}_{j,q}^{\alpha,i} = \Omega_j^N \times \Delta_{\alpha,i}^{j,q}$; $j=1,\dots,p$; $q=1,\dots,\theta_{\alpha,i}^j$; $i=1,\dots,\ell_\alpha^j$, при фиксированном α является покрытием области $\tau \geqslant N$. Соответствующее ему разбиение единицы состоит из функций $\varphi_k^\alpha(x)$, каждая из которых является произведением функции $\psi_{q,i}^{\alpha,j}(\tau)$ при некоторых q,i,j на функцию $\chi_j(\omega)$ при том же j . Значит, при достаточно большом N мы построили разбиение единицы $\varphi_k^\alpha(x)$, удовлетворяющее нужным требованиям.

Искомое нами покрытие $\mathcal{U}_0^\varepsilon, \dots, \mathcal{U}_k^\varepsilon, \dots$ получается из системы областей $\mathcal{U}_{j,q}^{\alpha,i}$ дополнением ее областью $\mathcal{U}_0^\varepsilon$ и пересечением по всем α, $|\alpha| = m, \ell$.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., "Наука", 1974, 808 с.
2. Багиров Л.А., Кондратьев В.А. Об эллиптических уравнениях в $\mathbb{R}^n$. - "Дифференц. уравнения", 1975, т.11, № 3, с.498-504.
3. Кудрявцев Л.Д. Решение первой краевой задачи для самосопряженных эллиптических уравнений в случае неограниченной области. - "Изв. АН СССР. Серия мат.", 1967, т.31, № 5, с.1179-1199.
4. Половинкин В.И. Внешние задачи Дирихле и Неймана для полигармонического уравнения. - "Дифференц. уравнения", 1971, т.7, № 1,с.64-72.
5. Успенский С.В. О дифференциальных свойствах решений одного класса псевдодифференциальных уравнений на бесконечности. - "Сиб. мат. журн", 1972, т.13, № 3, с.665-678.
6. Филатов П.С. О нётеровости квазиэллиптических уравнений в R^n. - В кн.: "Дифференц. уравнения с частными производными" (Труды семинара С Л.Соболева) № 2, Новосибирск, 1976, с.129-138.
7. Avanggiati A. Spazi di Sobolev con peso ed alcune applicazioni. - "Boll. Unione mat. ital.", 1976, 13-A, № 1, p.1-52.
8. Nirenberg L., Walker H.F. The null spaces of elliptic partial differential operators in R^n. - "J. of Math. Anal. and Appl.", 1973, 42, № 2, p.271-301.