УДК 517.946

ТЕОРЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В.П.Глушко (Воронеж)

Изучение коэрцитивной разрешимости общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений в пространствах С.Л.Соболева с весом было начато в работах [1] - для уравнений второго порядка и [2] - для уравнений высокого порядка. Метод, примененный в [2], позволяет исследовать лишь так называемые степенные вырождения. В настоящей работе изучается один класс вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольно "сильном" характере вырождения. Кроме того, в работе установлены условия нётеровости краевых задач для операторов с переменными коэффициентами и в том случае, когда рассматриваемая область и ее граница некомпактны. Как и в ряде других исследований (см. [3] - [5] и др.) это удается сделать, потребовав "стабилизацию на бесконечности" операторов, порожденных краевыми задачами, к обратимым операторам. Отметим, что примененная в работе методика, основанная на коэрцитивных априорных оценках, позволяет установить аналогичные утверждения не только для простейшей неограниченной области - полосы в евклидовом пространстве E_n, как это сделано здесь, но и для других неограниченных областей в E_n с гладкой некомпактной границей вырождения.

Мы приводим здесь доказательство разрешимости или нётеровости краевых задач, существенно опирающееся на априорные коэрцитивные оценки решений этих краевых задач. Доказательство этих оценок мы надеемся привести в другой нашей работе.

1. Основные определения и результаты. В полосе $E_n^d: 0<t<d$, $x\in E_{n-1}$ рассматривается дифференциальный оператор

$$A(x,t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)=L_{2m}(x,t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})+b(x,t)\partial_t,$$

где

$$L_{2m}(x,t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})=\sum_{|\tau|+j\le 2m}a_{\tau j}(x,t)\mathcal{D}_x^{\tau}\mathcal{D}_{\alpha,t}^{j};$$

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t} \ ; \quad \mathcal{D}_{\alpha,t} = (-1)^{1/2} \sqrt{\alpha(t)}\,\partial_t \sqrt{\alpha(t)} \ ;$$

$$\mathcal{D}_x^{\tau} = (-1)^{|\tau|/2} \partial_{x_1}^{\tau_1} \partial_{x_2}^{\tau_2} \ldots \partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}, \quad \tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}), \ |\tau| = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{n-1},$$

коэффициенты $a_{\tau j}(x,t), b(x,t)$ - комплекснозначные достаточно гладкие в $\bar{E}_n^d$ функции (x,t) ; функция $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$; $\alpha(+0) = \partial_t \alpha(+0) = 0$ – достаточно гладкая функция $t \in [0,d]$.

На границе $t=0$ полосы E_n^d задан граничный оператор вида

$$B(x, \mathcal{D}_x, \partial_t) = \sum_{i=0}^{\tau} \Lambda_i (x, \mathcal{D}_x) \partial_t^i ,$$

где

$$\Lambda_i (x, \mathcal{D}_x) = \sum_{|\tau| \le m^* - 2mi} \ell_{\tau i}(x) \mathcal{D}_x^{\tau} \quad (0 \le i \le \tau),$$

комплекснозначные коэффициенты которого $\ell_{\tau i}(x)$ имеют достаточную гладкость в E_{n-1} . Число m^* называется обобщенным порядком оператора B , если хотя бы один из коэффициентов $\ell_{\tau i}(x)$ для $|\tau| + 2mi = m^*$ отличен от нуля.

Через $\overset{0}{L}_{2m}$, $\overset{0}{\Lambda}_i$ и $\overset{0}{B} = \sum_{i=0}^{\tau} \overset{0}{\Lambda}_i \partial_t^i$ обозначаются главные части операторов L_{2m} , Λ_i и B соответственно.

Условие 1. При любых $(x,t) \in \bar{E}_n^d$; $(\xi, \eta) \in E_n$

$$Re\, \bar{b}(x,0) \overset{0}{L}_{2m} (x,t,\xi,\eta) \ge c_{1,1} (|\xi|^2 + \eta^2)^m,$$

причем постоянная $c_{1,1} > 0$ не зависит от (x,t) и (ξ, η).

Условие 2. При любых $(x,t) \in \bar{E}_n^d$

$$\Im m\, \bar{b}(x,t) a_{02m}(x,t) = 0.$$

Условие 3. Для некоторого целого $s \ge 2m + m^*$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$; коэффициенты операторов $A(x,t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha t},\partial_t)$ и $B(x,\mathcal{D}_x,\partial_t)$ принадлежат соответственно $C^{2[\frac{s}{2}]+2-2m}(\bar{E}_n^d)$ и $C^{2[\frac{s}{2}]+2-m^*-m}(E_{n-1})$, причем существуют такие постоянные $c_{1,2} > 0$ и $c_{1,3} > 0$, что

$$|\mathcal{D}_x^{\tau'} \partial_t^{j'} a_{\tau j}(x,t)| + |\mathcal{D}_x^{\tau'} \partial_t^{j'} b(x,t)| \le c_{1,2} ;$$

$$|\mathcal{D}_x^{\tau''} \ell_{\beta i}(x)| \le c_{1,3}$$

при любых $(x,t) \in E_n^d$; $|\tau| + j \le 2m$; $|\tau'| + j' \le 2\left[\frac{s}{2}\right] + 2 - 2m$; $|\beta| + 2mi \le m^*$; $|\tau''| \le 2\left[\frac{s}{2}\right] + 2 - m^* - m$.

Условие 4. При всех $(x,t) \in \bar{E}_n^d$ и $\xi \in E_{n-1}$, $|\xi| \ne 0$ однородный многочлен по ξ степени m^*

$$\vartheta^0 (x,t,\xi) = \sum_{i=0}^{\tau} \overset{0}{\Lambda}_i (x,\xi) \left(b^{-1}(x,t) \overset{0}{L}_{2m} (x,t,\xi,0) \right)^i$$

не обращается в нуль, и справедлива оценка

$$|\vartheta^0(x,t,\xi)|^2 \geq c_{1,4}|\xi|^{2m^*}$$

с постоянной $c_{1,4} > 0$, не зависящей от x,t и ξ.

Условие 5. При всех $t \in [0,d]$ существуют пределы

$$\lim_{|x|\to\infty} a_{\tau j}(x,t) = a_{\tau j}(t) \quad (|\tau|+j \leq 2m);$$

$$\lim_{|x|\to\infty} b(x,t) = b(t); \quad \lim_{|x|\to\infty} \ell_{\beta i}(x) = \ell_{\beta i} \quad (|\beta|+2mi \leq m^*).$$

Условие 5 позволяет рассмотреть операторы $A_\infty, L_{2m}^\infty, B_\infty$, которые получаются из операторов A, L_{2m}, B соответственно с помощью предельного перехода $|x| \longrightarrow \infty$:

$$L_{2m}^\infty(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t}) = L_{2m}(\infty,t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t});$$

$$A_\infty(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t) = L_{2m}^\infty(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t}) + b(t)\partial_t;$$

$$B_\infty(\mathcal{D}_x,\partial_t) = B(\infty,\mathcal{D}_x,\partial_t).$$

Следующие два условия аналогичны условиям 1 и 4, однако они относятся уже к операторам L_{2m}^∞ и B_∞.

Условие 6. При любых $(\xi,\eta) \in E_n$

$$\mathrm{Re}\,\overline{b(0)}\,L_{2m}^\infty(0,\xi,\eta) \geq c_{1,6}\,(1+|\xi|^2+\eta^2)^m,$$

где постоянная $c_{1,6} > 0$ не зависит от ξ, η.

Для того чтобы сформулировать условие на $B_\infty(\mathcal{D}_x,\partial_t)$, аналогичное условию 4, введем некоторые новые обозначения:

$$\gamma(t) = \alpha^{\frac{2m}{2m-1}}(t);$$

$$b_{2m-\sigma}(t,\xi) = \sum_{j=\sigma}^{2m}\sum_{|\tau|\leq 2m-j}(-1)^{\frac{j-2m}{2}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^\tau \psi_{j,\sigma}(t)\alpha^{\frac{2m-\sigma}{2m-1}}(t) \tag{1.1}$$

для $2 \leq \sigma \leq 2m-1$;

$$b_{2m-1}(t,\xi) = \sum_{j=1}^{2m}\sum_{|\tau|\leq 2m-j}(-1)^{\frac{j-2m}{2}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^\tau \psi_{j,1}(t)\alpha(t) + \frac{(-1)^m b(t)}{a_{02m}}; \tag{1.2}$$

$$b_{2m}(t,\xi) = \sum_{j=0}^{2m}\sum_{|\tau|\leq 2m-j}(-1)^{\frac{j-2m}{2}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^\tau \psi_{j,0}(t). \tag{1.3}$$

Функции $\psi_{j,\sigma}(t)$ $(j \geq \sigma \geq 0)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений:

$$\psi_{j,j}(t) \equiv 1; \quad \psi_{j+1,0}(t) = \alpha(t)\partial_t\psi_{j,0}(t) + \frac{1}{2}\alpha'(t)\psi_{j,0}(t);$$

$$\psi_{j+1,\sigma}(t) = \alpha(t)\partial_t \psi_{j,\sigma}(t) + \psi_{j,\sigma-1}(t) + (\sigma+\tfrac{1}{2})\alpha'(t)\psi_{j,\sigma}(t), \quad 1 \le \sigma \le j-1; \tag{1.4}$$

$$\psi_{j+1,j}(t) = \psi_{j,j-1}(t) + (j+\tfrac{1}{2})\alpha'(t).$$

Обозначим также

$$\sigma_{0,j} = \frac{1}{j!}\partial_t^{j+2} \gamma(+0);$$

$$\sigma_{1,j}(\xi) = \frac{1}{j!}\left(\partial_t^{j+1} b_1(+0,\xi) - (-1)^m \frac{2m-2}{a_{02m}}\partial_t \gamma(+0)\right);$$

$$\sigma_{\mu,j}(\xi) = \frac{1}{j!}\partial_t^{j+1} b_\mu(+0,\xi), \quad 2 \le \mu \le 2m-1; \tag{1.5}$$

$$\sigma_{2m,j}(\xi) = \frac{1}{j!}\partial_t^{j} b_{2m}(+0,\xi).$$

Кроме того, в дальнейшем используются числа $T_{s,j}^{\kappa,2m-1}$ $(1 \le \kappa \le 2m-2,$ $0 \le j \le s-1)$, которые могут быть найдены из рекуррентных соотношений:

$$T_{s,j}^{\kappa,\kappa'+1} = \sum_{j'=j+1}^{s-\kappa'+\kappa} T_{s,j'}^{\kappa,\kappa'} T_{j',j}^{\kappa,\kappa'+1} \qquad (\kappa' > \kappa),$$

если задать числа $T_{s,j}^{\kappa,\kappa+1}$ формулой

$$T_{s,j}^{\kappa,\kappa+1} = \sum_{i=1}^{j+1} \frac{(s-i)!\,(i+1+2m+\kappa)}{(s-j-1)!\,(j+1-i)!}\,\partial_t^{s-j+1}\gamma(+0)$$

для $1 \le \kappa \le 2m-2$, $s \ge 1$, $0 \le j \le s-1$. Будем полагать $T_{s,j}^{\kappa,\kappa'} = 0$, если $j \le 0$.

Введем в рассмотрение многочлены $Q_\nu(\xi)$ $(0 \le \nu \le s-1)$ по $\xi \in E_{n-1}$ с помощью следующих формул:

$$Q_{s-1}(\xi) = s\sigma_{2m-1,0}(\xi);$$

$$Q_\nu(\xi) = \sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{(s-i)!}{(\nu+1-i)}\,\sigma_{2m-1,s-1-\nu}(\xi) +$$

$$+ \sum_{j=s-2m-\nu+2}^{s-2-\nu} \sum_{\mu=\nu-s+2m+j}^{2m-2} \sum_{i=1}^{s-j} \frac{(s-i)!}{(s-i-j)!}\,T_{s-j-1,\nu}^{\mu,2m-1}\,\sigma_{\mu,j}(\xi)$$

для $s-2m+2 \le \nu \le s-2$;

$$Q_\nu(\xi) = \sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{(s-i)!}{(\nu+1-i)!}\,\sigma_{2m-1,s-1-\nu}(\xi) +$$

$$+ \sum_{j=s-2m-\nu+2}^{s-2-\nu} \sum_{\mu=\nu-s+2m+j}^{2m-2} \sum_{i=1}^{s-j} T_{s-j-1,\nu}^{\mu,2m-1}\,\sigma_{\mu,j}(\xi)\frac{(s-i)!}{(s-i-j)!} +$$

$$+\sum_{j=0}^{s-2m-\nu+1}\sum_{\mu=1}^{2m-2}\sum_{i=1}^{s-j}\frac{(s-i)!}{(s-i-j)!}T^{\mu,2m-1}_{s-j-1,\nu}\,\sigma_{\mu,j}(\xi)+$$

$$+\sum_{j=0}^{s-2m-\nu+1}\sum_{i=1}^{s-j}\frac{(s-i)!\,(i-1)}{(s-i-j)!}T^{1,2m-1}_{s-j-1,\nu}\,\sigma_{0,j}$$

для $0\leq\nu\leq s-2m-1$. Заметим, что, по построению, степень каждого многочлена $Q_\nu(\xi)$ не превосходит $2m-1$. Наконец, определим многочлены $Z_s(\xi)$ по $\xi\in E_{n-1}$ с помощью равенств

$$Z_{s+1}(\xi)=\sigma^{s+1}_{2m,0}(\xi)+R_s(\xi),\quad s\geq 0;\ Z_0(\xi)=1,$$

где многочлены $R_s(\xi)$, $s\geq 0$, имеют степень, не превышающую $2ms+2m-1$, и определяются из рекуррентных соотношений

$$R_s(\xi)=\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{s!}{\nu!}\sigma_{2m,s-\nu}(\xi)\left(\sigma^{\nu}_{2m,0}(\xi)+R_\nu(\xi)\right)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{s}Q_\nu(\xi)\left(\sigma^{\nu}_{2m,0}(\xi)+R_{\nu-1}(\xi)\right),\ s\geq 1;\quad R_s(\xi)=0,\ s\leq 0. \qquad (1.6)$$

Теперь мы можем сформулировать

У с л о в и е 7. При всех $\xi\in E_{n-1}$ многочлен

$$\vartheta(\xi)=\sum_{i=0}^{\tau}\Lambda_i(\xi)Z_i(\xi) \qquad (1.7)$$

не обращается в нуль. Если порядок оператора $B_\infty(\mathcal{D}_x,\partial_t)$ равен m^*, то условие 7 означает, что степень многочлена $\vartheta(\xi)$ равна m^* и при всех $\xi\in E_{n-1}$ справедлива оценка

$$|\vartheta(\xi)|^2\geq c_{1,7}\left(1+|\xi|^2\right)^{m^*}.$$

Введем функциональные пространства, в которых будут изучаться граничные задачи, порожденные операторами A, B (A_∞, B_∞).

О п р е д е л е н и е 1.1. Пространство $H_{s,\alpha,K}$ ($s\geq 0$ и K - целые числа) состоит из всех функций $v(x,t)$, имеющих в E^d_n обобщенные производные до порядка s, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,K}=\left\{\sum_{|\tau|+j+2m\ell\leq s}\int_{E^d_n}\left(1+|x|^2\right)^K\left|\mathcal{D}^\tau_x\mathcal{D}^j_{\alpha,t}\partial^\ell_t v(x,t)\right|^2dx\,dt\right\}^{1/2}.$$

Можно показать (см. [6]), что в пространстве $H_{s,\alpha,K}$ плотно множество функций $v(x,t)$, принадлежащих $C^\infty(\bar{E}^d_n)$ и финитных по x.

Определение 1.2. Пространство $H'_{s,\kappa}$ ($s>0$ и κ - целые числа) состоит из всех функций $g(x)\in\mathcal{L}_2(E_{n-1})$, имеющих в E^d_{n-1} обобщенные производные до порядка s, с конечной нормой

$$|g|'_{s,\kappa}=\left\{\sum_{|\tau|\le s}\int_{E_{n-1}}\left(1+|x|^2\right)^{\kappa}|\mathcal{D}^{\tau}_x g(x)|^2dx\right\}^{1/2}.$$

В п. 2 работы доказывается разрешимость граничной задачи

$$A_\infty(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)v=\mathcal{F}(x,t); \tag{1.8}$$

$$B_\infty(\mathcal{D}_x,\partial_t)v\big|_{t=+0}=\mathcal{G}(x); \tag{1.9}$$

$$v\big|_{t=d}=\partial_t v\big|_{t=d}=\ldots=\partial_t^{m-1}v\big|_{t=d}=0, \tag{1.10}$$

а также граничной задачи (1.9)-(1.10) для уравнения

$$A_\infty(+0,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)v=\mathcal{F}(x,t). \tag{1.11}$$

Теорема 1.1. Пусть k и $s\ge 2m+m^*$ - целые числа, $\mathcal{F}(x,t)\in H_{s-2m,\alpha,\kappa}$, $\mathcal{G}(x)\in H'_{s-m^*-m,\kappa}$. Если выполнены условия 2,5,6,7, то существует единственное решение $v(x,t)\in H_{s,\alpha,k}$ задачи (1.11),(1.9),(1.10). Если, кроме того, выполнено условие 3 и $d\le d_0$, причем d_0 зависит лишь от постоянных $C_{1,2},C_{1,3},C_{1,6},C_{1,7}$ в условиях 2-7, то однозначно разрешима в $H_{s,\alpha,\kappa}$ и задача (1.8)-(1.10).

В п.3 работы рассмотрена граничная задача

$$A(x,t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)v=\mathcal{F}(x,t); \tag{1.12}$$

$$B(x,\mathcal{D}_x,\partial_t)v\big|_{t=+0}=\mathcal{G}(x) \tag{1.13}$$

с условием (1.10) при $t=d$. Операторы $A(x,t)$ и $B(x)$ в силу условия 5 "стабилизируются" при $|x|\to\infty$ к операторам $A_\infty(t)$, B_∞ соответственно. В дополнение к условиям 3 и 5 потребуем выполнения следующего условия.

Условие 8. Для целого s, определенного в условии 3, коэффициенты операторов $A(x,t)$, $B(x)$, $A_\infty(t)$, B_∞ удовлетворяют условиям

$$\limsup_{|x|\to\infty}\Big(\max_{0\le t\le d}\left|\mathcal{D}^{\tau'}_x\mathcal{D}^{j'}_{\alpha,t}\partial^{\ell'}_t(a_{\tau j}(x,t)-a_{\tau j}(t))\right|+$$
$$+\max_{0\le t\le d}\left|\mathcal{D}^{\tau'}_x\mathcal{D}^{j'}_{\alpha,t}\partial^{\ell'}_t(b(x,t)-b(t))\right|\Big)=0,$$
$$|\tau'|+j'+2m\ell'\le s-2m,\quad |\tau|+j\le 2m;$$

$$\limsup_{|x|\to\infty}\left|\mathcal{D}^{\tau''}_x(\ell_{\beta i}(x)-\ell_{\beta i})\right|=0,\quad |\tau''|\le s-m^*-m,\ |\beta|+2mi\le m^*.$$

Т е о р е м а 1.2. Пусть k и $s \geqslant 2m+m^*$ - целые числа, выполнены условия 1-8 и $d \leqslant d_0$. Тогда для задачи (1.12), (1.13), (1.10) существует правый (левый) регуляризатор $\mathcal{R}$, т.е. оператор $\mathcal{R}$, определенный на $H_{s-2m,\alpha,\kappa} \otimes H'_{s-m^*-m,\kappa}$ и действующий в $H_{s,\alpha,\kappa}$, такой, что

$$\|\mathcal{R}\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}\|_{s,\alpha,\kappa} \leqslant c_{18}\left(\|\mathcal{F}\|_{s-2m,\alpha,\kappa} + \|\mathcal{G}\|'_{s-m^*-m,\kappa}\right) \qquad (1.14)$$

и функция $V = \mathcal{R}\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}$ удовлетворяет условиям

$$A(x,t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)V = \mathcal{F} + T^0\{\mathcal{F},\mathcal{G}\};$$

$$B(x,\mathcal{D}_x,\partial_t)V\big|_{t=+0} = \mathcal{G} + T'\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}$$

и условию (1.10). При этом оператор $T = \{T^0, T'\}$ - вполне непрерывный оператор в $H_{s-2m,\alpha,\kappa} \otimes H'_{s-m^*-m,\kappa}$. Задача (1.12), (1.13), (1.10) – нётерова.

При доказательстве теоремы 1.2 мы опираемся на априорную оценку решений задачи (1.12), (1.13), (1.10), справедливую при выполнении условий теоремы 1.2. Мы приведем здесь эту оценку без доказательства:

$$\|V\|_{s,\alpha,\kappa} \leqslant c_{1,9}\left(\|A(x,t)V\|_{s-2m,\alpha,\kappa} + \|B(x)V|_{t=0}\|'_{s-m^*-m,\kappa} + \|V\|_{0,\alpha,\kappa-s}\right) \qquad (1.15)$$

где $V(x,t) \in H_{s,\alpha,\kappa}$ удовлетворяет условиям (1.10).

З а м е ч а н и е. Утверждения, аналогичные утверждениям теорем 1.1 и 1.2 справедливы и в том случае, когда условия 1 и 6 выполняются при замене $b(x,t)$ на $-b(x,t)$. В этом случае граничные условия (1.9) и (1.13) при $t=+0$ "снимаются".

2. Доказательство разрешимости задачи (1.8)-(1.10). С помощью преобразования Фурье $F = F_{x\to\xi}$ задачу (1.8)-(1.10) можно записать в виде

$$A_\infty(t,\xi,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)u = f(\xi,t), \quad 0<t<d; \qquad (2.1)$$

$$B_\infty(\xi,\partial_t)u\big|_{t=+0} = g_0(\xi); \qquad (2.2)$$

$$u\big|_{t=d} = \partial_t u\big|_{t=d} = \ldots = \partial_t^{m-1}u\big|_{t=d} = 0, \qquad (2.3)$$

где $u = F[V]$; $f = F[\mathcal{F}]$; $g_0 = F[\mathcal{G}]$.

Следующая лемма позволяет свести граничное условие общего вида (2.2) к граничному условию

$$u\big|_{t=+0} = g(\xi). \qquad (2.4)$$

Л е м м а 2.1. Пусть $\varkappa \geqslant 0$ и функция

$$\gamma(t) \equiv (\alpha(t))^{\frac{2m}{2m-1}} \qquad (2.5)$$

принадлежит $C^{\varkappa+1}[0,d]$; $f(t)$ принадлежит $C^{\varkappa}[0,d]$. Тогда для любого решения u уравнения (2.1), принадлежащего $C^{\varkappa+1}[0,d]$, справедлива формула представления

$$\partial_t^{s+1}u(\xi,+0) = u(\xi,+0)Z_{s+1}(\xi) + d_{1,s}(\xi), \quad 0 \leqslant s \leqslant \varkappa,$$

где многочлены $Z_{s+1}(\xi)$ определены в п.1, а функции $d_{1,s}(\xi)$ находятся с помощью рекуррентных формул

$$d_{1,s}(\xi)=\frac{s!}{b(0)}\partial_t^s f(\xi,+0)+\sum_{\nu=0}^{s-1}\left(\frac{s!}{(\nu+1)!}\sigma_{2m,s-1-\nu}(\xi)+Q_\nu(\xi)\right)d_{1,\nu}(\xi).$$

Многочлены $\sigma_{2m,s-1-\nu}(\xi), Q_\nu(\xi)$ $(0\le\nu\le s-1)$ определены в п.1.

Лемма 2.1 является частным случаем утверждения, доказанного в [7, теорема 5.7, с.170]. Очевидно, что с помощью леммы 2.1 доказательство разрешимости задачи (2.1)-(2.3) эквивалентно доказательству разрешимости задачи (2.1),(2.2),(2.4) с функцией

$$g(\xi)=\vartheta^{-1}(\xi)\Big(g_0(\xi)-\sum_{s=1}^{\tau}\Lambda_s(\xi)d_{1,s-1}(\xi)\Big).$$

С помощью индукции по $j\ge 0$ легко доказывается равенство

$$\mathcal{D}^j_{\alpha,t}=\sum_{\sigma=0}^{j}(-1)^{j/2}\psi_{j,\sigma}(t)\gamma^{\frac{2m-\sigma}{2m}}\gamma^{\sigma-1}\partial_t^\sigma, \tag{2.6}$$

где $\psi_{j,j}(t)\equiv 1$, функции $\psi_{j,\sigma}(t)$ $(0\le\sigma<j)$ могут быть найдены из соотношений (1.4). С помощью (2.6) уравнение (2.1) можно записать в виде

$$L'_{2m}(t,\xi,\partial_t)u\equiv\sum_{\sigma=2}^{2m}b_{2m-\sigma}\gamma^{\sigma-1}\partial_t^\sigma u+b_{2m-1}\partial_t u+b_{2m}u=f(\xi,t), \tag{2.7}$$

где $b_0\equiv 1$, $b_{2m-\sigma}=b_{2m-\sigma}(\xi,t)$ $(0\le\sigma<2m)$ определены в (1.1)-(1.3) (поскольку правая часть (2.7) отличается от правой части (2.1) несущественным для нас множителем, мы сохраним за ней старое обозначение).

Уравнение (2.7) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\gamma(t)\frac{du_1}{dt}+B_{11}(t,\xi)u_1+B_{12}(t,\xi)u=F(t);\\ &\qquad\frac{du}{dt}+B_{22}u+B_{21}u_1=0,\end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$u_1=\begin{bmatrix}w_1(\xi,t)\\ w_2(\xi,t)\\ \vdots\\ w_{2m-1}(\xi,t)\end{bmatrix};\quad B_{11}(t,\xi)=\begin{bmatrix}b_1-(2m-2)\gamma' & b_2 & \dots\ b_{2m-2} & b_{2m-1}\\ -1 & -(2m-3)\gamma' & \dots\ 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix};$$

$$B_{12}(t,\xi)=b_{2m}(t,\xi)e_1;\ F(t)=f(t)e_1;\ B_{22}\equiv 0;\ B_{21}=\{0,0,\dots,0,-1\};$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{aligned} w_1(\xi,t) &= \gamma^{2m-2}\,\partial_t^{2m-1} u; \\ w_2(\xi,t) &= \gamma^{2m-3}\,\partial_t^{2m-2} u; \\ &\vdots \\ w_{2m-1}(\xi,t) &= \partial_t u. \end{aligned}$$

Как известно (см. [7]), нахождение "гладких" вплоть до $t=+0$ решений системы (2.8) тесно связано с расположением спектра оператора $B_{11}(+0,\xi)$. Поскольку в нашем случае $\gamma'(+0)=0$ и $\det(B_{11}(+0)-\lambda I)=(-\lambda)^{2m-1}+ +(-1)^m|a_{02m}|^{-2}b(+0)\overline{a_{02m}(+0)}$, а по условиям 1,2 и 5 имеет место $\operatorname{Im} b(+0)\overline{a_{02m}(+0)}$, $\operatorname{Re} b(+0)a_{02m}(+0)>0$, то собственные числа λ_k матрицы $B_{11}(+0)$ все различны и имеют вид: $\lambda_k=|\lambda|\exp(i\arg\lambda_k)$,

$$|\lambda| = \left(|b(+0)||a_{02m}(+0)|^{-2}\right)^{\frac{1}{2m-1}}, \quad \arg\lambda_k = \frac{\pi}{2m-1}(m+2k),\ k=0,1,\dots,2m-2.$$

Очевидно, m собственных чисел λ_k $(k=0,1,\dots,m-1)$ лежат в левой полуплоскости, а остальные $(m-1)$ чисел λ_k $(k=m,m+1,\dots,2m-2)$ – в правой полуплоскости. Таким образом, размерность инвариантного подпространства $E_-(E_+)$ матрицы $B_{11}(+0)$, соответствующего собственным числам $B_{11}(+0)$, лежащим в левой (правой) полуплоскости, равна $m(m-1)$. При этом $\mathbb{C}_{2m-1}= =E_-\dot{+}E_+$.

Обозначим через $P_-(P_+)$ проектор в $\mathbb{C}_{2m-1}$ на $E_-(E_+)$. Кроме того, будем обозначать через $P_\sigma u_1$ компоненту w_σ вектора u_1 $(1\le\sigma\le 2m-1)$.

Наряду с системой уравнений (2.8) мы будем рассматривать "улучшенную" систему уравнений

$$\begin{aligned} &\gamma(t)\frac{du_1}{dt} + (B_{11}(+0)+\gamma'(t)I)u_1 + b^0_{2m}(0,\xi)e_1 u = f(t)e_1; \\ &\frac{du}{dt} - P_{2m-1}u_1 = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $b^0_{2m}(0,\xi)$ - старшая часть многочлена $b_{2m}(0,\xi)$ степени $2m$, определенного в (1.2).

Доказательство разрешимости задачи (2.1),(2.3),(2.4) существенно опирается на коэрцитивные оценки решений этой задачи, которые мы приводим здесь без доказательства. По аналогии с пространствами функций $H_{s,\alpha,0}$, введенными в п.1, будем рассматривать пространства $\tilde{H}_{s,\alpha}$ функций $u(t)$, заданных на $(0,d)$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Пространство $\tilde{H}_{s,\alpha}$ ($s\ge 0$ - целое) состоит из всех функций $u(t)$, имеющих на $(0,d)$ обобщенные производные до порядка s, для которых конечны нормы

$$|u|_{s,\alpha,\lambda}=\left\{\sum_{j+2m\ell=s}(1+\lambda^2)^{s-j-2m\ell}\int_0^d|\mathcal{D}^j_{\alpha,t}\partial^\ell_t u(t)|^2dt\right\}^{1/2}, \tag{2.10}$$

зависящие от параметра $\lambda\geq 0$. Очевидно, нормы вида (2.10) при любых $\lambda>0$ эквивалентны (с постоянными, зависящими от λ). В случае $S=0$ пространство $\tilde{H}_{s,\alpha}$ совпадает с $\mathcal{L}_2(0,d)$, и мы его будем для краткости обозначать $|u|_{0,\alpha,\lambda}=|u|$.

Подмножество $\tilde{H}_{s,\alpha}(s\geq 2m)$, состоящее из тех функций $u\in\tilde{H}_{s,\alpha}$, которые удовлетворяют условию (2.3), будем обозначать $\mathcal{D}_{s,\alpha}$.

Лемма 2.2. Пусть $s\geq 2m$ и выполнены условия 1,2,3,5,6. Тогда для любого $u\in\mathcal{D}_{s,\alpha}$ и $\lambda=|\xi|\geq 0$ справедливо неравенство

$$|u|_{s,\alpha,\lambda}\leq c_{2,1}\left(|A_\infty(t)u|_{s-2m,\alpha,\lambda}+(1+\lambda^2)^{\frac{s-m}{2}}|u(+0)|+|u|\right). \tag{2.11}$$

В случае $A_\infty(t)\equiv A_\infty(+0)$ в правой части неравенства (2.11) можно отбросить слагаемое $|u|$. Постоянная $c_{2,1}>0$ не зависит от u и λ.

Лемма 2.3. Пусть $s\geq 2m$ и выполнены условия 2,5,6. Тогда при любых $f\in\tilde{H}_{s-2m,\alpha}$, $g\in\mathbb{C}$, $\xi\in E_{n-1}$ граничная задача (2.3), (2.4) для уравнения

$$A_\infty(+0,\xi,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)u=f \tag{2.12}$$

имеет единственное решение $u\in\tilde{H}_{s,\alpha}$ и справедлива априорная оценка

$$|u|_{s,\alpha,|\xi|}\leq c_{2,2}\left(|A_\infty(+0)u|_{s-2m,\alpha,|\xi|}+(1+|\xi|^2)^{\frac{s-m}{2}}|u(+0)|\right), \tag{2.13}$$

где постоянная $c_{2,2}>0$ не зависит от u и ξ.

Доказательство. Предположим вначале, что собственные числа матрицы $B_{11}(+0)$ удовлетворяют условиям

$$\max_{0\leq k\leq m-1}\operatorname{Re}\lambda_k+\max_{0\leq t\leq d}|\gamma'(t)|\leq-\delta^-<0;$$
$$\min_{m\leq k\leq 2m-2}\operatorname{Re}\lambda_k-\max_{0\leq t\leq d}|\gamma'(t)|\geq\delta^+>0. \tag{2.14}$$

Проектируя первое уравнение в (2.9) на E_- и E_+, запишем его в виде

$$\gamma(t)\frac{du_1^-}{dt}+(B_{11}(+0)+\gamma'(t)I)u_1^-=(f(t)-b^0_{2m}(0,\xi)u(t))P_-e_1;$$
$$\gamma(t)\frac{du_1^+}{dt}+(B_{11}(+0)+\gamma'(t)I)u_1^+=(f(t)-b^0_{2m}(0,\xi)u(t))P_+e_1. \tag{2.15}$$

Обращая операторы, стоящие в левых частях уравнений (2.15), мы приходим к уравнениям

$$u_1^-(t)=U_1^-(t,d)q^- -\int_t^d U_1^-(t,s)P_-e_1(f(s)-b^0_{2m}(0,\xi)u(s))\frac{ds}{\gamma(s)};$$
$$u_1^+(t)=\int_0^t U_1^+(t,s)P_+e_1(f(s)-b^0_{2m}(0,\xi)u(s))\frac{ds}{\gamma(s)}, \tag{2.16}$$

где

$$\mathcal{U}_1^{\pm}(t,s)=\frac{\gamma(s)}{\gamma(t)}\exp\left(P_{\pm}B_{11}(+0)\int_t^s\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right),$$

q^- - произвольный вектор из E_- (см. [7]). Второе уравнение в (2.9) и условия (2.3), (2.4) можно записать в виде

$$u(t)=-\int_t^d P_{2m-1}u_1(s)ds; \tag{2.17}$$

$$\int_0^d P_{2m-1}u_1(s)ds=g; \tag{2.18}$$

$$P_{2m-1}u_1\Big|_{t=d}=P_{2m-2}u_1\Big|_{t=d}=\ldots=P_{m+1}u_1\Big|_{t=d}=0. \tag{2.19}$$

Очевидно, задача (2.12), (2.3), (2.4) в определенном смысле эквивалентна задаче (2.16) - (2.19). Заметим, что уравнения (2.16), (2.17) можно также записать в виде

$$\begin{aligned}&u_1(t)=\mathcal{U}_1^-(t,d)q^--\int_0^d\Phi(t,s)f(s)ds-b_{2m}^0(0,\xi)\int_0^d\int_0^s\Phi(t,\tau)w_{2m-1}(s)d\tau ds;\\&u(t)=-\int_t^d w_{2m-1}(s)ds,\end{aligned} \tag{2.20}$$

где

$$\Phi(t,s)=\begin{cases}-\mathcal{U}_1^+(t,s)P_+e_1\dfrac{1}{\gamma(s)}, & 0<s<t;\\ \mathcal{U}_1^-(t,s)P_-e_1\dfrac{1}{\gamma(s)}, & t<s<d.\end{cases} \tag{2.21}$$

Используя (2.20), условия (2.18) и (2.19) также можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\int_0^d P_{2m-1}\mathcal{U}_1^-(t,d)q^-dt=d_m+b_{2m}^0(0,\xi)\mathcal{K}_m w_{2m-1};\\&P_\nu q^-=d_\nu+b_{2m}^0(0,\xi)\mathcal{K}_\nu w_{2m-1}\quad(m+1\le\nu\le 2m-1),\end{aligned} \tag{2.22}$$

где

$$d_m=g(\xi)+\int_0^d\int_0^d P_{2m-1}\Phi(t,\tau)f(\tau)dtd\tau;$$

$$\mathcal{K}_m w = \int_0^d \int_0^d \int_0^s P_{2m-1}\,\Phi(t,\tau) w(s)\,d\tau\,dt\,ds\,;$$

$$d_\nu = \int_0^d P_\nu\,\Phi(d,\tau) f(\tau)\,d\tau \quad (m+1 \leq \nu \leq 2m-1); \tag{2.23}$$

$$\mathcal{K}_\nu w = \int_0^d \int_0^s P_\nu\,\Phi(d,\tau)\,w(s)\,d\tau\,ds \quad (m+1 \leq \nu \leq 2m-1).$$

Пусть $h_\sigma = (\omega_{\sigma 1}, \omega_{\sigma 2}, \dots, \omega_{\sigma\, 2m-1}) \neq 0$ - собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_σ матрицы $B_{11}(+0)$: $B_{11}(+0) h_\sigma - \lambda_\sigma h_\sigma = 0$, $0 \leq \sigma \leq m-1$. Так как q^- принадлежит E_- , то

$$q^- = \mu_0 h_0 + \mu_1 h_1 + \dots + \mu_{m-1} h_{m-1}, \tag{2.24}$$

где μ_σ - комплексные числа. Учитывая (2.24), имеем

$$P_\nu q^- = \mu_0\,\omega_{0\nu} + \mu_1 \omega_{1\nu} + \dots + \mu_{m-1}\,\omega_{m-1\,\nu}\,, \quad m+1 \leq \nu \leq 2m-1; \tag{2.25}$$

$$\int_0^d P_{2m-1}\, U_1^-(t,d)\, q^- dt = \sum_{\sigma=0}^{m-1} \frac{\gamma(d)}{\lambda_\sigma}\, \mu_\sigma\, \omega_{\sigma\, 2m-1}\,. \tag{2.26}$$

Из структуры матрицы $B_{11}(+0)$ следует, что $\omega_{\sigma\nu} = (-\lambda)^{2m-1-\nu}\, \omega_{\sigma\; 2m-1}$ и $\omega_{\sigma\; 2m-1} \neq 0$ $(m+1 \leq \nu < 2m-1,\ 0 \leq \sigma \leq m-1)$. Таким образом, из (2.22), (2.25) и (2.26) получаем систему для определения $\mu_\sigma\, \omega_{\sigma\; 2m-1}$ $(0 \leq \sigma \leq m-1)$:

$$\sum_{\sigma=0}^{m-1} \frac{\gamma(d)}{\lambda_\sigma}\, \mu_\sigma\, \omega_{\sigma\; 2m-1} = d_m + b^0_{2m}(0,\xi)\, \mathcal{K}_m w_{2m-1}\,;$$

$$\sum_{\sigma=0}^{m-1} \lambda_\sigma^{2m-1-\nu}\, \mu_\sigma\, \omega_{\sigma\; 2m-1} = (-1)^{2m-1-\nu} \left(d_\nu + b^0_{2m}(0,\xi)\, \mathcal{K}_\nu w_{2m-1}\right), \tag{2.27}$$

$$m+1 \leq \nu \leq 2m-1.$$

Определитель J системы (2.27) легко вычислить путем сведения к определителю Вандермонда:

$$J = \gamma(d) \left| \frac{b(0)}{a_{02m}(0)} \right|^{\frac{m-3}{2m-1}} e^{\,i\frac{m}{4}(m-4)(m+1)\beta} \left(e^{i\beta}-1\right)^{m-1} \left(e^{i2\beta}-1\right)^{m-2} \dots \left(e^{i(m-1)\beta}-1\right) \neq 0,$$

где $\beta = \frac{2\pi}{2m-1}$ $(m \geq 2)$. Случай $m=1$ очевиден, так как при этом условия вида (2.25) отсутствуют. Единственное решение системы (2.27) существует и может быть записано в виде

$$\mu_{\sigma}\omega_{\sigma\,2m-1}=\sum_{\nu=m}^{2m-1}\beta_{\sigma\nu}\left(d_{\nu}+b_{2m}^{0}(0,\xi)\mathcal{K}_{\nu}w_{2m-1}\right),\ 0\le\sigma\le m-1. \tag{2.28}$$

Таким образом, из (2.20) и (2.28) выводим уравнение для w_{2m-1} :

$$w_{2m-1}-b_{2m}^{0}(0,\xi)\mathcal{K}w_{2m-1}=\mathcal{F}_{2m-1}(t), \tag{2.29}$$

где

$$\mathcal{F}_{2m-1}(t)=-\int_0^d P_{2m-1}\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau+\sum_{\nu=m}^{2m-1}\sum_{\sigma=0}^{m-1}\frac{\gamma(d)}{\gamma(t)}e^{\lambda_\sigma\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}}\beta_{\sigma\nu}d_\nu;$$

$$\mathcal{K}w=-\int_0^d\int_0^s P_{2m-1}\Phi(t,\tau)w(s)d\tau ds+\sum_{\nu=m}^{2m-1}\sum_{\sigma=0}^{m-1}\frac{\gamma(d)}{\gamma(t)}e^{\lambda_\sigma\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}}\beta_{\sigma\nu}\mathcal{K}_\nu w.$$

Доказательство разрешимости в $\mathcal{L}_2(0,d)$ уравнения (2.29) основано на следующих оценках:

$$\left|\int_0^d P_{2m-1}\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau\right|\le\left(\frac{m}{\delta^-}+\frac{m-1}{\delta^+}\right)|f|; \tag{2.30}$$

$$\sum_{\sigma=0}^{m-1}\left|\gamma^{-1}(t)e^{\lambda_\sigma\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}}\right|\le\frac{m}{\sqrt{\delta^-}};\quad \sum_{\sigma=m}^{2m-2}\left|\gamma^{-1}(t)e^{-\lambda_\sigma\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}}\right|\le\frac{m-1}{\sqrt{\delta^+}}; \tag{2.31}$$

$$\sup_{0<s<d}\left|\int_0^t P_\nu\Phi(s,\tau)d\tau\right|\le\left(\frac{2m-2}{\delta^+}+\frac{m}{\delta^-}\right)\sqrt{d},\ 1\le\nu\le 2m-1, \tag{2.32}$$

справедливость которых вытекает из [7] (см. теоремы 2.7, 2.8, лемму 2.4 в [7]) при выполнении условий (2.14). Неравенства (2.30)-(2.32) позволяют легко установить, что правая часть $\mathcal{F}_{2m-1}(t)$ уравнения (2.29) принадлежит $\mathcal{L}_2(0,d)$, а оператор $\mathcal{K}$ является ограниченным оператором в пространстве $\mathcal{L}_2(0,d)$. Выберем теперь $\delta>0$ таким образом, чтобы при всех $|\xi|\le\delta$ величина $b_{2m}^{0}(0,\xi)\|\mathcal{K}\|_{\mathcal{L}_2\to\mathcal{L}_2}\le 1/2$. Тогда уравнение (2.29) однозначно разрешимо в $\mathcal{L}_2(0,d)$ и $w_{2m-1}=(I-b_{2m}^{0}(0,\xi)\mathcal{K})^{-1}\mathcal{F}_{2m-1}$, причем

$$|w_{2m-1}|\le 2|\mathcal{F}_{2m-1}|\quad(|\xi|\le\delta). \tag{2.33}$$

После подстановки w_{2m-1} - решения уравнения (2.29) при $|\xi|\le\delta$ в (2.20) мы найдем искомое решение $\{u_1(\xi,t),u(\xi,t)\}$ системы (2.9). Это решение удовлетворяет условиям (2.18), (2.19) (а следовательно, и условиям (2.3), (2.4)), если в (2.20) в качестве q^- взять вектор, определяемый формулами (2.24) и (2.28). Из оценок (2.30)-(2.33), а также из равенств (2.20) и (2.9) следует, что

$$|\gamma|\left\|\frac{du_1}{dt}\right\|+\|u_1\|+|u|\le c_{2,3}\left(\|u_1\|+|f|+|u|\right)\le$$
$$\le c_{2,4}\left(|w_{2m-1}|+|f|\right)\le c_{2,5}\left(|f|+|g|\right)\quad(|\xi|\le\delta). \tag{2.34}$$

Легко проверить, что

$$(-1)^m\left(\gamma\frac{d}{dt}+\gamma'\right)^{2m-1}\frac{du}{dt}=\mathcal{D}^{2m}_{\alpha,t}u+\mathcal{J}_{2m-1}(u), \tag{2.35}$$

где

$$\mathcal{J}_{2m-1}(u)=\sum_{j=0}^{2m-1}\Phi_{2m-1,j}(t)\mathcal{D}^{j}_{\alpha,t}u, \tag{2.36}$$

функции $\Phi_{2m-1,j}(t)$ непрерывны на $[0,d]$. Из (2.9),(2.34) и (2.35) следует, что функция $u(\xi,t)$ принадлежит $\tilde{H}_{2m,\alpha}$ и удовлетворяет уравнению

$$A'_\infty(t,\xi,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)u\equiv a_{02m}(0)\left(\mathcal{D}^{2m}_{\alpha,t}u+\mathcal{J}_{2m-1}(u)\right)+$$
$$+b(0)\partial_t u+\sum_{|\tau|=2m}a_{\tau 0}(0)\xi^\tau u=f(\xi,t). \tag{2.37}$$

Рассмотрим оператор

$$A^\mu_\infty(t,\xi,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)=\mu A_\infty(+0,\xi,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)+(1-\mu)A'_\infty(t,\xi,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t),$$

зависящий от параметра $\mu\in[0,1]$. Легко проверить, что оператор A^μ_∞ удовлетворяет условиям леммы 2.2 и, следовательно, для этого оператора справедлива априорная оценка (2.13) при $|\xi|=\delta$ и при любых $u\in\mathcal{D}_{2m,\alpha}$, причем постоянная $c_{2,1}>0$ не зависит от $\mu\in[0,1]$. Поскольку уравнение (2.37) имеет единственное решение $u\in\mathcal{D}_{2m,\alpha}$, $|\xi|=\delta$, удовлетворяющее условию (2.4), то с помощью метода продолжения по параметру μ и неравенства (2.13) при $|\xi|=\delta$ устанавливается, что и уравнение

$$A_\infty(+0,\xi,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)u=f\quad\left(A_\infty(+0,\xi,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)=A'_\infty(t,\xi,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)\right)$$

имеет единственное решение $u\in\mathcal{D}_{2m,\alpha}$, удовлетворяющее условию (2.4).

Рассмотрим далее оператор $A_\infty(+0,\lambda\dot{\xi},\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)$, где $|\dot{\xi}|=\delta$. Применив снова метод продолжения по параметру λ и воспользовавшись неравенством (2.13) и установленной уже разрешимостью задачи (2.3),(2.4) для уравнения

$$A_\infty(+0,\lambda\dot{\xi},\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)u=f \tag{2.38}$$

при $\lambda=1$, убеждаемся в том, что задача (2.3),(2.4) для уравнения (2.38) однозначно разрешима в $\tilde{H}_{2m,\alpha}$ при любом $\lambda>0$. Если взять в (2.38) $\lambda=\frac{|\xi|}{\delta}$, то аналогичное утверждение будет справедливо и для уравнения (2.12) при любом $\xi\in E_{n-1}$.

Разрешимость задачи (2.12),(2.3),(2.4) установлена нами при дополнительных условиях (2.14). Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то можно заменить коэффициент $\check{b}(0)$ при $\partial_t u$ в операторе $A_\infty(+0)$ на число $\check{b}$ так, чтобы новый оператор $\check{A}_\infty = L_{2m}^\infty(+0,\xi,\mathcal{D}_{\alpha,t})+\check{b}\partial_t$ удовлетворял всем условиям леммы и условиям (2.14). Как показано выше, задача (2.3),(2.4) для уравнения $\check{A}_\infty u = f$ разрешима в $\widetilde{H}_{2m,\alpha}$. Анализ доказательства неравенства (2.13) показывает, что это неравенство справедливо и для оператора $\check{A}^\mu_\infty = L_{2m}^\infty(+0,\xi,\mathcal{D}_{\alpha,t})+(\mu b(0)+(1-\mu)\check{b})\partial_t$, причем постоянная $C_{2,2}$ в этом неравенстве не будет зависеть от $\mu\in[0,1]$. Это позволяет снова применить метод продолжения по параметру μ и из разрешимости задачи (2.3), (2.4) для уравнения $\check{A}^\mu_\infty u = f$ при $\mu = 0$ вывести его разрешимость и при $\mu = 1$. Поскольку $\check{A}^1_\infty = A_\infty(+0)$, то тем самым доказана разрешимость исходного уравнения (2.12) в $\widetilde{H}_{2m,\alpha}$.

Для того чтобы установить разрешимость задачи (2.12),(2.3),(2.4) в $\widetilde{H}_{s,\alpha}$ следует воспользоваться известным методом повышения гладкости (см. [8, с.152]).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.1. Разрешимость задачи (1.11), (1.9),(1.10) в $H_{s,\alpha,0}$ $(s\geqslant 2m+m^*)$ вытекает непосредственно из лемм 2.3 и 2.1. Для того чтобы доказать разрешимость этой задачи в $H_{s,\alpha,K}$ при $K>0$ следует воспользоваться методом повышения гладкости решения задачи (2.12),(2.2),(2.3) по $\xi\in E_{n-1}$ (см. [9]) и установить неравенство

$$\sum_{|\beta|\leq k}|\mathcal{D}^\beta_\xi u|_{s,\alpha,|\xi|}\leq C_{26}\Big(\sum_{|\beta|\leq K}|\mathcal{D}^\beta_\xi A_\infty(+0)u|_{s-2m,\alpha,|\xi|}+ + \sum_{|\beta|\leq K}(1+|\xi|^2)^{\frac{s-m^*-m}{2}}|\mathcal{D}^\beta_\xi B_\infty u|_{t=0}|+\sum_{|\beta|\leq K-1}|\mathcal{D}^\beta_\xi u|\Big). \tag{2.39}$$

Последовательное (по K) применение неравенств вида (2.39) и неравенства (2.13) позволяет установить однозначную разрешимость задачи (2.1)-(2.3) в $H_{s,\alpha,K}$ $(K>0)$.

Доказательство разрешимости задачи (2.12),(2.2),(2.3) в $H_{s,\alpha,K}$ при $K<0$ проводится аналогично с использованием свойств потенциалов Бесселя $\mathcal{J}_K$ (см. [10, 11]).

Переходя к изучению задачи (1.8)-(1.10), прежде всего заметим,что из однозначной разрешимости в $\widetilde{H}_{2m,\alpha}$ задачи (2.12),(2.3),(2.4) и гладкости (по t) коэффициентов оператора $A_\infty(t)$ вытекает однозначная разрешимость в $\widetilde{H}_{2m,\alpha}$ задачи (2.1),(2.3),(2.4) при $d\leq d_0$. Дальнейшие рассуждения, приводящие к доказательству разрешимости задачи (2.1)-(2.3) в $\widetilde{H}_{s,\alpha}$ (и, следовательно, разрешимости в $H_{s,\alpha,K}$ задачи (1.8)-(1.10)), по существу, не отличаются от проведенных выше.

3. Доказательство нётеровости задачи (1.12), (1.13), (1.10). Оператор $\mathfrak{A}$, определенный на множестве $\mathcal{D}_{s,\alpha,\kappa}$ всех функций $v(x,t)$, принадлежащих пространству $H_{s,\alpha,\kappa}$ $(s \geq 2m)$ и удовлетворяющих условиям (1.10), формулой $\mathfrak{A}v = \{A(x,t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)v,\ B(x,\mathcal{D}_x,\partial_t)v|_{t=0}\}$, является ограниченным оператором из $H_{s,\alpha,\kappa}$ в произведение пространств $W_{s,\alpha,\kappa} = H_{s-2m,\alpha,\kappa} \otimes$ $\otimes\ H'_{s-m^*-m,\kappa}$. Через $\mathfrak{A}_\infty$ будем обозначать оператор $\mathfrak{A}$, построенный по операторам $A_\infty(t) = A(\infty,t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t},\partial_t)$ и $B_\infty = B(\infty,\mathcal{D}_x,\partial_t)$. Заметим, что последние операторы существуют в силу условия 5.

Из результатов п.2 вытекает

Л е м м а 3.1. При выполнении условий теоремы 1.1 существует оператор R_∞, определенный на $W_{s,\alpha,\kappa}$, такой, что $R_\infty\{\mathcal{F},\mathcal{G}\} \in \mathcal{D}_{s,\alpha,\kappa}$

$$\|R_\infty\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}\|_{s,\alpha,\kappa} \leq c_{3,1}\left(\|\mathcal{F}\|_{s-2m,\alpha,\kappa} + \|\mathcal{G}\|'_{s-m^*-m,\kappa}\right), \tag{3.1}$$

$\mathfrak{A}_\infty R_\infty\{\mathcal{F},\mathcal{G}\} = \{\mathcal{F},\mathcal{G}\}$ для любых $\{\mathcal{F},\mathcal{G}\} \in W_{s,\alpha,\kappa}$.

Некоторые видоизменения в доказательстве теоремы 1.1 приводят, как и в [8], к следующему утверждению.

Л е м м а 3.2. Пусть k и $s \geq 2m + m^*$ - целые числа; выполнены условия 1,2,3,4. Тогда для каждой точки $x^\nu \in E_{n-1}$ существует окрестность $\mathcal{U}_\nu$ и такие операторы $\mathfrak{A}_\nu$, R_ν и T_ν, что а) оператор определен на $\mathcal{D}_{s,\alpha,\kappa}$, действует в $W_{s,\alpha,\kappa}$ и для любой функции $v \in \mathcal{D}_{s,\alpha,\kappa}$, $\operatorname{supp} v \subset \mathcal{U}_\nu$: $\mathfrak{A}_\nu v = \mathfrak{A}v$; б) оператор R_ν определен на $W_{s,\alpha,\kappa}$ и действует в $\mathcal{D}_{s,\alpha,\kappa} \subset H_{s,\alpha,\kappa}$, причем

$$\|R_\nu\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}\|_{s,\alpha,\kappa} \leq c_{3,2}\left(\|\mathcal{F}\|_{s-2m,\alpha,\kappa} + \|\mathcal{G}\|'_{s-m^*-m,\kappa}\right) \tag{3.2}$$

для любых $\{\mathcal{F},\mathcal{G}\} \in W_{s,\alpha,\kappa}$,

$$\mathfrak{A}_\nu R_\nu\{\mathcal{F},\mathcal{G}\} = \{\mathcal{F},\mathcal{G}\} + T_\nu\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}, \tag{3.3}$$

где $T_\nu = \{T_\nu^0, T'_\nu\}$ - ограниченный оператор из $W_{s,\alpha,\kappa}$ в $W_{s+1,\alpha,\kappa}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.2. По данному целому числу $N \geq 1$ построим конечное покрытие E_{n-1}, состоящее из $\nu_0 = \nu_0(N)$ окрестностей $\mathcal{U}_\nu$ точек x^ν (построенных в лемме 3.2) и области $\mathcal{U}_\infty : |x| > N$. Выпишем разложение единицы: $\psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots + \psi_{\nu_0}(x) + \psi_\infty(x) = 1$, $x \in E_{n-1}$, так что $\psi_\nu \in C_0^\infty(E_{n-1})$, $\operatorname{supp}\psi_\nu \subset \mathcal{U}_\nu$; $\psi_\infty \in C^\infty(E_{n-1})$, $\psi_\infty(x) = 0$ при $|x| \leq N$, $\psi_\infty(x) = 1$ при $|x| \geq 2N$. Построим оператор

$$\mathcal{R}_N = \sum_{\nu=1}^{\nu_0(N)} \psi_\nu(x) R_\nu + \psi_\infty R_\infty, \tag{3.4}$$

где операторы R_∞ и R_ν определены в леммах 3.1 и 3.2.

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{A}\mathcal{R}_N = \sum_{\nu=1}^{\nu_0(N)} \mathfrak{A}_\nu \psi_\nu R_\nu + \mathfrak{A}_\infty \psi_\infty R_\infty + (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_\infty)\psi_\infty R_\infty .$$

Обозначив дифференциальные операторы

$$\mathfrak{A}'_\nu(\psi_\nu) = \mathfrak{A}_\nu \psi_\nu - \psi_\nu \mathfrak{A}_\nu \ ; \ \mathfrak{A}'_\infty(\psi_\infty) = \mathfrak{A}_\infty \psi_\infty - \psi_\infty \mathfrak{A}_\infty ,$$

запишем оператор $\mathfrak{A}\mathcal{R}_N$ в виде

$$\mathfrak{A}\mathcal{R}_N = I + T_N + K_N , \tag{3.5}$$

где

$$T_N = \sum_{\nu=1}^{\nu_0(N)} \psi_\nu T_\nu + \sum_{\nu=1}^{\nu_0(N)} \mathfrak{A}'_\nu(\psi_\nu) R_\nu + \mathfrak{A}'_\infty(\psi_\infty) R_\infty ;$$

$$K_N = (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_\infty)\psi_\infty R_\infty . \tag{3.6}$$

Поскольку функцию $\psi_\infty(x)$ можно выбрать таким образом, чтобы $\sup_{x\in E_{n-1}} |\mathcal{D}_x^\alpha \psi_\infty(x)| \le C_\alpha N^{-|\alpha|}$, $|\alpha| \ge 0$, то

$$\|(A - A_\infty)\psi_\infty u_\infty\|_{s-2m,\alpha,K} + \|(B-B_\infty)\psi_\infty u_\infty|_{t=0}\|'_{s-m^*-m,K} \le \varepsilon_1(N)\|u_\infty\|_{s,\alpha,K} +$$
$$+ \|\psi_\infty(A - A_\infty)u_\infty\|_{s-2m,\alpha,K} + \|\psi_\infty(B - B_\infty)u_\infty|_{t=0}\|'_{s-m^*-m,K} , \tag{3.7}$$

где $\varepsilon_1(N) \to 0$ при $N \to \infty$ и $u_\infty = R_\infty\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}$. Учитывая, что $\psi_\infty(x) = 0$ при $|x| \le N$, с помощью условия 8 получим

$$\|\psi_\infty(A - A_\infty)u_\infty\|_{s-2m,\alpha,K} + \|\psi_\infty(B-B_\infty)u_\infty|_{t=0}\|'_{s-m^*-m,K} \le \varepsilon_2(N)\|u_\infty\|_{s,\alpha,K} \tag{3.8}$$

причем $\varepsilon_2(N) \to 0$ при $N \to \infty$. Таким образом, из (3.1), (3.7) и (3.8) вытекает, что

$$\|(A - A_\infty)\psi_\infty u_\infty\|_{s-2m,\alpha,K} + \|(B - B_\infty)\psi_\infty u_\infty|_{t=0}\|'_{s-m^*-m,K} \le$$
$$\le C_{3,1}\,(\varepsilon_1(N) + \varepsilon_2(N))\left(\|\mathcal{F}\|_{s-2m,\alpha,K} + \|\mathcal{G}\|'_{s-m^*-m,K}\right). \tag{3.9}$$

Выберем $N = N^*$ таким образом, чтобы $C_{3,1}\left(\varepsilon_1(N^*) + \varepsilon_2(N^*)\right) \le \frac{1}{2}$. Тогда из (3.9) следует, что норма оператора K_{N^*} (см. 3.6)) в $W_{s,\alpha,K}$ не превосходит $1/2$ и, следовательно, существует $(I + K_{N^*})^{-1}$, причем норма $(I + K_{N^*})^{-1}$ в $W_{s,\alpha,K}$ не превосходит 2.

Из (3.5) вытекает, что $\mathfrak{A}\mathcal{R} = I + T$, где $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{N^*}(I + K_{N^*})^{-1}$, $T = T_{N^*}(I + K_{N^*})^{-1}$. С помощью оценок (3.1) и (3.2) легко устанавливается справедливость неравенства (1.14).

Оценим норму оператора $T = \{T^0, T'\}$ в $W_{s,\alpha,K}$. Из (3.6) следует, что для любой функции $\psi_{2N^*}(x) \in C_0^\infty(E_{n-1})$, $\psi_{2N^*}(x) = 0$ при $|x| \ge 4N^*$, $\psi_{2N^*}(x) = 1$ при $|x| \le 2N^*$ $\psi_{2N^*} T = T$ и

$$\mathcal{J}_{s+1}\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \|\psi_{2N^*} T^0\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}\|_{s+1-2m,\alpha,K} + \|\psi_{2N^*} T'\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}\|'_{s+1-m^*-m,K} \le$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{\nu_0(N^*)} \Big(\|\psi_\nu T_\nu^0 \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}\|_{s+1-2m,\alpha,\kappa} + \|\psi_\nu T_\nu' \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}\|'_{s+1-m^*-m,\kappa} +$$

$$+ \|A_\nu'(\psi_\nu) u_\nu\|_{s+1-2m,\alpha,\kappa} + \|B_\nu'(\psi_\nu) u_\nu|_{t=0}\|'_{s+1-m^*-m,\kappa}\Big) +$$

$$+ \|A_\infty'(\psi_\infty) u_\infty\|_{s+1-2m,\alpha,\kappa} + \|B_\infty'(\psi_\infty) u_\infty|_{t=0}\|'_{s+1-m^*-m,\kappa},$$

где $u_\nu = R_\nu \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}$, $u_\infty = R_\infty \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}$. Используя очевидные свойства операторов $\mathfrak{A}_\nu'$ и $\mathfrak{A}_\infty'$, вытекающие из их определения, а также свойства операторов T_ν (см. лемму 3.2), продолжим оценку

$$\mathcal{J}_{s+1}\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} \leq c_{3,3}(N^*) \Big(\sum_{\nu=1}^{\nu_0(N^*)} \|u_\nu\|_{s,\alpha,\kappa} + \|u_\infty\|_{s,\alpha,\kappa} + \|\mathcal{F}\|_{s-2m,\alpha,\kappa} + \|\mathcal{G}\|'_{s-m^*-m,\kappa} \Big)$$

Из последнего неравенства и неравенств (3.1) и (3.2) вытекает оценка

$$\mathcal{J}_{s+1}\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} \leq c_{3,4} \Big(\|\mathcal{F}\|_{s-2m,\alpha,\kappa} + \|\mathcal{G}\|'_{s-m^*-m,\kappa} \Big). \tag{3.10}$$

Неравенство (3.10) означает, что оператор T переводит любое ограниченное множество в $W_{s,\alpha,\kappa}$ в ограниченное в $W_{s+1,\alpha,\kappa}$. Так как $\operatorname{supp} T^0\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}$ и $\operatorname{supp} T'\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}$ принадлежат множеству $|x| \leq 4N^*$, то, в силу известных теорем о полной непрерывности оператора вложения в пространствах С.Л.Соболева (см. [12]), множество $T'\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}$ будет компактно в $H'_{s-m^*-m,\kappa}$. Кроме того, из [8] следует, что при нечетном s ограниченное множество $T^0\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}$ в $H_{s+1-2m,\alpha,\kappa}$ будет компактно в $H_{s-2m,\alpha,\kappa}$. Если же s - четное число, то следует построенный выше оператор $\mathcal{R}$ заменить на оператор $\check{\mathcal{R}} = \mathcal{R}(I - T)$. Тогда $\mathfrak{A}\check{\mathcal{R}} = I - T^2$. Если теперь повторить проведенные выше оценки для оператора $-T^2 = \{-T^{0^2}, -T'^2\}$, то аналогично устанавливается, что оператор $-T^2$ переводит ограниченное множество в $W_{s,\alpha,\kappa}$ в ограниченное множество в $W_{s+2,\alpha,\kappa}$. При любом $s \geq 2m$ (в частности, при четном $s \geq 2m$) ограниченное множество $-T^{0^2}\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = -\psi_{2N^*} T^{0^2}\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}$ в $H_{s+2-2m,\alpha,\kappa}$ компактно в $H_{s-2m,\alpha,\kappa}$ (см. [8]). Таким образом, заменяя в случае необходимости $\mathcal{R}$ на $\check{\mathcal{R}}$, можно при любом $s \geq 2m + m^*$ утверждать, что оператор T вполне непрерывен в $W_{s,\alpha,\kappa}$. Следовательно, оператор $\mathcal{R}$ является правым регуляризатором для оператора $\mathfrak{A}$.

Покажем, что $\mathcal{R}$ и левый регуляризатор. Для этого обозначим $\mathcal{R}\mathfrak{A} = I + \hat{T}$. Очевидно, оператор $\hat{T}$ определен на $\mathcal{D}_{s,\alpha,\kappa}$ и $\|\hat{T}u\|_{s,\alpha,\kappa} \leq c_{3,5} \|u\|_{s,\alpha,\kappa}$ $(u \in \mathcal{D}_{s,\alpha,\kappa})$. Покажем, что $\hat{T}$ вполне непрерывен в $\mathcal{D}_{s,\alpha,\kappa}$. Из определения $\hat{T}$ и T следует, что $\mathfrak{A}\hat{T} = \mathfrak{A}(\mathcal{R}\mathfrak{A} - I) = (I+T)\mathfrak{A} - \mathfrak{A} = T\mathfrak{A}$. Пусть функции $u \in \mathcal{D}_{s,\alpha,\kappa}$ образуют ограниченное множество $\mathcal{M}$ в $H_{s,\alpha,\kappa}$. С помощью неравенства (1.15) имеем

$$\|\hat{T}u\|_{s,\alpha,\kappa} \leq c_{1,9} \Big(\|A\hat{T}u\|_{s-2m,\alpha,\kappa} + \|B\hat{T}u|_{t=0}\|'_{s-m^*-m,\kappa} +$$

$$+\|\hat{T}u\|_{0,\alpha,K-s}\Big) = c_{1,9}\Big(\|T^0\{Au, Bu|_{t=0}\}\|_{s-2m,\alpha,K} +$$

$$+\|T'\{Au, Bu|_{t=0}\}\|'_{s-m^*-m,K} + \|\hat{T}u\|_{0,\alpha,K-s}\Big). \qquad (3.11)$$

Очевидно, пространство $H_{s,\alpha,K}$ $(s \geq 2)$ компактно вложено в $H_{0,\alpha,K-\delta}$ при любом $\delta > 0$. Поэтому множество $\hat{T}u$, $u \in \mathcal{M}$, компактно в $H_{0,\alpha,K-s}$ $(s \geq 2m)$. Кроме того, по доказанному выше, множество $T\{Au, Bu|_{t=0}\}$, $u \in \mathcal{M}$ компактно в $W_{s,\alpha,K}$. Тогда из (3.11) вытекает компактность множества $\hat{T}u$, $u \in \mathcal{M}$, в $H_{s,\alpha,K}$.

Как известно, из существования правого и левого регуляризаторов для оператора $\mathfrak{A}$ и из оценки (1.15) вытекает, что задача (1.12), (1.13), (1.10) нётерова в $H_{s,\alpha,K}$.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что при выполнении условий теоремы 1.2 и условий: $\mathcal{F}(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,K}$, $\varphi(x) \in H'_{s-m^*-m,K}$,

$$u(x,t) \in H_{0,\alpha,K-s}, \ \psi(x)u(x,t) \in H_{s,\alpha,K} \qquad (3.12)$$

для любой $\psi(x) \in C_0^\infty(E_{n-1})$ вытекает, что решение $u(x,t)$ задачи (1.12), (1.13), (1.10) принадлежит пространству $H_{s,\alpha,K}$. Это, в частности, означает, что ядро этой задачи конечномерно в классе функций $u(x,t)$, удовлетворяющих условиям (3.12) при некоторых k и $s \geq 2m + m^*$.

Л и т е р а т у р а

1. Г л у ш к о В.П. Коэрцитивность в $\mathcal{L}_2$ общих граничных задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка. - "Функциональный анализ и его приложения", 1968, т.2, вып.3, с.87÷88.
2. В и ш и к М.И., Г р у ш и н В.В. Об одном классе вырождающихся эллиптических уравнений высших порядков. - "Мат. сб.", 1969, вып. 79(121), с.3-36.
3. Б а г и р о в Л.А., Ф е й г и н В.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с неограниченной границей. - "Докл. АН СССР", 1973, т.211, № 1, с.23÷26.
4. N i r e n b e r g L., W a l k e r H.F. The null spaces of elliptic partial differential operators in R^n. - "I. Math. Analysis and Applic", 1973, v.42, № 2, p.271-301.
5. Г л у ш к о В.П., Г у л я н с к и й Э.Д. Вырождающиеся эллиптические операторы и их ядра в неограниченных областях. - В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. (Труды семинара С.Л.Соболева), 1976, № 2,

с.10-14.

6. Г л у ш к о В.П., Л ь в и н С.Я. О некоторых свойствах одного класса весовых пространств С.Л.Соболева. - В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Нальчик, изд. КБГУ, 1977, вып. 1, с.52.

7. Г л у ш к о В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения. - Воронеж, изд. ВГУ, 1972.

8. Г л у ш к о В.П. Оценки в $\mathcal{L}_2$ и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. - "Труды Моск. мат. о-ва", 1970, т.23, с.1[illegible]3-178.

9. А г м о н С. и др. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М., ИЛ., 1962, 205 с.

10. Н и к о л ь с к и й С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., "Наука", 1977, 456 с.

11. Г у л я н с к и й Э.Д. Оценка решения одного вырождающегося эллиптического уравнения в полосе. - В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения", Нальчик, изд. КБГУ, 1977, вып. 1, с.91.

12. С о б о л е в С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, изд. СО АН СССР, 1962, 255 с.