УДК 517.91

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ПЛОСКОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ КУСОЧНО-АФФИННОЙ СИСТЕМЫ

Ю.И.Г и л ь д е р м а н (Новосибирск)

В статье устанавливаются необходимые и достаточные условия существования предельных циклов у плоской непрерывной кусочно-аффинной динамической системы. Основной результат статьи сформулирован в [1].

1. Постановка задачи. Мы рассматриваем динамическую систему

$$\dot{X} = F(X), \quad X = (x_1, x_2)^* \in R^2, \tag{1}$$

где

$$F(X) = A_k X + B_k \quad \text{при } X \in U_k = \{X \mid (-1)^{k+1}(\beta X - h) \leq 0\},\ k = 1,2; \tag{2}$$

A_k - квадратная действительная матрица, B_k, $\beta^* \in R^2$, $h \in R$ и

$$A_1 X + B_1 = A_2 X + B_2 \quad \text{при } X \in \Gamma = U_1 \cap U_2. \tag{3}$$

Эта система принадлежит к классу непрерывных кусочно-аффинных систем, определение которых и некоторые свойства можно найти в [1, 2]. Одно из этих свойств состоит в том, что для матриц A_k, B_k системы (1)-(3) справедливы равенства

$$A_2 = A_1 + \alpha\beta, \qquad B_2 = B_1 - \alpha h. \tag{4}$$

Пользуясь этим и предполагая, что $|A_1| \neq 0$, систему (1)-(3) можно записать в виде:

$$\dot{X} = AX \qquad \text{при } X \in U_1 = \{X \mid \beta X \leq h\}, \tag{5}$$

$$\dot{X} = (A + \alpha\beta)X - \alpha h \qquad \text{при } X \in U_2 = \{X \mid \beta X \geq h\} \tag{6}$$

или

$$\dot{X} = F(X),\ F(X) = AX \ \text{при } \beta X \leq h,\ F(X) = (A + \alpha\beta)X - \alpha h \ \text{при } \beta X \geq h. \tag{7}$$

Нашей целью является нахождение необходимых и достаточных условий в терминах A и α, при которых система (7) обладает предельным циклом. После того как будут найдены эти условия, станет ясной возможность построения многокомпонентных кусочно-аффинных систем со многими предельными циклами, лежащими один вне другого. Поскольку очевидно, что при $|A_1| = 0$ система (1)-(3) предельных циклов не имеет, наше предположение о неравенстве нулю этого определителя не сужает исследования.

Вопрос о существовании предельного цикла для конкретных систем, среди которых имеются и непрерывные кусочно-аффинные, часто возникает в теории автоматического регулирования. Так, в [3, с.542] , установлено существование предельного цикла у системы

$$\dot{X} = AX \quad \text{при } |\beta X| \leq 1, \quad \dot{X} = (A+\alpha\beta)X + (-1)^{k+1}\alpha \quad \text{при } (-1)^k \beta X \geq 1,$$

$$\text{где } k=1,2; \quad A = \begin{pmatrix} K-1 & -1 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}, \ \beta=(1,0), \ \alpha=(-K,0)^*, \ K>1, \ 0<\mu<\frac{1}{4}, \tag{8}$$

от которой система (1)-(3) отличается не только общим видом матриц, но еще и тем, что она распадается всего на две компоненты, в то время как система (8) трехкомпонентна. Цикл, построенный для системы (8) в [3] , состоит из четырех кусков траекторий аффинных систем с постоянными коэффициентами. В отличие от этого цикл системы (1)-(3) в тех случаях, когда он существует гладко сшивается всего из двух кусков.

2. Необходимые условия. Укажем прежде всего необходимые условия, вытекающие из критерия Бендиксона, справедливого, очевидно, для непрерывных кусочно-аффинных систем, а также из теоремы Пуанкаре об индексе [4] .

В силу последней теоремы внутри цикла должна быть точка покоя. Таковой может быть только точка покоя одной из компонент. Отсюда и из аффинности компонент следует, что система (7) не имеет циклов, если собственные числа матриц обеих компонент действительны. В противном случае, ту компоненту, точка покоя которой является точкой покоя всей системы, сдвигом можно было бы превратить в линейную систему, и ее характеристические направления пересекали бы цикл. Таким образом, справедлива

Л е м м а 1. <u>Для существования предельного цикла у двухкомпонентной кусочно-аффинной системы необходимо, чтобы матрица хотя бы одной из компонент имела комплексные собственные числа и точка покоя этой компоненты являлась точкой покоя всей системы.</u>

Пользуясь леммой, матрицу одной из компонент системы (7) можем привести к диагональному виду. Пусть для определенности $\lambda_1 = \lambda = a + bi, \ b>0,$ и $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ - собственные числа матрицы A . После преобразования системы (7) можем считать, что

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2); \ X, \alpha, \beta^* \in C^2; \ h \geq 0; \ \alpha_2 = \bar{\alpha}_1, \ \beta_2 = \bar{\beta}_1 \neq 0. \tag{9}$$

Добавим сюда не нарушающее общности предположение $|\beta| = 1, \ \mathrm{Re}\,\beta_1 \neq 0, \ \mathrm{Im}\,\beta_1 \neq 0.$

Пусть, наконец, μ_1, μ_2 - собственные числа матрицы $A+\alpha\beta$. Как показано в [2] , α_k при этом однозначно выражаются через λ_k и μ_k :

$$\alpha_k = (-1)^{k-1} \frac{1}{\beta_k} \frac{(\lambda_k-\mu_1)(\lambda_k-\mu_2)}{\lambda_2-\lambda_1}, \quad k=1,2. \tag{10}$$

Отсюда следует, что выбором λ_k и μ_k мы однозначно определяем систему (7) с заданной границей Γ. При этом, поскольку траектории каждой из компонент инвариантны по отношению к модулю произведения соответствующих собственных чисел, мы, не нарушая общности, можем считать, что $|\lambda_1\lambda_2| = |\mu_1\mu_2| = 1$ (если $\mu_k \neq 0$).

В силу критерия Бендиксона, для отсутствия цикла в области G достаточно, чтобы $\operatorname{div} F(X)$ была знакопостоянна в G и отлична от тождественного нуля. Поскольку нас интересуют предельные циклы, а ни одна из аффинных компонент такого цикла не имеет, то область G следует выбирать так, чтобы ее пересечение с внутренностью любой из областей U_1, U_2, на которые разбито R^2, было непусто.

Для кусочно-аффинной системы $\operatorname{div} F(X) = Tr\, A_k$ при $X \in U_k$. Поэтому критерий Бендиксона для такой системы (7) означает, что суммы $\lambda_1 + \lambda_2$ и $\mu_1 + \mu_2$ одного знака и не равны одновременно нулю. Отсюда вытекает

Л е м м а 2. <u>Для существования предельного цикла у двухкомпонентной кусочно-аффинной непрерывной системы, матрицы компонент которой имеют своими собственными числами λ_1, λ_2 и соответственно μ_1, μ_2, необходимо выполнение одного из условий: либо $\lambda_1+\lambda_2=\mu_1+\mu_2=0$, либо $(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)<0$.</u>

Воспользуемся теперь еще одним очевидным условием существования цикла. Пусть $Y_k(t)$, $t \geq 0$, $k=1,2$ - решение k-й компоненты. Если цикл существует, то для некоторых $Y_k(t)$ и $t_k > 0$, $k=1,2$, имеют место равенства

$$\beta Y_1(0) = h, \quad \beta Y_1(t_1) = h, \quad Y_2(0) = Y_1(t_1), \quad Y_2(t_2) = Y_1(0).$$

Обозначим $Y_1(0) = C$, и пусть $M_k(t)$, $k=1,2$, - фундаментальные матрицы систем (5) и (6) такие, что $M_k(0) = E$, а $Y_2^*(t)$ - некоторое частное решение системы (6). Тогда предыдущие равенства могут быть записаны в виде:

$$\beta C = h, \quad \beta M_1(t_1)C = h, \quad M_2(t_2)\left[M_1(t_1)C - Y_2^*(0)\right] + Y_2^*(t_2) = C. \tag{11}$$

Отсюда сразу следует, что при $h=0$ предельных циклов нет. В самом деле, если $h=0$, то $Y_2^*(t) \equiv 0$ и система (11) относительно C однородна. Поэтому если существуют $t_k > 0$, при которых она совместна с некоторым C, отличным от нуля, то при этих значениях t_k она эквивалентна своему первому уравнению. Это означает, что цикл проходит через любую точку $C \neq 0$, лежащую на границе Γ. (Через точку $C=0$ цикл проходить не может, так как это точка покоя системы.)

Еще проще убедиться, что при $bt_1 = k\pi$ нет предельных циклов, так как в этом случае из первых двух уравнений следует, что $a=0$, $M(t_1)=E$, т.е. траектория системы (5), проходящая через точку C, сама является циклом и не будет предельным циклом.

Итак, впредь полагаем $h>0$, $bt_1 \neq k\pi$, $k=1,2,\ldots$. Пользуясь этим и полагая $M_1(t)=\mathrm{diag}\,(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$, из первых двух уравнений (11) найдем

$$C=\frac{h}{e^{\lambda_2 t_1}-e^{\lambda_1 t_1}}\begin{pmatrix}\beta_2(e^{\lambda_2 t_1}-1)\\ -\beta_1(e^{\lambda_1 t_1}-1)\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Используя это значение C, нетрудно показать, что при $Re\,\lambda=0$ и $\mu_1+\mu_2=0$ предельных циклов нет. Для этого заметим, что

$$|A+\alpha\beta-\mu|=\mu^2-\mu(\lambda_1+\lambda_2+\beta\alpha)+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\alpha_2\beta_2+\lambda_2\alpha_1\beta_1. \tag{13}$$

Полагая в этом равенстве $Re\,\lambda=\mu_1+\mu_2=0$ и определяя возможные значения α, соответствующие условию $\mu_1+\mu_2=0$, найдем матрицы $A+\alpha\beta$ и αh, а с ними и решение $Y_2(t_2)$ компоненты (6). Подставив это решение вместе с $Y_1(t_1)$ и C в условие (11), убедимся, что в случае $\mu_1+\mu_2=0$ циклов либо нет, либо они не предельные. Совершенно аналогично показывается отсутствие циклов в случае, когда $Re\,\lambda>0$, и либо $\mu_1=0$ $(\mu_2=-1)$, либо $\mu_1=\mu_2=-1$. Таким образом, мы можем уточнить лемму 2. Имеет место

Л е м м а 3. Для существования предельного цикла у двухкомпонентной плоской кусочно-аффинной системы необходимо, чтобы матрица хотя бы одной из компонент имела комплексные собственные числа; точка покоя этой компоненты являлась бы точкой покоя всей системы и не лежала бы на границе областей; собственные числа обеих компонент были бы различными, а их действительные части отличны от нуля; наконец, следы матриц компонент были бы различных знаков.

В терминах системы (7) это означает, что $Re\,\lambda_k \neq 0$, $Im\,\lambda_k \neq 0$, $Re\,\mu_k \neq 0$, $\mu_1 \neq \mu_2$, $h>0$, $(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)<0$.

Теперь мы можем рассмотреть

3. Необходимые и достаточные условия. Рассмотрим функцию последования системы (7), определенную на луче $\beta X=h$. Для существования предельного цикла необходимо и достаточно существование у этой функции неподвижной точки. Такой точкой может служить точка C, определяемая системой (11), если позаботиться о том, чтобы часть цикла, образованная траекторией $M_1(t)C$, $0\le t\le t_1$, лежала в U_1. Таким образом, для существования

предельного цикла необходимо и достаточно, чтобы существовала такая точка $C \in \Gamma$ и такие $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$, что удовлетворяется система

$$\beta C = h, \quad \beta M_1(t_1)C = h, \tag{14}$$

$$\beta Y'\big|_{Y=C} = \beta AC < 0, \quad \beta Y'\big|_{Y=M_1(t_1)C} = \beta AM_1(t_1)C > 0, \tag{15}$$

$$\beta M_1(t)C < h, \quad 0 < t < t_1, \tag{16}$$

$$M_2(t_2)\left[M_1(t_1)C - Y_0\right] + Y_0 = C, \tag{17}$$

где, как и ранее, полагаем $M_1(t) = \mathrm{diag}\,(e^{\lambda t}, e^{\bar\lambda t})$, $\ell t_1 \neq k\pi$ и, пользуясь леммой 3, полагаем $\lambda = a + \ell i$; $a, \ell, h > 0$; $|\lambda| = |\mu_1\mu_2| = 1$;

$$\mu_1 + \mu_2 < 0;\ M_2(t) = M^{-1}\mathrm{diag}(e^{\mu_1 t}, e^{\mu_2 t})M;\ M = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\begin{pmatrix} (\bar\lambda - \mu_1)\beta_1 & (\lambda - \mu_1)\beta_2 \\ -(\bar\lambda - \mu_2)\beta_1 & -(\lambda - \mu_2)\beta_2 \end{pmatrix},$$

а $Y_0 = (A + \alpha\beta)^{-1}\alpha h = \dfrac{h}{\mu_1\mu_2}\begin{pmatrix} \lambda_2\alpha_1 \\ \lambda_1\alpha_2 \end{pmatrix}$.

Наша задача состоит в том, чтобы исключить t_1, t_2 и C из системы (14)-(17) и получить необходимые и достаточные условия существования предельного цикла в терминах собственных чисел λ_k и μ_k. Формула (10) позволит нам затем построить требуемую кусочно-аффинную систему.

Значение C, удовлетворяющее системе (14), дается формулой (12). С этим значением C, заменив для краткости ℓt_1 на t_1, получим

$$\beta AC = \frac{hu}{\sin t_1}, \qquad \beta AM_1(t_1)C = \frac{h v}{\sin t_1}, \tag{18}$$

где

$$u = a\sin t_1 - \ell\cos t_1 + \ell e^{-\frac{a}{\ell}t_1}, \quad v = a\sin t_1 + \ell\cos t_1 - \ell e^{\frac{a}{\ell}t_1}, \tag{19}$$

и условия (15) принимают вид

$$\sin t_1 < 0, \quad u > 0, \quad v < 0, \quad t_1 > 0. \tag{20}$$

Неравенство $v < 0$ следует из двух первых неравенств (20). Эти неравенства определяют некоторую последовательность промежутков на полуоси $t_1 > 0$, из которой, чтобы удовлетворить неравенству (16), нужно взять только первый промежуток (π, t^*), где t^* - корень уравнения

$$u(t) = a\sin t - \ell\cos t + \ell e^{-\frac{a}{\ell}t} = 0 \tag{21}$$

на промежутке $(\pi, 2\pi]$. Нетрудно обнаружить, что t^* существует и принадлежит промежутку $(\pi + \varphi, \frac{3\pi}{2} + \varphi)$, где $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{\ell}{a}$.

Таким образом, нужно выбрать $t_2 > 0$, чтобы при некотором $t_1 \in (\pi, t^*)$ выполнялось равенство (17). Подставив в это равенство значение Y_0 и умножив его слева на M, получим

$$e^{\mu_k t_2} = \frac{h - \mu_k\beta AC}{h - \mu_k\beta AM(t_1)C}, \quad k = 1, 2,$$

или, в силу (18),

$$e^{\mu_k t_2} = \frac{w-\mu_k u}{w-\mu_k v}, \quad w = \sin t_1, \quad k=1,2. \tag{22}$$

Таким образом, предельный цикл будет существовать тогда и только тогда, когда для некоторого $t_1 \in (\pi, t^*)$ существует $t_2 > 0$, удовлетворяющее системе (22), и это t_1 может быть заключено в окрестность, для точек которой система (22) несовместна. Мы покажем, что в тех случаях, когда указанное t_1 существует, оно единственно среди всех точек промежутка (π, t^*).

Удобно рассмотреть порознь три случая, когда собственные числа μ_k: 1) комплексны, 2) действительны и одного знака и 3) действительны и разных знаков.

3.1. Пусть $\mu_1 = \mu = p + qi, q > 0, \mu_2 = \bar{\mu}$ и, в силу леммы 3, $p < 0$. Система (22) в рассматриваемом случае эквивалентна двум действительным равенствам:

$$e^{pt_2}\cos qt_2 = \frac{(w-pu)(w-pv)+q^2uv}{(w-pv)^2+q^2v^2} \equiv f(t_1),$$

$$e^{pt_2}\sin qt_2 = \frac{qw(v-u)}{(w-pv)^2+q^2v^2} \equiv g(t_1),$$

$$t_2 > 0, \quad t_1 \in (\pi, t^*).$$

В силу (20) знаменатель дробей отличен от нуля.

В плоскости ζ_1, ζ_2 рассмотрим две кривые:

$$\Gamma_1 = \{(\zeta_1,\zeta_2) \mid \zeta_1 = f(t),\ \zeta_2 = g(t)\},\ t \in [\pi, t^*] \quad \text{и}$$
$$\Gamma_2 = \{(\zeta_1,\zeta_2) \mid \zeta_1 = e^{pt_2}\cos qt_2,\ \zeta_2 = e^{pt_2}\sin qt_2\},\ t_2 \in [0,\infty).$$

Так как $g(t) > 0$ при $t \in (\pi, t^*]$, то вся кривая Γ_1, кроме начальной точки $(f(\pi), g(\pi)) = (-e^{-\frac{p}{q}\pi}, 0)$, расположена выше оси $O\zeta_1$. Кривая Γ_2 представляет собой спираль, начинающуюся при $t_2 = 0$ в точке $(1,0)$ и пересекающую ось $O\zeta_1$ в точках $(-1)^k e^{\frac{p}{q}\pi k}$, а ось $O\zeta_2$ в точках $(-1)^k e^{(\frac{\pi}{2}+k\pi)\frac{p}{q}}$, $k = 0,1,2,\dots$.

Для существования предельного цикла необходимо и достаточно, чтобы кривые Γ_1, Γ_2 пересекались при $t > \pi, t_2 > 0$ и точка пересечения была изолированной. Так как $g(t) > 0$, то нас будут интересовать только верхние дуги кривой Γ_2, т.е. дуги $\Gamma_2^{(m)} = \{(\zeta_1,\zeta_2) \mid \zeta_1 = e^{pt_2}\cos qt_2,$ $\zeta_2 = e^{pt_2}\sin qt_2\},\ qt_2 \in [(2m-2)\pi, (2m-1)\pi]$. Из условия пересечения Γ_1 и $\Gamma_2^{(m)}$ можно получить те или иные условия существования цикла.

Пусть $m \geq 1$ - наименьшее целое число, для которого $-e^{-\frac{p}{q}\pi} <$ $< -e^{(2m-1)\frac{p}{q}\pi}$, т.е.

$$\frac{a}{b} < (2m-1)\frac{|p|}{q}\ ,\ m=1,2,\ldots \text{ и } (2m-3)\frac{|p|}{q} \le \frac{a}{b}\ ,\ m=2,3,\ldots \qquad (23)$$

Это означает, что $\Gamma_2^{(m)}$ - первая дуга кривой Γ_2 , слева от которой при $t=\pi$ начинается кривая Γ_1 .

Пусть $N_1(t)$ и $N_2(t_2)$ - точки кривых Γ_1 и $\Gamma_2^{(m)}$, лежащие на одном луче, и $r_1(t)$ и $r_2(t_2)$ - расстояния от этих точек до начала. Тогда $\operatorname{tg} qt_2 = \frac{g(t)}{f(t)}$. Отсюда и из условия $qt_2=(2m-1)\pi$ при $t=\pi$ получаем

$$qt_2=\begin{cases}(2m-1)\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{g(t)}{f(t)} & \text{при } f(t)<0,\\[2mm] (2m-2)\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{g(t)}{f(t)} & \text{при } f(t)>0,\ t\in[\pi,t^*],\end{cases} \qquad (24)$$

и с этим t_2

$$G_m(t) = r_2^2(t_2)-r_1^2(t)= e^{2pt_2}-(f^2(t)+g^2(t)).$$

В силу выбора m (см. (23)), $G_m(\pi)<0$. Кривые Γ_1 и $\Gamma_2^{(m)}$ пересекаются, если найдется такое $\tilde{t}\in(\pi,t^*]$, что $G_m(\tilde{t})>0$. Это эквивалентно тому, что при $t=\tilde{t}$ функция

$$\Phi_m(t) = 2pt_2-\ln\left(f^2(t)+g^2(t)\right) \qquad (25)$$

принимает положительное значение. Найдем условия, при которых такое $\tilde{t}$ существует. Для этого преобразуем выражение $r_1^2(t)$. Обозначим $x=\frac{u}{w}$, $y=\frac{v}{w}$, $P=q(y-x)$, $Q=1-p(y+x)+xy$, $R=1-2py+y^2$.
Тогда

$$f=\frac{Q}{R}\ ,\ g=\frac{P}{R}\ ,\ r_1^2(t)=f^2+g^2=\frac{1-2px+x^2}{1-2py+y^2}\,.$$

Покажем теперь, что функция $\Phi_m(t)$ на промежутке $(\pi,t^*]$ возрастает. Найдем производную этой функции. Имеем:

$$\Phi_m'(t)= 2\frac{p}{q}\left(\operatorname{arctg}\frac{P}{Q}\right)'-\left(\ln\frac{P^2+Q^2}{R^2}\right)'=$$

$$=\left[yy'(1-2px+x^2)-xx'(1-2py+y^2)\right]\frac{2}{P^2+Q^2}\,.$$

Так как $x'=-\frac{y}{w}e^{-\frac{a}{b}t}$, $y'=-\frac{x}{w}e^{\frac{a}{b}t}$, то

$$\Phi_m' = \frac{2xy}{w(P^2+Q^2)}\left[(1-2py+y^2)e^{-\frac{a}{b}t}-(1-2px+x^2)e^{\frac{a}{b}t}\right]. \qquad (26)$$

Далее, если выражение в квадратных скобках в последнем равенстве обозначить $\psi(t)$, то легко найдем

$$\psi'(t)=-\frac{a}{b}\left[(1-2py+y^2)e^{-\frac{a}{b}t}+(1-2px+x^2)e^{\frac{a}{b}t}\right]-\frac{2p}{w}(y-x)<0$$

в силу того, что $p<0$, $w<0$, $y>0$, $x<0$.

Таким образом, $\psi(t)$ убывает при $t\in(\pi,t^*]$.

Заметим теперь, что

$$\psi(t^*)=(1-2py+y^2)\big|_{t=t^*}\cdot e^{-\gamma t^*}-e^{\gamma t^*},$$

так как $x(t^*)=u(t^*)=0$. Из равенства $u(t^*)=0$ имеем $w(t^*)=-\sin t^*=-be^{-\gamma t^*}\sqrt{e^{2\gamma t^*}-b^2}+a$ и $v(t^*)=2aw(t^*)-be^{-\gamma t^*}(e^{2\gamma t^*}-1)$. Отсюда $z=y(t^*)=\frac{v}{w}\big|_{t=t^*}=\sqrt{e^{2\gamma t^*}-b^2}+a$, и, следовательно,

$$z^2-2pz+1>z^2+1>e^{2\gamma t^*}-b^2+a^2+1>e^{2\gamma t^*}. \tag{27}$$

Это означает, что $\psi(t^*)>0$ и, следовательно, $\psi(t)>0$ при всех $t\in(\pi,t^*]$. Отсюда $\varphi'_m>0$ при $t\in(\pi,t^*]$, что и требовалось.

Таким образом, $\varphi_m(t)$ возрастает при $t\in(\pi,t^*]$. Отсюда и из предыдущего вытекает, что для существования предельного цикла необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi_m(t^*)>0 \qquad (\text{т.е. } G_m(t^*)>0).$$

Найдем условия, при которых эти неравенства выполняются. Обозначим для краткости $\xi=\frac{a}{b}$, $\eta=\frac{|p|}{q}$ и рассмотрим функцию $\tilde{\Phi}_m(\xi,\eta)=-\varphi_m(t^*)$. Так как $f(t^*)>0$, то в силу (24) условие существования предельного цикла примет вид:

$$\tilde{\Phi}_m(\xi,\eta)\equiv 2\frac{|p|}{q}\left[(2m-2)\pi+\operatorname{arctg}\frac{qz}{1-pz}\right]-\ln(z^2-2pz+1)<0. \tag{28}$$

Из (23) следует, что $\tilde{\Phi}_1(\xi,\eta)$ определена в углу Ω_1 : $0<\xi<\eta$, а $\tilde{\Phi}_m(\xi,\eta)$, $m\geq 2$, - в углу Ω_m : $(2m-3)\eta\leq\xi<(2m-1)\eta$.

Покажем, что $\tilde{\Phi}_1(\xi,\eta)<0$ во всем углу Ω_1. Для этого доопределим ее по непрерывности на полуось $\xi=0$, $\eta>0$, положив $\tilde{\Phi}_1(0,\eta)=0$ (так как $z=0$ при $\xi=0$), и заметим, что $\frac{\partial\tilde{\Phi}_1}{\partial z}=-\frac{2z}{z^2-2pz+1}<0$. Отсюда следует, что $\tilde{\Phi}_1(\xi,\eta)<0$ при любом $z>0$. Так как, кроме того, $z>0$ при $\xi>0$, то вместе с предыдущим это означает, что $\tilde{\Phi}_1(\xi,\eta)<0$ при любом $\xi>0$.

К сожалению, функции $\tilde{\Phi}_m(\xi,\eta)$, $m\geq 2$, не всюду отрицательны в углах Ω_m. Так, например, на луче $\xi=\eta$ функция

$$\tilde{\Phi}_2(\xi,\eta)=4\pi\eta+2\eta\operatorname{arctg}\frac{qz}{1-pz}-\ln(z^2-2pz+1)>$$
$$>4\pi\eta-2\ln(z+1)>2\left[2\pi\eta-\ln\left(e^{\eta\left(\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\eta}\right)}+2\right)\right]$$

так как $z<e^{\xi t^*}+1$ и $t^*<\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\xi}$. Разность справа при больших η, очевидно, положительна.

Тем не менее в каждом углу Ω_m существует область $\tilde{\Omega}_m$, в которой $\tilde{\Phi}_m(\xi,\eta)<0$. В самом деле, так как (в силу (27)) $z^2-2pz+1>e^{2\xi t^*}$ и $t^*>\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{\xi}$, то при $m\geq 2$ имеем:

$$\frac{1}{2}\tilde{\Phi}_m(\xi,\eta)<\tilde{\tilde{\Phi}}_m(\xi,\eta)=\eta\operatorname{arctg}\frac{1}{\eta}-\xi\operatorname{arctg}\frac{1}{\xi}+\left[(2m-2)\eta-\xi\right]\pi.$$

Отсюда следует, что область $\tilde{\Omega}_m$ включает в себя область, ограниченную сверху возрастающей кривой $\tilde{\Phi}_m(\xi,\eta)=0$, проходящей через начало и имеющей асимптоту $(2m-2)\eta=\xi$, а снизу - лучом $\xi=(2m-1)\eta$ (ось 0ξ горизонтальна). Легко видеть, что $\tilde{\Omega}_m$, $m\geq 2$, содержит угол $(2m-2)\eta \leq$
$\leq \xi < (2m-1)\eta$.

Таким образом, для любой пары ξ,η (т.е. для любой пары $\frac{a}{b}$, $\frac{|p|}{q}$, $p<0$) из объединения $\Omega=\bigcup_{m=1}^{\infty}\tilde{\Omega}_m$, $(\Omega_1=\tilde{\Omega}_1)$ соответствующее $G_m(t^*)>0$, и, следовательно, для этой пары существует предельный цикл. Заметим еще, что Ω содержит область $\Omega^*=\{(\xi,\eta)\,|\,\xi>0,\ \eta\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\eta}-\xi\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\xi}+\pi\eta<0\}$, ограниченную снизу осью 0ξ, а сверху - выпуклой вверх кривой, проходящей через начало и имеющей горизонтальную асимптоту на высоте η^*, где
$\mathrm{arctg}\frac{1}{\eta^*}+\pi=\frac{1}{\eta^*}$.

Сильно огрубляя, можем утверждать, что система (7), матрицы компонент которой имеют собственные числа $\lambda_{1,2}=a\pm bi$ $(a,b>0)$ и $\mu_{1,2}=p\pm qi$ $(q>0,p<0)$, $|\lambda_k|=|\mu_k|=1$, обладает предельным циклом, если пара $\frac{a}{b}$, $\frac{|p|}{q}$ удовлетворяет одному из неравенств:

$$2m-2\leq \frac{a}{b}\frac{q}{|p|}<2m-1\,, \qquad m=1,2,\dots, \tag{29}$$

или наконец

$$\frac{|p|}{q}\,\mathrm{arctg}\frac{q}{|p|}-\frac{a}{b}\,\mathrm{arctg}\frac{b}{a}+\pi\frac{|p|}{q}<0\,. \tag{29'}$$

3.2. Пусть теперь μ_1,μ_2 действительны и одного знака. Из леммы 3 следует, что $\mu_1<0$ и $\mu_2<0$. Пусть для определенности $0>\mu_1>\mu_2$. Равенства (22) в этом случае действительны и определяют две кривые:

$$\Gamma_1=\left\{(\zeta_1,\zeta_2)\,\Big|\,\zeta_k=\frac{w-\mu_k u}{w-\mu_k v}\,,\ k=1,2\,,\ t\in[\pi,t^*]\right\},$$
$$\Gamma_2=\left\{(\zeta_1,\zeta_2)\,\Big|\,\zeta_k=e^{\mu_k t_2}\,,\ k=1,2,\ t_2\geq 0\right\}.$$

Кривая Γ_2 непрерывна, выпукла вниз и расположена в единичном квадрате. Кривая Γ_1 при $t=\pi$ начинается в точке $(-e^{-\frac{a}{b}\pi},-e^{-\frac{q}{b}\pi})$. Так как $w-\mu_k v<0$ при всех $t\in[\pi,t^*]$, то кривая Γ_1 непрерывна. Она может пересечься с кривой Γ_2 (и мы при этом получим цикл) только в положительном квадранте. Поэтому мы будем рассматривать ее только при тех $t\in[\pi,t^*]$, для которых и $w-\mu_k u<0$. Поскольку $\zeta_k(t^*)=\frac{1}{1-\mu_k z}>0$, то такие t найдутся. Так как, кроме того, при $\zeta_k>0$ имеем $\zeta_k<1$ и

$$\zeta_k'=\frac{\mu_k}{(1-\mu_k y)^2 w}\left[y(1-\mu_k y)e^{-\frac{q}{b}t}-x(1-\mu_k x)e^{\frac{q}{b}t}\right]>0,$$

то кривая Γ_1, войдя в единичный квадрат при некотором t^0, не выходит из него при всех $t\in[t^0,t^*]$.

Далее заметим, что если $\zeta_2(t^0)=0$, т.е. $w(t^0)-\mu_2 u(t^0)=0$, то

$$\zeta_1(t^\circ) = \frac{(\mu_2-\mu_1)u(t_0)}{w(t_0)-\mu_1 v(t_0)} > 0$$, т.е. кривая Γ_1 входит в единичный квадрат снизу. Отсюда следует, что Γ_1 и Γ_2 пересекутся, если при некотором $\tilde{t} \in (t^\circ, t^*]$ имеет место неравенство

$$\zeta_2 = \frac{w-\mu_2 u}{w-\mu_2 v} > \left(\frac{w-\mu_1 u}{w-\mu_1 v}\right)^{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \zeta_1^{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \ , \tag{30}$$

Рассмотрим функцию

$$G(t) = \mu_1 \ln\frac{1-\mu_2 x}{1-\mu_2 y} - \mu_2 \ln\frac{1-\mu_1 x}{1-\mu_1 y} \ . \tag{31}$$

Очевидно, что неравенство (30) эквивалентно неравенству $G(\tilde{t})<0$. Дифференцируя $G(t)$, получим

$$G'(t) = \frac{\mu_1\mu_2(\mu_1-\mu_2)\,xy\,\psi(t)}{w(1-\mu_2 x)(1-\mu_1 x)(1-\mu_2 y)(1-\mu_1 y)} , \tag{32}$$

где

$$\psi(t) = e^{\frac{a}{b}t}(1-\mu_2 x)(1-\mu_1 x) - e^{-\frac{a}{b}t}(1-\mu_1 y)(1-\mu_2 y). \tag{33}$$

Имеем

$$\psi'(t) = \frac{a}{b}\left[e^{\frac{a}{b}t}(1-\mu_2 x)(1-\mu_1 x) + e^{-\frac{a}{b}t}(1-\mu_1 y)(1-\mu_2 y)\right] + \frac{\mu_1+\mu_2}{w}(y-x) > 0. \tag{34}$$

Таким образом, $\psi(t)$ растет после t° . При $t=t^*$, как и ранее, имеем $x(t^*)=0$ и, следовательно,

$$\psi(t^*) = e^{\frac{a}{b}t^*} - e^{-\frac{a}{b}t^*}(1-\mu_1 z)(1-\mu_2 z) < e^{-\frac{a}{b}t^*}\left[e^{2\frac{a}{b}t^*} - (z^2+1)\right] < 0$$

в силу (27). Отсюда следует, что $\psi(t)<0$ при всех $t \in (t^\circ, t^*]$. Это вместе с (32) означает, что $G'(t) < 0$ при $t \in (t^\circ, t^*]$ и, следовательно, $G(t)$ убывает. Таким образом, необходимым и достаточным условием существования цикла в рассматриваемом случае является неравенство

$$G(t^*) < 0,$$

т.е. неравенство

$$\tilde{G}(z) \equiv \mu_2 \ln(1-\mu_1 z) - \mu_1 \ln(1-\mu_2 z) < 0.$$

Но $\tilde{G}(0) = 0$ и

$$\tilde{G}'(z) = \frac{\mu_1\mu_2(\mu_2-\mu_1)z}{(1-\mu_1 z)(1-\mu_2 z)} < 0 \ . \tag{35}$$

Отсюда и из того факта, что $z>0$ при любом $a>0$, следует, что $G(t^*)<0.$

Таким образом, система (7), одна из матриц компонент которой имеет комплексные собственные числа с положительной вещественной частью, а другая - действительные и отрицательные, обладает предельным циклом.

3.3. Рассмотрим наконец случай, когда μ_1, μ_2 разных знаков. Пусть для определенности $\mu_2 < 0 < \mu_1$, в силу леммы 3 $\mu_1+\mu_2 < 0$ и, как всегда, $|\mu_1 \cdot \mu_2| = 1$. Рассмотрим кривые

$$\Gamma_1 = \left\{(\zeta_1, \zeta_2) \,\middle|\, \zeta_1 = \frac{w-\mu_1 v}{w-\mu_1 u}, \ \ \zeta_2 = \frac{w-\mu_2 u}{w-\mu_2 v}\right\}, \ t \in [\pi, t^*],$$

$$\Gamma_2=\{(\zeta_1,\zeta_2)\mid\zeta_1=e^{-\mu_1 t_2},\ \zeta_2=e^{\mu_2 t_2}\},\ t_2\geq 0.$$

Как и ранее, Γ_1, Γ_2 непрерывны и после некоторого t^0 при $w-\mu_1 v<0$, $w-\mu_2 u<0$ они расположены в единичном квадрате. Рассмотрим функции $G(t)$ и $\Psi(t)$, определенные формулами (31), (33), но с условием $\mu_1>0$, $\mu_2<0$. Тогда если Γ_1 при $t=t^0$ входит в единичный квадрат слева, т.е. выше Γ_2, то для пересечения кривых Γ_1 и Γ_2 необходимо и достаточно, чтобы $G(\tilde t)<0$ при некотором $\tilde t>t^0$. При этом $\zeta_1(t^0)=0$ и $\zeta_2(t^0)>0$, следовательно, $\Psi(t^0)>0$. А так как по-прежнему $\Psi'(t)>0$, то $\Psi(t)>0$ при всех $t>t^0$. Отсюда следует, что $G'(t)<0$, т.е. $G(t)$ убывает после t^0, и, следовательно, в качестве $\tilde t$ можно взять t^*. Однако в данном случае $G(t^*)>0$, так как $\tilde G(0)=0$, а $\tilde G'(z)>0$.

Из сказанного следует, что для существования предельного цикла необходимо, чтобы кривая Γ_1 при некотором $\tilde t$ входила в единичный квадрат снизу. Это условие является и достаточным, так как $G(t^*)>0$, т.е., войдя в квадрат снизу, Γ_1 пересечет Γ_2. В силу того, что $\Psi'(t)>0$, функция $G'(t)$ не более одного раза обращается в нуль и, следовательно, пересечение Γ_1, Γ_2 однократно. Таким образом, для существования предельного цикла необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\tilde t\in(\pi, t^*]$, для которого $w-\mu_2 u=0$ (т.е. $\zeta_2(\tilde t)=0$), имело место неравенство $w-\mu_1 v<0$ (т.е. $\zeta_1(\tilde t)>0$), другими словами, для $\tilde t$, удовлетворяющего равенству

$$(\mu_1+a)\sin\tilde t-b\cos\tilde t+be^{-\frac{a}{b}\tilde t}=0, \tag{36}$$

выполнялось неравенство

$$\left(\frac{1}{\mu_1}-\mu_1-2a\right)\sin\tilde t+b\left(e^{\frac{a}{b}\tilde t}-e^{-\frac{a}{b}\tilde t}\right)<0. \tag{37}$$

Это условие можно заменить более грубым достаточным условием. Из (36) имеем

$$\sin\tilde t=-\frac{be^{-\frac{a}{b}\tilde t}}{(\mu_1+a)^2+b^2}\left[\sqrt{(\mu_1^2+2a\mu_1+1)e^{2\frac{a}{b}\tilde t}-b^2}+(\mu_1+a)\right].$$

Подставляя это в (37) и учитывая, что $\tilde t<t^*<\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, находим, что условия (36), (37) будут выполнены, если, например,

$$\frac{\mu_1^2+2a\mu_1-1}{\mu_1^2+2a\mu_1+1}\left(1+\frac{a}{\mu_1}\right)+e^{\frac{a}{b}\left(\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)}-1<0. \tag{38}$$

Последнее неравенство, очевидно, выполняется при любых $a, b>0$, если μ_1 взять достаточно малым. Его можно заменить еще более грубым достаточным условием, учитывая, например, что $\frac{\mu_1+a}{\mu_1^2+2a\mu_1+1}\geq\min\left(a,\frac{1}{2}\right)$ при $1>\mu_1, a>0$.

4. Резюмируем все вышесказанное относительно существования предельного цикла.

Т е о р е м а. Для существования предельного цикла у двухкомпонентной кусочно-аффинной системы на плоскости необходимо, чтобы точка покоя одной из компонент являлась точкой покоя системы и не лежала на границе областей; матрица этой компоненты имела комплексные собственные числа и знак их действительной части был противоположен знаку суммы отличных от нуля и различных собственных чисел матрицы другой компоненты. Если собственные числа матрицы другой компоненты действительны и одного знака, то это условие является и достаточным. В противном случае необходимое и достаточное условие существования предельного цикла состоит в выполнении некоторого трансцендентного неравенства относительно собственных чисел: неравенства (28), если собственные числа матрицы другой компоненты комплексны, и (37), если эти числа действительны и разных знаков.

Необходимые и достаточные условия можно заменить более грубыми достаточными. Такими условиями являются неравенства (29), ($29'$) или соответственно неравенство (38).

Из сформулированной теоремы следует возможность построения многокомпонентной кусочно-аффинной непрерывной системы со многими предельными циклами, лежащими один вне другого. В самом деле, в том случае, когда собственные числа μ_k действительны и разных знаков, соответствующая компонента имеет седло, лежащее в U_2. Если при этом выполняется условие (37) или (38), то одна из ветвей гиперболы этого седла, сшиваясь с куском спирали первой компоненты, образует предельный цикл. Оставшиеся три угла, образованные сепаратрисами седла, можно взять за исходные компоненты и подстраивать к ним новые компоненты с комплексными собственными числами так, чтобы для этих новых чисел снова выполнялось условие (37) или (38). Так можно получить еще три предельных цикла.

Далее любую из компонент с комплексными собственными числами можно достроить новой компонентой с действительными собственными числами разных знаков, отодвинув границу достаточно далеко, чтобы не задеть построенных циклов. (В условие существования цикла параметры границы не входят.) После этого полученные сёдла можно использовать для построения новых предельных циклов.

Литература

1. Гильдерман Ю.И. О предельных циклах кусочно-аффинных систем. - "Докл. АН СССР", 1976, т.230, № 3, с.512-515.
2. Гильдерман Ю.И. О динамических системах, линейных в конусах. - "Сиб. мат. журн.", 1974, т.15, № 5, с.1021-1035.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959, 915 с.
4. Андронов А.А., Леонтович Б.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., "Наука", 1966, 568 с.