УДК 517.948.34

СЛАБОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИИ БЕЗ КРАЯ

Р.С.С а к с (Новосибирск)

Мы определим класс неэллиптических систем псевдодифференциальных уравнений, которые назовем слабоэллиптическими. По своим свойствам слабоэллиптические системы близки к эллиптическим [4]. В частности, на многообразии без края квадратные слабоэллиптические системы имеют левый и правый регуляризаторы и все вытекающие отсюда свойства. Слабоэллиптические системы являются обобщением двух классов систем: равномерно неэллиптических систем [5], в которых требование постоянства ранга символических матриц заменяется более слабым условием, и систем эллиптических по Дуглису-Ниренбергу [6] для тех порядков строк и столбцов, при которых система оказывается неэллиптической. Мы показываем, что для таких порядков система является слабоэллиптической (теорема 2). Известно, что композиция двух операторов, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу, может оказаться неэллиптической, но всегда является слабоэллиптической.

Слабоэллиптические операторы образуют полугруппу с инволюцией: композиция таких операторов и сопряженные операторы слабоэллиптичны.

Известно, что эллиптичность по Дуглису-Ниренбергу, а также условие Волевича невырожденности системы [7] теряются при эквивалентных преобразованиях ее строк (или столбцов), если, скажем, порядок одной из ее строк (столбцов) превышает порядки остальных. Слабая эллиптичность инвариантна относительно таких преобразований.

Слабая эллиптичность системы определяется по ее полному символу.

Приводятся три эквивалентных определения слабой эллиптичности (теорема 1). Первое определение удобно при построении регуляризаторов и доказательстве теоремы 3 о разрешимости системы. Проверка принадлежности системы к классу слабоэллиптических систем осуществляется с помощью двух других определений.

§ 1. Эллиптические псевдодифференциальные операторы

Обозначения [5, 8]: X - вещественное n-мерное компактное многообразие класса C^{∞} без края, на котором введена риманова метрика, $T^*(X)$ - кокасательное расслоение многообразия X, $x=(x_1,\dots,x_n)$ - локальные координаты в X, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ - двойственные координаты; $T'(X)$ - часть $T^*(X)$, состоящая из ненулевых векторов ξ_x; $S(X)$ - часть $T^*(X)$, состоящая из единичных векторов $|\xi_x|=1$; $\dot{U}$ - область в $S(X)$; $\dot{\xi}=\frac{\xi}{|\xi|}$, U - область в $T'(X)$, образованная из точек $q=(x,\xi)$ таких, что $(x,\dot{\xi})\in\dot{U}$, $0<|\xi|<\infty$; U называется угловой окрестностью точки $q_0\in U$. Например, $U=V\times K$, где $V\subset X$ - окрестность точки x_0, K - конус в $R^n\setminus 0$, содержащий вектор ξ_0 и составленный из векторов $\xi\neq 0$, для которых $|\dot{\xi}-\dot{\xi}_0|<\varepsilon$.

Как известно [1-5] (см., также [9-10]), линейный непрерывный оператор P, переводящий пространство обобщенных функций на компактном многообразии X в себя, называется псевдодифференциальным (п.д.) оператором порядка не выше m, если выполнены следующие условия:

1) Для любого открытого множества $V\subset X$ и для любой функции $\varphi(x)$, равной нулю на V, функция $P\varphi\in C^{\infty}(V)$.

2) Для любой координатной окрестности $V\subset X$ существуют функции $a_k(x,\xi)$, $k=0,1,2,\dots$, однородные по ξ порядка $m-k$, бесконечно дифференцируемые по x и ξ и такие, что для любой функции $\varphi(x)$ с носителем, принадлежащим V, и для любого $N>0$

$$P\varphi|_V = F^{-1}_{\xi\to x} K_N(x,\xi) F_{x\to\xi}\,\varphi(x) + T_N\varphi, \tag{1}$$

где F - оператор преобразования Фурье, $K_N(x,\xi)$ - гладкая функция,

$$K_N(x,\xi)=\sum_{k=0}^{N+m-1} a_k(x,\xi) \qquad \text{при } |\xi|>1, \tag{2}$$

а T_N - сглаживающий оператор порядка $-N$, т.е. непрерывный оператор из $W_2^{(s)}(X)$ в $W_2^{(s+N)}(X)$ при любом s.

Функция $\sigma_m(P)$ на $T'(X)$, совпадающая в окрестности V при $|\xi|>1$ с $a_0(x,\xi)$, называется символом оператора P. Функция $K(P)$, заданная на V при $|\xi|>1$ асимптотическим рядом $\sum_{k\geq 0} a_k(x,\xi)$, называется полным символом оператора P; $K(P)$ - сечение некоторого расслоения с базой $T'(X)$.

Вид функций $a_k(x,\xi)$ зависит от выбора системы координат в окрестности V, при переходе к другой системе координат эти функции меняются так же, как меняются при замене переменных коэффициенты дифференциальных операторов [11]. В частности, при замене переменных $x=x(y)$ функция $a_0(x,\xi)$ переходит в функцию $b_0(y,\eta)=a_0\left(x(y),\left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)'\right]^{-1}\cdot\eta\right)$, где $\frac{\partial x}{\partial y}(y)$ - матрица Якоби.

Зная функцию K на $T'(X)$, можно определить оператор P, полный символ которого равен K [11]. При этом оператор P определяется через свои локальные представления $P_j = P|_{V_j}$ в виде $\sum_j \varphi_j P_j \psi_j + T$, где φ_j - разбиение единицы, вписанное в конечное покрытие X окрестностями V_j; $\sum_{1}^{N}\varphi_j = 1$, а ψ_j - бесконечно гладкие функции с носителями в V_j такие, что $\varphi_j \psi_j = \varphi_j$, T - оператор порядка $-\infty$, переводящий функцию класса $W_2^{(s)}(X)$ в функции класса $C^\infty(X)$.

Известно также, что композиция $C = AB$ п.д. операторов A и B порядков m и n соответственно является п.д. оператором порядка $m+n$ и его полный символ $K(C)$ вычисляется через $K(A)$ и $K(B)$ по той же формуле, по которой находятся коэффициенты произведения двух дифференциальных операторов:

$$K(C)|_V = \sum_{\alpha \geq 0}\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}\,\frac{\partial^{|\alpha|}a_k(x,\xi)}{\partial\xi^\alpha}\,\frac{\partial^{|\alpha|}b_l(x,\xi)}{\partial x^\alpha},\ |\xi|>1 \tag{3}$$

(слагаемые последней суммы затем группируются по степеням однородности по ξ). В частности,

$$\sigma_{m+n}(C) = \sigma_m(A)\,\sigma_n(B). \tag{4}$$

В дальнейшем используется следующее свойство локальности символа п.д. оператора: для вычисления символа $K(C)$ в точке $q_0 \in T'(X)$ достаточно знать символы $K(A)$ и $K(B)$ только в некоторой окрестности $U \subset T'(X)$ этой точки; аналогичное свойство имеется при вычислении слагаемых полного символа п.д. оператора в другой системе координат.

Оператор P называется эллиптическим, если $\sigma(P) \neq 0$ на $T'(X)$.

Пусть $\lambda = (1-\Delta)^{1/2}$, где $\Delta = -|D|^2$ - скалярный оператор Лапласа на X; λ - п.д. оператор первого порядка, эллиптический с символом $\sigma_1(\lambda) = |\xi|$ при $|\xi|>1$ в соответствующей системе координат.

В дальнейшем мы будем рассматривать матричные п.д. операторы. Целочисленному вектору $s = (s^1, \dots, s^l)$ сопоставим $(l \times l)$-матричный диагональный оператор J_s, у которого по диагонали стоят операторы $\lambda^{s^1}, \dots, \lambda^{s^l}$, а остальные элементы равны нулю.

Как известно [6, 4] пара векторов $(s;t)$ называется порядком $(l_1 \times l_2)$-матричного оператора $A = \{a_{ij}\}_{i=1,\dots,l_1;\ j=1,\dots,l_2}$, если $\operatorname{ord} a_{ij} \leq s^i + t^j$. Тогда s^i - порядки строк, а t^j - порядки столбцов оператора A. Порядок $(s;t)$ позволяет выделить главную часть оператора A; её символ $\sigma_{s,t}(A) = \{\sigma_{s^i+t^j}(a_{ij})\}$ осуществляет отображение линейных пространств $E_{l_2} \to E_{l_1}$ на $T'(X)$. Оператор A называется (s,t)-эллиптический, если ядро этого отображения тривиально, т.е. если $l_1 \geq l_2$ и ранг $\sigma_{s,t}(A)$ в $T'(X)$ максимален (равен l_2).

Эллиптический оператор A порядка $(s;t)$ на многообразии без края имеет левый регуляризатор, т.е. такой оператор A^L порядка $(-t;-s)$, что $A^L\cdot A=I+T_1$, где I - единичный оператор, а $\operatorname{ord}T_1=-\infty$. Если $\ell_1=\ell_2$, то A^L является также правым регуляризатором A^R: $A\cdot A^R=I+T_2$, $\operatorname{ord}T_2=-\infty$ [4], и любые два регуляризатора отличаются на оператор порядка $-\infty$.

Операторы λ^{-s} и J_{-s} являются регуляризаторами операторов λ^s и J_s. Оператор A порядка $(s;t)$ представим в виде

$$A=J_sA^0J_t+T,\quad A^0=J_{-s}AJ_{-t},\tag{5}$$

где A^0 - оператор не выше нулевого порядка на X, $\operatorname{ord}T=-\infty$.

Так как ранги матриц $\sigma_{s,t}(A)$ и $\sigma_0(A^0)$ в $T'(X)$ совпадают, то A^0 - эллиптический оператор порядка нуль, если оператор A — (s,t)-эллиптичен, и обратно. Левый регуляризатор эллиптического оператора A имеет вид: $A^L=J_{-t}(A^0)^LJ_{-s}$.

Пусть k - действительное число, а s - целочисленный вектор. Через $H^{k+s}(X)$ обозначим прямое произведение пространств С.Л.Соболева $H^{k+s}(X)=W_2^{(k+s^1)}(X)\ \dots\ W_2^{(k+s^\ell)}(X)$.

Квадратный п.д. оператор A порядка $(s;t)$ - нётеров в пространствах $H^{k+t}(X)\xrightarrow{A}H^{k-s}(X)$ на многообразии X без края тогда и только тогда, когда он $(s;t)$-эллиптичен (см. [4]).

Мы будем использовать также некоторые локальные понятия (см. [5]). Оператор P имеет в угловой области $\mathcal{U}\subset T'(X)$ порядок не выше m, если все члены асимптотического ряда $K(P)$ в $\mathcal{U}$, порядок однородности которых по ξ выше m, равны нулю (вне $\mathcal{U}$ сумма $K(P)$ может иметь ненулевые слагаемые большего порядка). Тогда функция, совпадающая в $\mathcal{U}$ с тем членом ряда, порядок однородности которого по ξ равен m, называется локальным символом оператора и обозначается через $\sigma_m(P)|_{\mathcal{U}}$. Скалярный оператор P называется эллиптическим в $\mathcal{U}$, если $\sigma_m(P)\neq 0$ всюду в $\mathcal{U}$. Свойство локальности символа п.д. оператора обосновывает эти определения, а также справедливость формулы $\sigma_{m+n}(C)|_{\mathcal{U}}=\sigma_m(A)|_{\mathcal{U}}\sigma_n(B)|_{\mathcal{U}}$ аналогичной (4).

Аналогично матричный оператор A называется (s,t)-эллиптическим в $\mathcal{U}$, если матрица $\sigma_{s,t}(A)$ имеет в $\mathcal{U}$ максимальный ранг и $\ell_1\geq\ell_2$. Тогда в представлении (5) оператор A^0 эллиптичен в $\mathcal{U}$. Если $\mathcal{U}\neq T'(X)$, то представление (5) будем называть локальным, а операторы A и A^0 локально эллиптическими.

Далее, оператор $\hat{T}$ имеет в $\mathcal{U}$ порядок $-\infty$, если $K(\hat{T})\equiv 0$ в $\mathcal{U}$. Оператор $\hat{P}^L$ (определенный на всем X) называется локальным левым регуляризатором для P, если $\hat{P}^LP=I+\hat{T}$, причем порядок $\hat{T}$ равен $-\infty$ в $\mathcal{U}$. Используя свойство локальности символа, легко доказывается следующая [4, 5].

Л е м м а. Для п.д. оператора A порядка $(s;t)$ в $\mathcal{U}$ равносильны следующие утверждения:

а) оператор A (s,t) -эллиптичен в $\bar{\mathcal{U}}\subset T'(X)$ ($\bar{\mathcal{U}}$ - замыкание $\dot{\mathcal{U}}$ в $S(X)$) ;

б) оператор A имеет левый локальный регуляризатор, который является п.д. оператором порядка $(-s;-t)$ в $\mathcal{U}$ с символом максимального ранга.

Если A - квадратный оператор, (s,t) - эллиптический в $\bar{\mathcal{U}}$, то он имеет также локальный правый регуляризатор $\hat{A}^{R}$, который отличается от $\hat{A}^{L}$ на оператор $\hat{T}$ порядка $-\infty$ в $\mathcal{U}$. Сопряженный оператор A^{*} тоже имеет локальный регуляризатор.

З а м е ч а н и я. 1) В силу (5) достаточно проверить это утверждение для оператора A^{0} нулевого порядка. 2) Символ оператора A^{0L} равен левой обратной матрицы $\sigma_0(\mathring{A})|_{\bar{\dot{\mathcal{U}}}}$, умноженной на финитную бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(x,\xi)$ на $S(X)$, равную единице в $\bar{\dot{\mathcal{U}}}$, с носителем в некоторой окрестности $\dot{\mathcal{U}}_1\supset\bar{\dot{\mathcal{U}}}$, где матрица A^{0} еще эллиптична. В $\mathcal{U}$ $\varphi\left(x,\frac{\xi}{|\xi|}\right)$ является однородной функцией от ξ нулевого порядка.

§ 2. Слабоэллиптические п.д. операторы

В этом параграфе определяется класс неэллиптических п.д. операторов, которые обладают свойствами, близкими к свойствам эллиптических систем. В частности, квадратные системы из этого класса на многообразии без края имеют левый и правый регуляризаторы. Будем называть системы этого класса слабоэллиптическими.

Как показывают примеры, класс слабоэллиптических систем шире класса равномерно неэллиптических систем, изученных в работе [5].

Напомним, что система называется эллиптической по Дуглису-Ниренбергу, если существуют порядки s и t ее строк и столбцов такие, что система (s,t) -эллиптична. Такая система может оказаться неэллиптической при другом выборе порядков ее строк и столбцов, но всегда является слабоэллиптической. Кроме того, композиция двух операторов, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу, может оказаться неэллиптической, но всегда является слабоэллиптической. Такой же является композиция эллиптического и слабоэллиптического операторов, а также двух слабоэллиптических операторов. Так что класс п.д. операторов, включающий все эллиптические и слабоэллиптические системы, инвариантен относительно операции умножения операторов (аналогично классу однородных эллиптических систем).

Слабая эллиптичность системы определяется по ее полному символу. Приводимое ниже определение слабой эллиптичности удобно при построении регуляризаторов и доказательстве теорем о разрешимости, которое будет проведено в следующем параграфе.

Проверка принадлежности системы к классу слабоэллиптических систем осуществляется с помощью двух других эквивалентных определений. Последнее определение глобальной приводимости оператора к прямоугольному эллиптическому отличается от аналогичного определения в [5] тем, что, сохраняя основные свойства расширяющего оператора, мы не предполагаем постоянства ранга матриц в цепочке последовательных расширений оператора. Слабоэллиптическими являются те системы, которые допускают цепочку последовательных расширений до эллиптического оператора. Как показывают примеры, предположение, что максимум ранга символической матрицы меньше ее размеров, еще не гарантирует возможности расширения системы. Мы допустим вначале, что $n>1$ и многообразие X связно.

Определим вначале все понятия для оператора A^0 нулевого порядка в представлении (5) § 1.

Пусть $\ell_1 \geq \ell_2$ и A^0 - $(\ell_1 \times \ell_2)$ -матричный п.д. оператор нулевого порядка неэллиптический на многообразии X.

О п р е д е л е н и е 1. Оператор A^0 называется слабоэллиптическим на X, если для любой точки q из $T'(X)$ существует угловая окрестность $U \subset T'(X)$ и векторы $s_1, \ldots, s_r$ такие, что оператор A^0 представим в виде

$$A^0 = J_{s_1} A_1^0 \ldots J_{s_r} A_r^0 + \hat{T}, \tag{1}$$

где J_{s_k} - диагональные операторы, $k=1,\ldots,r$, A_k^0 - матричные п.д. операторы нулевого порядка эллиптические в U, а $\hat{T}$ - оператор порядка $-\infty$ в U.

При $\ell_1 = \ell_2$ все операторы A_k^0 квадратные $(\ell_1 \times \ell_1)$; при $\ell_1 > \ell_2$ один из операторов A_k^0 прямоугольный $(\ell_1 \times \ell_2)$, остальные операторы квадратные.

Оператор, имеющий представление (1) с эллиптическими операторами A_k^0 только в окрестности U, назовем слабоэллиптическим в U. Представление (1) неоднозначно и зависит от окрестности U. Целое число σ, равное при $\ell_1 = \ell_2$ в U сумме компонент s_k^j векторов s_k:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{r} |s_k|, \quad |s_k| = \sum_{j=1}^{\ell} s_k^j, \tag{2}$$

является инвариантом слабоэллиптического оператора. Назовем его степенью слабоэллиптического оператора. Действительно, если

$$A^0 = J_{t_1} B_1^0 \ldots J_{t_m} B_m^0 + \hat{T}_1 \tag{1 }$$

- другое представление A^0 с эллиптическими в U операторами $B_1, \ldots, B_k^0$, то

$$K(J_{s_1} A_1^0 \ldots J_{s_r} A_r^0) = K(J_{t_1} B_1^0 \ldots J_{t_m} B_m^0) \quad \text{в } U.$$

Главные члены определителей каждой из частей этого равенства имеют вид $|\xi|^{\sigma}\prod_{k=1}^{z}\det\sigma(A_k^0(x,\xi))$ и $|\xi|^{\sigma'}\prod_{j=1}^{m}\det\sigma(B_j^0(x,\xi))$, где $\sigma'=\sum_{j=1}^{m}|t_j|$.
Так как определители от $\sigma(A_k^0)$ и $\sigma(B_j^0)$ не равны нулю в U и имеют по ξ нулевой порядок, то, фиксируя $(x,\xi)\in U$ и устремляя $|\xi|$ к ∞, получаем $\sigma=\sigma'$.

Нетрудно убедиться, что σ не меняется также при преобразованиях координат. Следовательно, степень слабоэллиптического на X оператора определяется однозначно на каждой связной компоненте многообразия $T'(X)$.

З а м е ч а н и е. Если полный символ оператора A^0 не зависит от x в U, то аналогично предыдущему получим, что $\det A^0$ - эллиптический в U оператор порядка σ.

О п р е д е л е н и е 1'. Оператор A порядка (s,t) называется слабоэллиптическим на X, если соответствующий ему оператор $A^0=J_{-s}AJ_{-t}$ нулевого порядка слабоэллиптичен на X. При этом оператор A представим в виде

$$A = J_{s+s_1}A_1^0\ldots J_{s_z}A_z^0J_t + \hat{T}, \tag{1'}$$

и его степень $\sigma=|s|+|t|+|s_1|+\ldots+|s_z|$.

В силу представления (5) § 1, композиция конечного числа эллиптических операторов является слабоэллиптическим на X оператором. Такие операторы имеют единое (глобальное) представление (1), т.е. $U=T'(X)$ и операторы A_k^0 эллиптичны всюду на X.

Класс слабоэллиптических систем является также естественным обобщением класса равномерно неэллиптических систем [5], которые имеют представление (1) в общем случае только локально $(U\neq T'(X))$ с $z=2$, $s_1=0$ и $\sigma=-\sum_{k=0}^{p}(m-k)t_k$, где t_k - размеры блоков блочной локально эллиптической матрицы порядка m, к которой приводится оператор, а $p+1$ - их количество. Например, оператор $\mathrm{rot}+\lambda I_3$ с $\lambda\neq 0$.

Рассматривая композиции операторов этих двух классов, легко получить примеры слабоэллиптических систем, не принадлежащие ни к одному из них.

Важным свойством квадратных слабоэллиптических операторов является наличие у них левых и правых регуляризаторов.

Л е м м а 1. Пусть A - квадратный слабоэллиптический оператор в $\bar{U}\subset T'(X)$ порядка (s,t) и степени σ, тогда он имеет левый и правый локальные регуляризаторы, которые являются слабоэллиптическими в U операторами порядка $(-t,-s)$ и степени $-\sigma$.

Эта лемма доказывается так же, как и лемма § 1. Левый регуляризатор $\hat{A}^L$ (который является также правым регуляризатором) имеет вид

$$\hat{A}^L = J_{-t}(\hat{A}_z^0)^L J_{-s_z}\ldots(\hat{A}_1^0)^L J_{-s_1-s}.$$

В § 3 мы докажем, что оператор A слабоэллиптический на X имеет левый и правый глобальные регуляризаторы.

Пусть S - матричный $(\ell_1 \times \ell_2)$ п.д. оператор нулевого порядка неэллиптический на X; $\ell_1 \geq \ell_2$.

Определение 2. Оператор S нулевого порядка допускает $\hat{C}$-преобразование в окрестности точки $q_0 \in T'(X)$, если существует окрестность $\mathcal{U} \subset T'(X)$ этой точки и квадратная $(\ell_1 \times \ell_1)$-матрица $\hat{C}$ п.д. операторов не выше первого порядка такая, что

а) $\hat{C} = J_e \hat{C}^0$, причем компоненты вектора e равны 0 или 1, $|e|>0$, а матрица $\hat{C}^0$ нулевого порядка эллиптична в $\mathcal{U}$;

б) порядок оператора $\hat{C} S'$ не превосходит нуля т.е. $\sigma_1(\hat{C})\sigma_0(S) = 0$ в $T'(X)$.

Чтобы выяснить, допускает ли заданный оператор S преобразование C в окрестности точки $q_0 \in T'(X)$, достаточно проверить выполнение следующего эквивалентного а); б) условия.

(1^0) Существует окрестность $\mathcal{U}$ точки q_0, в которой система линейных алгебраических уравнений $\vec{y}\sigma_0(S) = 0$ имеет $k>0$ линейно-независимых решений $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$, зависящих гладко от $(x, \dot{\xi}) \in \dot{\mathcal{U}}$ и однородных по ξ нулевого порядка.

Действительно, из векторов $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ составим $(k \times \ell_1)$-матрицу $Y'(x,\xi)$ ранга k. Достроим Y' до квадратной невырожденной матрицы $Y(x,\xi)$ нулевого порядка по ξ гладкой по $(x, \dot{\xi}) \in \dot{\mathcal{U}}$. Это всегда можно сделать. Например, выбрав ненулевой минор в Y' порядка k, Y' достраиваем, используя строки единичной матрицы. Можно строки дополнительной $(\ell_1 - k \times \ell_1)$-матрицы Y'' подбирать ортогональными строкам Y', решая систему $Y''(Y')^* = 0$ с сопряженной матрицей $(Y')^*$. Далее строится оператор $\hat{C}^0$, символ которого в $\mathcal{U}$ равен $Y(x,\xi)$ (см. замечание 2 § 1), и оператор $\hat{C}$, удовлетворяющий условиям а), б).

Обратное утверждение очевидно.

В случае $\ell_1 = \ell_2 (=\ell)$ условие (1^0) предполагает, что ранг $\sigma_0(A^0)$ не превосходит в $\mathcal{U}$ числа $\rho < \ell$. Если ранг $\sigma_0(S)$ постоянный в $\mathcal{U}$ (и равен $\rho < \ell$), то всегда существует [5] $\ell - \rho$ векторов $\vec{y}$, удовлетворяющих условию (1^0).

В общем случае условие $\rho < \ell$ в окрестности q_0 не гарантирует еще выполнения (1^0), как показывает простой пример оператора

$$S = \begin{pmatrix} a(x) & \lambda^{-1} \\ \lambda^{-1} & b(x) \end{pmatrix} \tag{3}$$

с гладкими коэффициентами $a(x)$ и $b(x)$ такими, что $ab \equiv 0$ в шаре $|x|<1$, но $a \neq 0$ при $x_1 < 0$, а $b \neq 0$ при $x_1 > 0$. Ранг $\sigma_0(S)$ в шаре $|x|<1$ меньше или равен 1, но каждое гладкое решение $\vec{y}\sigma_0(S) = 0$

в окрестности любой точки x_0 сечения $x_1 = 0$ неизбежно обращается в нуль при $x_1 = 0$.

О п р е д е л е н и е 3. Оператор S нулевого порядка называется приводимым в окрестности точки q_0 из $T'(X)$ к локально эллиптическому оператору, если существует окрестность $U \subset T'(X)$, в которой S допускает цепочку $\hat{C}$ -преобразований

$$\hat{S}_1 = \hat{C}_1 S, \quad \hat{S}_2 = \hat{C}_2 \hat{S}_1, \ldots, \hat{S}_p = \hat{C}_p \hat{S}_{p-1} \tag{4}$$

до эллиптического в U оператора $\hat{S}_p$ нулевого порядка.

Целое число $\omega < 0$, равное $-\sum\limits_{k=1}^{p} |\ell_k|$ при $\ell_1 = \ell_2$ в U, является инвариантом квадратного оператора S, приводимого к локально эллиптическому оператору $\hat{S}_p$, так как ω не зависит от выбора цепочки $\hat{\mathcal{D}}_p = \hat{C}_p \ldots \hat{C}_1$ локальных C -преобразований системы.

Действительно, пусть $\hat{\mathcal{D}}'_{p'} = \hat{C}'_{p'} \ldots \hat{C}'_1$ - другая цепочка локальных C -преобразований, приводящая оператор S к эллиптическому в U оператору $\hat{S}'_{p'} = \hat{\mathcal{D}}'_{p'} S$ нулевого порядка. Квадратные операторы $\hat{\mathcal{D}}_p$ и $\hat{\mathcal{D}}'_{p'}$ порядков p и p' соответственно слабоэллиптические в $U_1; \bar{U}_1 \subset U$, имеют, согласно лемме 1, локальные регуляризаторы $\hat{\mathcal{D}}^L_p$ и $\hat{\mathcal{D}}'^L_{p'}$ порядков не выше нуля. Следовательно,

$$\hat{\mathcal{D}}'_p = B\hat{\mathcal{D}}_p + \hat{T}, \quad \hat{\mathcal{D}}_p = B'\hat{\mathcal{D}}'_{p'} + \hat{T}', \tag{5}$$

где $B = \hat{\mathcal{D}}'_{p'} \hat{\mathcal{D}}^L_p$, $B' = \hat{\mathcal{D}}_p \hat{\mathcal{D}}'^L_{p'}$ - псевдодифференциальные операторы порядков не выше p' и p, соответственно в U_1, $\operatorname{ord} \hat{T} = \operatorname{ord} \hat{T}' = -\infty$, и кроме того,

$$\hat{S}'_{p'} = B\hat{S}_p + \hat{T}_1, \quad S_p = B'\hat{S}'_{p'} + \hat{T}'_1. \tag{6}$$

Отсюда вытекает, что B и B' являются эллиптическими в U_1 матрицами нулевого порядка. В самом деле, сравнивая символы, скажем, первого из равенств (6), имеем $\sigma_{p'}(B)\sigma_0(\hat{S}_p) = 0$ при $p' > 0$ в U_1, откуда в силу невырожденности $\sigma_0(\hat{S}_p)$ в U получим $\sigma_{p'}(B) = 0$ в U_1, т.е. порядок B не превышает $p-1$. Снова сравнивания символы операторов в первой формуле (6), находим, что порядок оператора B равен нулю и $\sigma_0(B) = \sigma_0(\hat{S}'_{p'})\,\sigma_0^{-1}(\hat{S}_p)$. Следовательно, оператор B эллиптичен в U_1. Аналогично из второй формулы (6) вытекает эллиптичность B'.

Сравнивая теперь порядки и степени слабоэллиптических в U операторов $\hat{\mathcal{D}}_p$ и $\hat{\mathcal{D}}'_p$, из формулы (5) имеем $p = p'$ и $\omega = \omega'$.

Имеет место следующая

Л е м м а 2. Оператор S, приводимый к локально эллиптическому в $\bar{U}$ оператору S_p, является слабоэллиптическим в U. Обратно, слабоэллиптический в $\bar{U}$ оператор S приводим к локально эллиптическому в U оператору S_p. Причем степень σ слабой эллиптичности и инвариант ω приводимого оператора совпадают.

Первая часть этого утверждения вытекает из леммы 1. Действительно, цепочка $\hat{\mathcal{D}}_p = \hat{C}_p \ldots \hat{C}_1$ является квадратным слабоэллиптическим в $\overline{\mathcal{U}}$ оператором и, следовательно, имеет локальный регуляризатор $\hat{\mathcal{D}}_p^L = \hat{C}_1^L \ldots \hat{C}_p^L$. Тогда оператор S имеет представление

$$S = (\hat{C}_1^o)^L J_{-\ell_1} \ldots (\hat{C}_p^o)^L J_{-\ell_p} S_p^o + \hat{T}$$

и в силу эллиптичности в $\mathcal{U}$ операторов $(\hat{C}_k^o)^L$ и S_p^o нулевого порядка является слабоэллиптическим в $\mathcal{U}$. При этом $\sigma = \omega$.

При доказательстве второй части воспользуемся двумя простыми утверждениями.

1. Пусть $\bar{n}$ - вектор с компонентами, равными n, A^o - эллиптический в $\mathcal{U}$ оператор нулевого порядка. Тогда

$$J_{\bar{n}} A^o = B^o J_{\bar{n}} + \hat{T}, \tag{7}$$

где B^o - также эллиптический в $\mathcal{U}$ оператор нулевого порядка. Действительно, оператор $B^o = J_{\bar{n}} A^o J_{-\bar{n}} + \hat{T}'$, причем $\sigma_0(B^o) = |\xi|^n I_{\ell_1} \sigma_0(A^o) |\xi|^{-n} I_{\ell_2} = \sigma_0(A^o)$, откуда следует его эллиптичность в $\mathcal{U}$.

Обозначим через s^μ максимум из компонент вектора s.

2. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 - два вектора с компонентами, равными 0 или 1, $|\ell_1| + |\ell_2| = \ell$, $(-\ell_j)^\mu = 0, j = 1,2$, матричный оператор A^o эллиптичен в $\mathcal{U}$, и порядок оператора $B = J_{-\ell_1} A^o J_{\ell_2}$ равен -1. Тогда

$$J_{-\ell_1} A^o J_{-\ell_2} B = B^o J_{-1} + \hat{T}, \tag{8}$$

причем оператор B^o нулевого порядка эллиптичен в $\mathcal{U}$.

Действительно, перестановка строк или столбцов оператора сохраняет его эллиптичность, поэтому мы можем предполагать, что компоненты векторов ℓ_1 и ℓ_2 упорядочены по возрастанию. Разбивая матрицу A^o на блоки, имеем

$$B^o = J_{-\ell_1} A^o J_{\bar{1}-\ell_2} = \begin{pmatrix} A_{11}^o \lambda & A_{12}^o \\ \lambda^{-1} A_{21}^o \lambda & \lambda^{-1} A_{22}^o \end{pmatrix}. \tag{9}$$

По условию, $\sigma_0(A_{11}^o) \equiv 0$ и $|\ell_1| = |\bar{1} - \ell_2|$, следовательно, матрицы A_{12}^o и A_{21}^o квадратные и эллиптические в $\mathcal{U}$ (ввиду эллиптичности A^o). Так как $\det \sigma_0(B^o) = \det \sigma_0(A_{12}^o) \det \sigma_0(A_{21}^o)$, то матрица B^o также эллиптична в $\mathcal{U}$.

Перейдем к доказательству леммы 2. Пусть оператор A^o слабоэллиптичен в $\overline{\mathcal{U}}$ и имеет представление (1). Тогда он также имеет представление

$$A^o = J_{t_1} B_1^o \ldots J_{t_r} B_r^o + \hat{T}_1, \tag{10}$$

причем вектора $t_1, \ldots, t_r$ имеют неположительные компоненты $(t_j^\mu = 0,\ j = 1, \ldots, r)$, а матрицы B_j^o эллиптичны в $\mathcal{U}$ и $\operatorname{ord} \hat{T}_1 = -\infty$. Действительно, если $s_1^\mu > 0$, то, представляя s_1 в виде $s_1 = t_1 + \bar{s}_1^\mu$, имеем $J_{s_1} = J_{t_1} J_{\bar{s}^\mu} + T$. Используя формулу (7), получаем

$$A^o = J_{t_1} B_1^o J_{s_2 + \bar{s}_1^\mu} A_2^o \ldots J_{s_r} A_r^o + \hat{T}_1.$$

Повторяя эту процедуру над оператором $J_{s_2+s^{\mu}}$ и т.д., после конечного числа преобразований добьемся того, что все $t_j^{\mu'}=0$. При этом справа от B^0_{τ} может появиться оператор $J_{\bar{n}}$ с $n>0$. Это означает, что порядок композиции операторов, стоящих слева от $J_{\bar{n}}$, равен $-n$, хотя каждый из операторов цепочки имеет нулевой порядок. Перемножая последовательно операторы и выясняя порядки цепочек $J_{t_1} B^0_1 \dots J_{t_k} B^0_k J_{t_{k+1}}$, $k=1,2,\dots$, определим места $k_1, k_2, \dots, k_m$, в которых происходит падение порядка цепочки при ее удлинении, т.е. при $k=k_1-1$ цепочка имеет нулевой порядок, а при $k=k_1$, скажем, минус первый. Тогда легко убедиться, что оператор $J_{t_{k_1}} B^0_{k_1} J_{t_{k_1+1}}$ также имеет порядок -1, и можно выделить векторы ℓ_1 и ℓ_2, удовлетворяющие условиям утверждения 2 такие, что порядок оператора $J_{-\ell_1} B^0_{k_1} J_{\ell_2}$ равен -1. Используя формулу (8), заменим его оператором $C^0_{k_1} J_{-\bar{1}} + \hat{T}$ и, "перебросив" по формуле (7) оператор $J_{-\bar{1}}$ в правую часть цепочки, получим представление вида (10), в котором правее B^0_{τ} стоит оператор $J_{\overline{n-1}}$. Повторяя конечное число раз указанные выше операции, мы получим искомое представление (10). Вектор t с $t^{\mu}=0$ представим в виде суммы векторов $-\ell_j$ с компонентами 0 или -1 и $|\ell_j|>0$, $j=1,\dots,n$. Следовательно, оператор J_t можно разложить в произведение операторов $J_{-\ell_1} \dots J_{-\ell_n} + \hat{T}$, а представление (10) оператора A^0 переписать в виде

$$A^0 = C^0_1 J_{-\ell_1} C^0_2 J_{-\ell_2} \dots C^0_m J_{-\ell_m} C^0_{m+1} + \hat{T}, \tag{11}$$

где матрицы C^0_k, $k=1,\dots,m$, нулевого порядка эллиптичны в $\mathcal{U}$ (некоторые из них единичны). Тогда операторы $C_k = J_{\ell_k}(C^0_k)$ удовлетворяют условиям а), б) определения 2, и цепочка операторов, приводящих A^0 к эллиптическому в $\mathcal{U}$ оператору C^0_{m+1} имеет вид

$$\mathcal{D}_m = J_{\ell_m}(\hat{C}^0_m)^{L} \dots J_{\ell_1}(\hat{C}^0_1)^{L}. \tag{12}$$

Так как степень σ слабой эллиптичности не зависит от выбора представления (1) или (11), то из (11),(12) имеем $\omega=\sigma$.

Из леммы 2 вытекает

Следствие 1. <u>Оператор A^0 нулевого порядка слабоэллиптичен на X тогда и только тогда, когда он приводим в окрестности любой точки $q \in T'(X)$ к локально эллиптическому оператору нулевого порядка. При этом инварианты σ и ω совпадают на каждой связной компоненте многообразия $T'(X)$.</u>

Это утверждение дает способ проверки слабой эллиптичности оператора. Имеется еще один способ.

Определение 4. Оператор S нулевого порядка допускает C-преобразование на X (глобально), если существует $(m \times \ell_1)$-матрица C п.д. операторов не выше первого порядка на X, не обязательно квадратная

$-(m > l_1)$, удовлетворяющая условиям а), б) определения 2 в области $U = T'(X)$, т.е.

а) $C = J_\ell C^0$, причем $(m \times l_1)$-матрица C^0 нулевого порядка эллиптична всюду на X , компоненты вектора ℓ равны 0 или 1 и $|\ell| > 0$;

б) порядок оператора CS не превосходит нуля на X .

Кроме того, в случае $m > l_1$ мы предположим, что

в) ранг $\sigma_1(C)$ больше нуля в $T'(X)$.

Л е м м а 3. Оператор S' нулевого порядка допускает глобальное C-преобразование тогда и только тогда, когда он допускает локальное $\hat{C}$-преобразование в окрестности любой точки $q \in T'(X)$.

Действительно, если S допускает глобальное преобразование C , то при $m = l_1$, очевидно, оно же является и локальным преобразованием. При $m > l_1$, в силу в) и компактности $S(X)$, максимальное число k линейно независимых строк в матрице $\sigma_1(C)|_q$ больше нуля. Выберем k таких строк в $\sigma_1(C)$ и обозначим через C_1 часть оператора C , составленную из этих строк: $C_1 = J_1 C_1^0$. Так как $\sigma_1(C_1) = |\xi|\sigma_0(C_1^0)$ при $|\xi| > 1$ и $\sigma_1(C_1)\sigma_0(S) = 0$, то ранг матрицы $\sigma_0(C_1^0)/_q$ также равен k и $k \leq l_1$.

В силу эллиптичности C^0 в матрице C при $k < l_1$ найдется $l_1 - k$ строк нулевого порядка (образующих матрицу C_2^0) таких, что оператор $\begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix}$ нулевого порядка эллиптичен в точке q , т.е. $\det \sigma_0 \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix} \neq 0$ в q . По непрерывности этот определитель отличен от нуля также в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки q . Следовательно, оператор S допускает локальное преобразование $\hat{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ в окрестности U точки q .

Обратно, пусть оператор S допускает локальное $\hat{C}$-преобразование в окрестности каждой точки q из $T'(X)$. В силу компактности многообразия $S(X)$ существует конечное покрытие $T'(X)$ окрестностями U_j , $j = 1, \dots, N$, в каждой из которых S допускает преобразование $\hat{C}_j$. Тогда оператор C , осуществляющий глобальное преобразование S , строится как блок-матрица из операторов $\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_N$:

$$C = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ \vdots \\ \hat{C}_N \end{pmatrix}.$$

Отметим, что другой способ построения глобального C-преобразования для оператора S с символом $\sigma(S)$ постоянного ранга указан в работе [5] .

О п р е д е л е н и е 5. Оператор S нулевого порядка называется глобально приводимым к эллиптическому на X оператору нулевого порядка, если он допускает цепочку C-преобразований $S_1 = C_1 S$, $S_2 = C_2 S_1, \dots, S_p = C_p S_{p-1}$ до эллиптического на X (вообще говоря, прямоугольного) оператора S_p нулевого порядка (т.е. ранги матриц $\sigma_0(S), \sigma_0(S_1), \dots, \sigma_0(S_{p-1})$ не максимальны в $T'(X)$, а ранг $\sigma_p(S_p)$ максимален и равен l_2).

О п р е д е л е н и е 5$'$. Оператор A порядка (s,t) называется приводимым к эллиптическому на X оператору, если соответствующий оператор $A^0 = J_{-s} A J_{-t}$ нулевого порядка приводим к эллиптическому на X оператору $A^0_p = \mathcal{D}_p A^0$ нулевого порядка, $\mathcal{D}_p = C_p \dots C_1$. При этом оператор A приводится к эллиптическому на X оператору $A^0_p J_t = \mathcal{D}_p J_{-s} A + T$ порядка $(0,t)$.

Мы скажем, что цепочка $\mathcal{D}_p = C_p \dots C_1$ глобальных преобразований оператора A удовлетворяет условию г), если матрицы $\sigma_1(\mathcal{D}_1), \sigma_1(\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1^L), \dots, \sigma_1(\mathcal{D}_p \mathcal{D}_{p-1}^L)$ имеют в $T'(X)$ постоянные ранги. Имеет место следующая

Т е о р е м а 1. Для квадратного матричного п.д. оператора A порядка (s,t) следующие условия эквивалентны:

1) оператор A слабоэллиптичен на многообразии X ;

2) оператор A приводим в окрестности любой точки из $T'(X)$ к локально эллиптическому оператору.

При этом степень слабой эллиптичности и инвариант оператора, приводимого к локально эллиптическому, совпадают в каждой из связных компонент многообразия $T'(X)$. Кроме того, слабоэллиптический оператор глобально приводим к оператору, эллиптическому на X . Оператор, приводимый к эллиптическому на X оператору с помощью цепочки, удовлетворяющей условию г) , слабоэллиптичен.

Эквивалентность условий 1) и 2) доказана нами ранее (следствия 1 и 3 леммы 2)

Прежде чем переходить к последней части теоремы, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Л е м м а 4. Пусть квадратный оператор A^0 приводим к эллиптическому в угловой области $\mathcal{U}$ оператору $\hat{A}_p = \hat{C}_p \dots \hat{C}_1 A^0$, нулевого порядка и пусть $\hat{A}'_q = \hat{C}'_q \dots \hat{C}'_1$, A^0 - другая цепочка $\hat{C}$ -преобразований оператора A^0 в области $\mathcal{U}$ такая, что ее инвариант $\omega' > \omega$. Тогда для любой области $\mathcal{U}'$ такой, что $\bar{\mathcal{U}}' \subset \mathcal{U}$, оператор $\hat{A}'_q$ допускает цепочку $\hat{C}$-преобразований $\hat{A}'_{q+1} = \hat{C}'_{q+1} \hat{A}'_q, \dots, \hat{A}'_m = \hat{C}'_m A'_{m-1}$ с инвариантом ω'' до эллиптического в $\mathcal{U}'$ оператора $\hat{A}'_m$. Причем

$$\omega'' = \omega - \omega'.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор A^0 в области $\mathcal{U}_1$ $(\bar{\mathcal{U}}_1 \subset \mathcal{U})$ является слабоэллиптическим степени ω и имеет представление (1). Тогда, в силу леммы 2, оператор $\hat{A}'_q$ также слабоэллиптичен в $\mathcal{U}_1$ степени $\omega - \omega'$. Применив вторую часть леммы 2, получим, что оператор $\hat{A}'_q$ приводим к локально эллиптическому в $\mathcal{U}'$ $(\bar{\mathcal{U}}' \subset \mathcal{U}_1)$ оператору $\hat{A}'_m$ с помощью цепочки $\hat{C}'_{q+1}, \dots, \hat{C}'_m$ преобразований, инвариант которой ω'' равен $\omega - \omega'$. Что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Если $\omega' = \omega$, то оператор $\hat{A}'^0_q$ эллиптичен в $\mathcal{U}'$. Действительно, $\hat{A}'^0$ является слабоэллиптическим в $\mathcal{U}_1$ оператором нулевой степени и нулевого порядка. Тогда он имеет в $\mathcal{U}$ представление (10), в котором все векторы t_j имеют неположительные компоненты и их сумма равна нулю. Следовательно, все t_j равны нулю и оператор $\hat{A}'_q$ эллиптичен в $\mathcal{U}'$.

Определение 6. Преобразование $\hat{C}$ оператора A^0 назовем максимальным в $\mathcal{U}$, если ненулевые строки матрицы $\sigma_1(C)$ образуют максимальный набор линейно-независимых в каждой точке области $\mathcal{U}$ решений системы $\vec{y}\cdot\sigma_0(A^0)=0$, зависящих гладко от $(x,\dot{\xi})\in\dot{\mathcal{U}}$.

Если преобразование C не максимально в $\mathcal{U}$, то, очевидно, можно построить другое преобразование $\hat{C}'$, которое будет максимальным в $\mathcal{U}$. Отметим, что оно может оказаться не максимальным в подобласти $\mathcal{U}_1\subset\mathcal{U}$; однако для любой точки $q\in T'(X)$ существует угловая окрестность $\mathcal{U}_q$ этой точки и максимальное $\hat{C}$-преобразование в $\mathcal{U}_q$, которое будет максимальным для любой другой окрестности $\mathcal{U}'_q$ $(\overline{\mathcal{U}}'_q\subset\mathcal{U}_q)$ точки q.

Из леммы 4 вытекает

Следствие. <u>Если оператор A^0 приводим к локально эллиптическому в угловой области $\mathcal{U}$ оператору $\hat{A}_p$ с помощью цепочки $\hat{C}_1,\dots,\hat{C}_p$ не обязательно максимальных $\hat{C}$-преобразований, то в любой области $\mathcal{U}'$ $(\overline{\mathcal{U}}'\subset\mathcal{U})$ можно построить цепочку $\hat{C}'_1\dots\hat{C}'_q$ максимальных $\hat{C}$-преобразований, приводящую A^0 к эллиптическому в $\mathcal{U}'$ оператору $\hat{A}'_q$</u>.

В дальнейшем все $\hat{C}$-преобразования будем считать максимальными.

Эквивалентность $\hat{C}$-преобразований.

Пусть $\hat{C}$ и $\hat{C}'$ - два $\hat{C}$-преобразования оператора A^0, построенные по угловой области $\mathcal{U}$. Тогда для любой угловой области $\mathcal{U}_1$ такой, что $\overline{\mathcal{U}}_1\subset\mathcal{U}$, они имеют локальные регуляризаторы $\hat{C}^L$ и $\hat{C}'^L$. Следовательно,

$$\hat{C}'=B\hat{C}+\hat{T}\quad,\quad\hat{C}=B'C'+\hat{T}',\tag{13}$$

причем порядки операторов

$$B=\hat{C}'\hat{C}^L\quad\text{и}\quad B'=\hat{C}\hat{C}'^L\tag{14}$$

в $\mathcal{U}$ не выше единицы, а операторов $\hat{T}$ и $\hat{T}'$ равны $-\infty$.

Если компоненты векторов ℓ и ℓ' упорядочены по возрастанию, то оператор B, например, можно записать в блочном виде как

$$B=J_{\ell'}\,\mathring{C}'\,\mathring{C}^L\,J_{-\ell}=\begin{pmatrix}B^0_{11} & B^0_{12}\,\lambda^{-1}\\ \lambda B^0_{21} & \lambda B^0_{22}\,\lambda^{-1}\end{pmatrix},\tag{15}$$

где $B^0=\mathring{C}'\cdot\mathring{C}^L$ - эллиптическая в $\overline{\mathcal{U}}_1$ матрица нулевого порядка.

Обозначим через C_2 часть матрицы C, составленную из тех ее строк, порядки которых равны единице. Оставшуюся часть C обозначим через C_1. Аналогично разобьем матрицу C'.

Л е м м а 5. Оператор $\mathcal{B}$ имеет нулевой порядок в области $V\,(\overline{V}\subset \mathcal{U})$ тогда и только тогда, когда существует матрица $M^0(x,\xi)$, однородная по ξ нулевой степени класса $C^\infty(\overset{\circ}{V})$ и такая, что

$$\sigma_1(\hat{C}_2') = M^0\cdot\sigma_1(\hat{C}_2) \quad \text{в } V. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть порядок оператора $\mathcal{B}$ равен нулю в V, т.е. $\sigma_0(\mathcal{B}_{21}^0)=0$. Тогда из (13) имеем $\sigma_1(C)=\sigma_0(\mathcal{D})\sigma_1(C)$ в любой области $V'(\overline{V}'\subset V)$. Откуда, учитывая (15), получаем формулу (16) в V' с $M^0=\sigma_0(\mathcal{B}_{22}^0)$. В силу произвольности V' это соотношение выполнено для любой точки $q\in V$. Обратно, из формул (13) и (15) имеем

$$\sigma_1(C_2') = |\xi|\sigma_0(\mathcal{B}_{21})\sigma_0(C_1)+\sigma_0(\mathcal{B}_{22})\sigma_1(C_2). \tag{17}$$

Если выполнено условие (16), то (17) можно переписать в виде

$$\left[\sigma_0(\mathcal{B}_{21}),\sigma_0(\mathcal{B}_{22})-M^0\right]\begin{bmatrix}\sigma_0(C_1^0)\\ \sigma_0(C_2^0)\end{bmatrix} = 0, \tag{18}$$

где квадратными скобками обозначены блок-матрицы, причем последняя из них есть $\sigma_0(C^0)$. Так как эта матрица невырожденна в V, то $\sigma_0(\mathcal{B}_{21})=0$, $\sigma_0(\mathcal{B}_{22})=M^0$ и, следовательно, порядок оператора $\mathcal{B}$ в области V равен нулю.

С л е д с т в и е. Оператор $\mathcal{B}$ имеет нулевой порядок и эллиптичен в области V тогда и только тогда, когда наряду с матрицей M^0, удовлетворяющей условию (16), существует матрица N^0, однородная по ξ нулевой степени класса $C^\infty(V)$ и такая, что

$$\sigma_1(C_2) = N^0(x,\xi)\,\sigma_1(C_2') \quad \text{в } V. \tag{19}$$

Действительно, если оператор $\mathcal{B}$ имеет нулевой порядок и эллиптичен, то оператор $\mathcal{B}'=\mathcal{B}^L$ также имеет нулевой порядок в V'. Следовательно, условие (19) выполняется. Обратно, из условий (16) и (19) вытекает, что $|\ell|=|\ell'|$ и $\sigma_0(\mathcal{B}_{21}^0)=0$ в V. Так как матрица $\mathcal{B}^0$ в (15) эллиптична в $V\subset\mathcal{U}_1$ и

$$\det\sigma_0(\mathcal{B})=\det\begin{bmatrix}\sigma_0(\mathcal{B}_{11}^0) & 0\\ \sigma_0(\lambda\mathcal{B}_{12}) & \sigma_0(\mathcal{B}_{22}^0)\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\sigma_0(\mathcal{B}_{11}^0) & \sigma_0(\mathcal{B}_{12}^0)\\ 0 & \sigma_0(\mathcal{B}_{22}^0)\end{bmatrix},$$

то матрица $\mathcal{B}$ также эллиптична в V.

Пусть $\hat{C}$ и $\hat{C}'$ -два $\hat{C}$ -преобразования оператора A в окрестностях $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, соответственно. И пусть $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2\neq\varnothing$.

О п р е д е л е н и е 7. Преобразования $\hat{C}$ и $\hat{C}'$ назовем эквивалентными в области $V\subset\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$, если оператор $\mathcal{B}=\hat{C}'\hat{C}^L$ имеет нулевой порядок и эллиптичен в V.

Следствие из леммы 5 показывает, что эквивалентными являются те и только те преобразования $\hat{C}$ и $\hat{C}'$, ненулевые строки символа которых, аннулирующие матрицу $\sigma_0(A)$, выражаются друг через друга по формулам (16) и (19).

Эквивалентность разбивает $\hat{C}$-преобразования на классы и позволяет связать между собой $\hat{C}$-преобразования, построенные в различных угловых областях.

Пусть $\hat{C}^{(1)}, \ldots, \hat{C}^{(N)}$ - семейство $\hat{C}$-преобразований оператора A в областях $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_N$, покрывающих $T'(X)$. И пусть C - глобальное преобразование оператора A, т.е. C - вертикальная блок-матрица, составленная из матриц $\hat{C}^{(1)}, \ldots, \hat{C}^{(N)}$.

Имеет место

Л е м м а 6. Следующие два условия эквивалентны:

1) ранг матрицы $\sigma_1(C)$ постоянный в $T'(X)$,

2) для любых i, j таких, что $\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, преобразования $\hat{C}^{(i)}$ и $\hat{C}^{(j)}$ эквивалентны в $\mathcal{U}_{ij}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Второе условие следует из первого в силу следствия из леммы 5 и свойств а), б) $\hat{C}$-преобразований.

Если выполнено условие 2), то ранги матриц $\sigma_1(\hat{C}^{(i)}), \sigma_1(\hat{C}^{(j)})$ и $\sigma_1\begin{pmatrix}\hat{C}^{(i)}\\ \hat{C}^{(j)}\end{pmatrix}$ равны в $\mathcal{U}_{ij}$, откуда вытекает постоянство ранга блок-матрицы $\sigma_1(C)$.

О п р е д е л е н и е 8. Две цепочки преобразований $\hat{\mathcal{D}}_k^{(i)} = \hat{C}_k^{(i)} \ldots \hat{C}_1^{(i)}$ в $\mathcal{U}_i$ и $\mathcal{D}_k^{(j)} = C_k^{(j)} \ldots C_1^{(j)}$ в $\mathcal{U}_j$ назовем эквивалентными в угловой области $V \subset \mathcal{U}_{ij} \neq \emptyset$, если оператор $B_{ij,k} = \hat{\mathcal{D}}_k^{(i)} \hat{\mathcal{D}}_k^{(j)*}$ имеет нулевой порядок и эллиптичен в области V.

Отметим, что если цепочки $\hat{\mathcal{D}}_k^{(i)}$ и $\hat{\mathcal{D}}_k^{(j)}$ эквивалентны в V, то матрицы $\hat{A}_k^{(i)}$ и $\hat{A}_k^{(j)}$ имеют в V одинаковые ранги.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть оператор A^0 приводим в окрестности $\mathcal{U}_q$ любой точки $q \in T'(X)$ к локально эллиптическому оператору. Покажем, что он является приводимым глобально к эллиптическому на X оператору.

Мы предполагаем, что многообразие $T'(X)$ связно.

Угловые окрестности $\dot{\mathcal{U}}_q$ образуют покрытие $S(X)$. Выберем из него минимальное конечное подпокрытие $\dot{\mathcal{U}}_1, \ldots, \dot{\mathcal{U}}_N$. В каждой $\mathcal{U}_j$ оператор A^0 имеет цепочку $\hat{C}$-преобразований $\hat{\mathcal{D}}^{(j)} = \hat{C}_{p_j}^{(j)} \ldots \hat{C}_1^{(j)}$, приводящую его к оператору $\hat{A}_{p_j}^{(j)}$ нулевого порядка, эллиптическому в $\mathcal{U}_j$. При этом, согласно следствию 1 из леммы 2, все цепочки имеют одинаковый инвариант $\omega^{(j)} = -\sum_{k=1}^{N} |\ell_k^{(j)}|$, равный степени слабой эллиптичности оператора A^0.

Любой из операторов $\hat{C}$ с $|\ell| > 1$ можно представить в виде $\hat{C} = \hat{C}_2 \hat{C}_1 + \hat{T} = J_{\ell_2}(J_{\ell_1} \hat{C}_k^{*}) + T$, где $|\ell_k| > 0$, $k = 1, 2$, и $|\ell_1| + |\ell_2| = |\ell|$. Поэтому если цепочки $\hat{\mathcal{D}}^{(j)}$ имеют различную длину p_j, то, разбивая некоторые из операторов $\hat{C}_k^{(j)}$ на части и перенумеровывая их, мы можем легко добиться того, чтобы длина каждой цепочки равнялась $p = \max_{j \in [1,N]} p_j$, $p \leq -\omega$. Например, все цепочки будут иметь длину $-\omega$, если после разбиения все операторы $\hat{C}_k^{(j)}$ таковы, что $|\ell_K^{(j)}|=1$. Можно стремиться это разбиение проводить так, чтобы полученные цепочки $\hat{\mathcal{D}}_m^{(i)}=\hat{C}_m^{(i)}\ldots\hat{C}_1^{(i)}$ и $\hat{\mathcal{D}}_m^{(j)}=\hat{C}_m^{(j)}\ldots\hat{C}_1^{(j)}$, $m=1,\ldots,p$, были эквивалентны для любых i,j, при которых $\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\neq\emptyset$.

Будем считать, что эта операция уже проделана и все цепочки имеют одинаковую длину ρ_0. Тогда цепочка $C_1,\ldots,C_p$ глобальных C-преобразований оператора A^0 строится следующим образом. Оператор C_1 строится из блоков $\hat{C}_1^{(j)}$, как это указано в лемме 3, $C_1=\begin{pmatrix}\hat{C}_1^{(1)}\\ \vdots \\ \hat{C}_1^{(N)}\end{pmatrix}$. Далее, из матриц $\hat{C}_2^{(j)}$, единичных матриц I_ℓ порядка ℓ и нулевых матриц образуем следующие блок-матрицы порядка $N\ell$:

$$\begin{pmatrix}\hat{C}_2^{(1)} & 0\ldots 0\\ 0 & I_\ell\ldots 0\\ 0 & 0\ldots I_\ell\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}I_\ell & 0\ \ldots\ 0\\ 0 & \hat{C}_2^{(2)}\ldots 0\\ 0 & 0\ \ldots\ I_\ell\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}I_\ell & 0 & 0\\ 0 & I_\ell & 0\\ 0 & 0 & \hat{C}_2^{(N)}\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Матрица C_2 строится из этих блок-матриц так же, как C_1 из $\hat{C}_1^{(j)}$, и так далее.

Легко видеть, что построенные операторы $C_1,\ldots,C_p$ удовлетворяют условиям а) - в) определения 4 и что оператор $A_p=C_p\ldots C_1A^0$ является эллиптическим на X.

Для того чтобы доказать, что построенная цепочка преобразований удовлетворяет условию г), если цепочки $\hat{\mathcal{D}}_m^{(i)}$ и $\hat{\mathcal{D}}_m^{(j)}$ эквивалентны в $\mathcal{U}'_{ij}\neq\emptyset$ при $m=1,\ldots,p$, воспользуемся следующим утверждением.

Л е м м а 7. <u>Пусть</u> $C_1,\ldots,C_p$ — <u>построенная выше цепочка глобальных</u> C <u>-преобразований оператора</u> A^0 <u>и пусть</u> $\mathcal{D}_K=C_K\ldots C_1$. <u>Следующие два условия эквивалентны:</u>

1) <u>ранги матриц</u> $\sigma_1(\mathcal{D}_1),\sigma_1(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1^L),\ldots,\sigma_1(\mathcal{D}_K\mathcal{D}_{K-1}^L)$ <u>постоянны в</u> $T'(X)$, $1\leq K\leq p$;

2) <u>цепочки локальных</u> $\hat{C}$<u>-преобразований</u> $\hat{\mathcal{D}}_1^{(i)}$ <u>и</u> $\hat{\mathcal{D}}_1^{(j)}$, $\hat{\mathcal{D}}_2^{(i)}$ <u>и</u> $\hat{\mathcal{D}}_2^{(j)},\ldots\hat{\mathcal{D}}_K^{(i)}$ <u>и</u> $\hat{\mathcal{D}}_K^{(j)}$ <u>эквивалентны в любой подобласти</u> $\hat{\mathcal{U}}'_{ij}\subset\hat{\mathcal{U}}_{ij}$ <u>для любых</u> i <u>и</u> j, <u>при которых</u> $\mathcal{U}_{ij}=\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\neq\emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы проводится индукцией по K. Случай $K=1$ рассмотрен в лемме 6. Ввиду громоздких вычислений, докажем справедливость леммы для $K=2$. В случае $K>2$ доказательство аналогично.

Пусть $\{\varphi_j(x,\dot{\xi})\}$ - разбиение единицы на $S(X)$, вписанное в покрытие $\{\dot{\mathcal{U}}_j\}$, $\varphi_j\neq 0$ в $\mathcal{U}'_j$. Тогда левый регуляризатор $\mathcal{D}_1^L$ оператора $\mathcal{D}_1=C_1$ имеет вид

$$\mathcal{D}_1^L=(\varphi_1C_1^{(1)L},\ldots,\varphi_NC_1^{(N)L}).$$

Следовательно, матрицу $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1^L$ можно переписать так:

$$\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1^L = C_2\begin{pmatrix} \hat{C}_1^{(1)}\varphi_1\hat{C}_1^{(1)L} & \dots & \hat{C}_1^{(1)}\varphi_N\hat{C}_1^{(N)L} \\ \hat{C}_1^{(N)}\varphi_1\hat{C}_1^{(1)L} & \dots & \hat{C}_1^{(N)}\varphi_N\hat{C}_1^{(N)L} \end{pmatrix} = (S_1,\dots,S_N),$$

где S_j - ее блочные столбцы размеров $(N^2\ell\times\ell)$.

Если ранг матрицы $\sigma_1(C_1)$ постоянный в $T'(X)$, то, в силу леммы 6, операторы $C_1^{(i)}C_1^{(j)L}$ являются эллиптическими нулевого порядка в $\mathcal{U}'_{ij}\subset\mathcal{U}_{ij}\neq\emptyset$. Обозначим их через $\overset{o}{B}_{ij,1}$. Легко видеть, что столбцы S_i и S_j связаны соотношением

$$S_j = S_i\overset{o}{B}_{ij,1} + \hat{T}_{ij} \qquad \text{в } \mathcal{U}'_{ij}\neq\emptyset.$$

Следовательно, матрицы $\sigma_1(S_i)$ и $\sigma_1(S_j)$ имеют равные ранги в $\mathcal{U}'_{ij}$ и

$$\operatorname{rang}\sigma_1(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1^L) = \operatorname{rang}\sigma_1(S_j) \qquad \text{в } \mathcal{U}'_j.$$

Пусть ранг $\sigma_1(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1^L)$, постоянный в $T'(X)$. Тогда матрица $\sigma_1(S_j)$ имеет постоянный ранг в $\mathcal{U}_j$, где $\varphi_j\neq 0$, который совпадает с рангом матрицы

$$\sigma_1\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{D}}_2^{(1)}\hat{C}_1^{(j)L} \\ \cdots \\ \hat{\mathcal{D}}_2^{(N)}\hat{C}_1^{(j)L} \end{pmatrix} \qquad \text{в } \mathcal{U}'_j,$$

так как остальные элементы матрицы S_j имеют порядки не выше нулевого. Блочные строки последней матрицы аннулируют матрицу $\sigma_0(\hat{A}_1^{(j)})$ в $\mathcal{U}'_{ij}$ ввиду того, что $\sigma_1(\hat{\mathcal{D}}_2^{(i)}\hat{C}_1^{(j)L})\sigma_0(\hat{A}_1^{(j)}) =$

$$= \sigma_1(\hat{\mathcal{D}}_2^{(i)}\hat{C}_1^{(j)L}\cdot\hat{C}_1^{(j)}A^0) = \sigma_1(\hat{A}_2^{(i)}) = 0.$$

Поэтому, применив аналог леммы 6 для оператора $\hat{A}_1^{(j)}$ в области $\mathcal{U}_j$, получим, что оператор $C_2^{(j)}$ эквивалентен в $\mathcal{U}'_{ij}$ оператору $\hat{\mathcal{D}}_2^{(i)}\hat{C}_1^{(j)L}$. Следовательно, оператор $\hat{\mathcal{D}}_2^{(i)}\hat{C}_1^{(j)L}\hat{C}_2^{(j)L} = \hat{\mathcal{D}}_2^{(i)}\hat{\mathcal{D}}_1^{(j)L}$ имеет нулевой порядок и эллиптичен в любой подобласти $\mathcal{U}'_{ij}\subset\mathcal{U}_{ij}$. Итак, эквивалентность цепочек $\hat{\mathcal{D}}_2^{(i)}$ и $\hat{\mathcal{D}}_2^{(j)}$ доказана.

Обратно, пусть цепочки $\hat{\mathcal{D}}_1^{(i)}$ и $\hat{\mathcal{D}}_1^{(j)}$, $\hat{\mathcal{D}}_2^{(i)}$ и $\hat{\mathcal{D}}_2^{(j)}$ эквивалентны в любой подобласти $V\subset\mathcal{U}_{ij}\neq\emptyset$. Тогда операторы $\hat{C}_2^{(j)}$ и $\hat{C}_2^{(i)}\hat{C}_1^{(i)}\hat{C}_1^{(j)L}$ также эквивалентны в $\mathcal{U}'_{ij}$. В силу аналога леммы 6, ранг матрицы $\sigma_1(S_j)$ постоянный в $\mathcal{U}'_j$. Следовательно, ранг матрицы $\sigma_1(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1^L)$ не меняется в $T'(X)$, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что если оператор A^0 приводим к локально эллиптическому оператору в окрестности любой точки из $T'(X)$ на первом шаге, т.е. для любой точки $q\in T'(X)$ существует максимальное $\hat{C}$-преобразование оператора A^0 в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки q, приводящее его к эллиптическому в $\mathcal{U}$ оператору $\hat{A}_1 = \hat{C}A$, то символ глобального C-преобразования имеет на $T'(X)$ постоянный ранг ($\cdot$ $T'(X)$ связно). В этом случае символ $\sigma_0(A)$ оператора A^0 имеет постоянный ранг в $T'(X)$.

Действительно, пусть окрестности $\{\mathcal{U}_j\}$, $j=1,\ldots,N$, образуют минимальное конечное покрытие $T'(X)$, в каждой из которых A^0 имеет преобразование $\hat{C}^{(j)}$, приводящее его к эллиптическому в $\mathcal{U}_j$ оператору $\hat{A}_1^{(j)}$. Так как $\sigma_1(\hat{C}^{(j)})\sigma_0(A)=0$ в $\mathcal{U}_j$, то ранг $\sigma_0(A)$ не превосходит $\ell-k_j$, где $k_j=|\ell_j|$ есть ранг $\sigma_1(\hat{C}^{(j)})$ в $\mathcal{U}_j$. С другой стороны, из эллиптичности $\hat{A}_1^{(j)}$ в $\mathcal{U}_j$ следует, что ранг матрицы $\sigma_0(\hat{C}_1^{(j)}A)=\sigma_0(\hat{C}_1^{(j)})\sigma_0(A)$ равен $\ell-k_j$. Здесь через $\hat{C}_1^{(j)}$ обозначены те $\ell-k_j$ строк матрицы $\hat{C}^{(j)}$, порядки которых равны нулю. Так как ранг $\sigma_0(\hat{C}_1^{(j)})$ равен $\ell-k_j$ ввиду эллиптичности в $\mathcal{U}_j$ оператора $\hat{C}^{(j)}$ нулевого порядка, то ранг матрицы $\sigma_0(A)$ не меньше $\ell-k_j$. Из двух противоположных неравенств следует, что ранг матрицы $\sigma_0(A)$ равен $\ell-k_j$ в $\mathcal{U}_j$. Тогда $\ell-k_i=\ell-k_j$ в пересечении $\mathcal{U}_{ij}\neq\emptyset$, т.е. $k_i=k_j$ в $\mathcal{U}_{ij}$, откуда вытекает, что матрица $\sigma_0(A)$ имеет постоянный ранг в любой связной компоненте $T'(X)$. Легко убедиться, что ненулевые строки $\sigma_1(\hat{C}^{(j)})$ и $\sigma_1(\hat{C}^{(i)})$ удовлетворяют [5] тогда соотношениям (16), (19) и, следовательно, символ $\sigma_1(C)$, глобально расширяющей матрицы, имеет в $T'(X)$ постоянный ранг.

Равномерно неэллиптические операторы [5] также допускают цепочку глобальных преобразований, удовлетворяющих условию г).

Для общего слабоэллиптического оператора этот вопрос остается открытым.

Пусть оператор A^0 глобально приводим к эллиптическому на X оператору $A_p=C_p\ldots C_1A$ нулевого порядка с помощью цепочки, удовлетворяющей условию г). Покажем, что тогда оператор A^0 приводим в окрестности любой точки $q\in T'(X)$ к локально эллиптическому в $\mathcal{U}$ оператору $\hat{A}_p$.

Если все операторы C_j квадратные $(m_j=\ell)$, то это, очевидно, так. Поэтому мы будем предполагать, что $\ell<m_1<m_2<\ldots<m_p$.

В силу леммы 3 в матрице C_1 можно выделить ℓ строк, которые составляют локальное преобразование $\hat{C}_1$ оператора A^0 в окрестности $\mathcal{U}$ точки q. Оператор C_1 представим в виде $C_1=\begin{pmatrix}\hat{C}_1\\ C_1'\end{pmatrix}$, меняя, если необходимо, порядки его строк. Так как ранг матрицы $\sigma_1(C_1)$, в силу условия г), постоянный в $\mathcal{U}$, то ненулевые строки матрицы $\sigma_1(C_1')$ линейно выражаются через строки матрицы $\sigma_1(\hat{C}_1)$ и, следовательно, согласно лемме 5, оператор $B_1=C_1'\hat{C}^L$ имеет в $\mathcal{U}$ нулевой порядок.

З а м е ч а н и е. В лемме 5 предполагается, что оператор C' квадратный. Однако, как видно из доказательства леммы, существенно, что оператор $\hat{C}$ квадратный, оператор C' может быть и прямоугольной матрицей.

В силу формулы (13) оператор C_1 представим в виде

$$C_1=\begin{pmatrix}\hat{C}_1\\ C_1'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{C}_1\\ B_1\hat{C}_1+\hat{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_\ell & 0\\ B_1 & I_{m_1-\ell}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{C}_1\\ 0\end{pmatrix}+\hat{T}_1, \tag{21}$$

где $\hat{T}_1$ - оператор порядка $-\infty$ в $\mathcal{U}$.

Применяя оператор A, получим

$$A_1 = C_1 A = \begin{pmatrix} I_\ell & 0 \\ B_1 & I_{m_1-\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{T}_1'. \tag{22}$$

Если оператор A приводим к эллиптическому уже на первом шаге, т.е., если A_1 эллиптичен, то оператор $\hat{A}_1$ эллиптичен в $\mathcal{U}$. Действительно, из (22), учитывая, что оператор B_1 имеет в $\mathcal{U}$ нулевой порядок, получим

$$\sigma_0(A_1) = \begin{pmatrix} I_\ell & 0 \\ \sigma_0(B_1) & I_{m_1-\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0(\hat{A}_1) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Так как первая матрица в (23) имеет в $\mathcal{U}$ максимальный ранг, вторая матрица невырожденна, то $\det \sigma_0(\hat{A}_1) \neq 0$ в $\mathcal{U}$.

Если $p>1$, то, разбивая матрицу C_2 на две части (C_2', C_2''), имеем

$$\begin{aligned} C_2 C_1 &= (C_2' + C_2'' B_1, C_2'') \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{T}_2 = \\ &= (\tilde{C}_2, 0) \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{T}_2, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\tilde{C}_2 \equiv C_2' + C_2'' B_1 - J_{\ell_2} \tilde{C}_2^o$, причем оператор $\tilde{C}_2^o$ нулевого порядка эллиптичен в $\mathcal{U}$, так как ранг матрицы $\sigma_0(C_2^o)$ максимален в $\mathcal{U}$. Применяя к (24) оператор A, получим

$$A_2 = (\tilde{C}_2, 0) \begin{pmatrix} \hat{A}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{T}_2'. \tag{25}$$

Так что прямоугольный оператор $\tilde{C}_2$ является C-преобразованием оператора $\hat{A}_1$ в окрестности $\mathcal{U}$. Используя лемму 2, выделим в нем квадратный оператор $\hat{C}_2$, осуществляющий локальное $\hat{C}$-преобразование оператора $\hat{A}_1$ в окрестности $\mathcal{U}_1 (\overline{\mathcal{U}}_1 \subset \mathcal{U})$ точки q. Следовательно, для оператора $\tilde{C}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{C}_2^{\ell} \\ \tilde{C}_2' \end{pmatrix}$ имеет место аналог представления (21). Подставляя его в формулу (24), получим

$$C_2 C_1 = \begin{pmatrix} I_\ell & 0 \\ B_2 & I_{m_2-\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{T}_2. \tag{26}$$

Так как $\tilde{C}_2 = C_2 C_1 \hat{C}_1^L$ и в силу условия г) ранг матрицы $\sigma_1(\tilde{C}_2)$ постоянный в окрестности $\mathcal{U}$ точки q, то, согласно лемме 5, оператор B_2 имеет нулевой порядок в $\mathcal{U}_2$ $(\overline{\mathcal{U}}_2 \subset \mathcal{U})$. Применяя к (26) оператор A, получим

$$A_2 = \begin{pmatrix} I_\ell & 0 \\ B_2 & I_{m_2-\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \hat{T}_2. \tag{27}$$

Если оператор A_2 эллиптичен, то, ввиду эллиптичности квадратного оператора, содержащего B_2, оператор $\hat{A}_2$ также эллиптичен в $\mathcal{U}_2$. Если же

$p>2$, то, повторяя предыдущие рассуждения, получим формулу (27) с p вместо 2 , из которой вытекает эллиптичность в U_p оператора $\hat{A}_p$.

Итак, оператор A^0 приводим в окрестности точки q к локально эллиптическому оператору $\hat{A}_p = \hat{C}_p \ldots \hat{C}_1 A^0$.

Теорема 1 доказана.

Различные примеры слабоэллиптических систем можно получить, рассматривая, скажем, композиции эллиптических и равномерно неэллиптических систем [5] . В частности, оператор

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где a и c , b_{22}, b_{21} и b_{12} , b_{11} - скалярные операторы на X порядков 0, 1, 2 и 3, соответственно, слабоэллиптичен, если эллиптичен оператор $b_{11}b_{22}$ - $b_{21}b_{12}$, и не является эллиптическим по Дуглису-Ниренбергу. Если ранг $\sigma_3(b_{11})$ переменный (а b_{11} произволен при $b_{22} = 0$), то оператор B не является также равномерно неэллиптическим.

Заданному оператору можно предписывать различные порядки.

Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. <u>Если A слабоэллиптичен (в частности, эллиптичен) как оператор порядка (s,t) , то оператор A слабоэллиптичен при выборе любого другого порядка (p,q)</u> .

Действительно, если оператор $A^0 = J_{-s} A J_{-t}$ имеет представление (1) в некоторой окрестности U точки q , то оператор $\tilde{A}^0 = J_{-p} A J_{-q}$ имеет представление

$$\tilde{A}^0 = J_{s-p+s_1} A_1^0 \ldots J_{s_2} A_2^0 J_{t-q} + \hat{T}_1$$

в окрестности U_1 $(\bar{U}_1 \subset U)$. (Возможны и другие представления оператора $\tilde{A}$.) Отметим еще, что степень слабой эллиптичности оператора не зависит от выбора порядков его строк и столбцов.

Нетрудно убедиться, что оператор A^*, сопряженный к слабоэллиптическому оператору A , также является слабоэллиптическим.

§ 2. Свойства слабоэллиптических систем

В этом параграфе мы установим теоремы о нётеровости и гладкости решений слабоэллиптических систем.

Пусть A — слабоэллиптический оператор порядка (s,t) и $\mathcal{D}_p = C_p \ldots C_1 J_{-s}$ - цепочка глобальных преобразований, приводящая оператор A к эллиптическому на X оператору $A_p = \mathcal{D}_p J_{-s} A$ порядка $(0,t)$. Тогда оператор A ограничен в пространствах

$$H^{k+t}(X) \xrightarrow{A} H_c^{k-s}(X), \qquad (1)$$

где через $H_c^{k-s}(X)$ обозначено пространство обобщенных вектор-функций v на X, для которых $\mathcal{D}_p J_{-s} v \in H^k(X)$ с нормой

$$\| v \|_{H_c^{k-s}(X)} = \| \tilde{\mathcal{D}}_p J_{-s} v \|_{H^k(X)}, \tag{2}$$

причем оператор

$$\tilde{\mathcal{D}}_p = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{D}}_p^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{\mathcal{D}}_p^{(N)} \end{pmatrix} \tag{3}$$

образован из операторов, приводящих A к локально эллиптическому в окрестностях $U_1, \ldots, U_N$, покрывающих $T'(X)$. Так как операторы $\hat{C}_k^{ij\mathcal{L}}$ имеют неположительный порядок, то $\mathcal{D}_p J_{-s} v \in H^k(X)$, если $\tilde{\mathcal{D}} J_{-s} v \in H^k(X)$. Обратное очевидно.

В силу формул (5) § 1 пространство $H_c^{k-s}(X)$ не зависит от произвола в выборе операторов $\mathcal{D}_p$, так как различные операторы определяют эквивалентные нормы. Пространство $H_c^{k-s}(X)$ определяется классом эквивалентных цепочек операторов (т.е. таких операторов $\tilde{\mathcal{D}}_p$ и $\tilde{\mathcal{D}}_p'$, что $\tilde{\mathcal{D}}_p' = \tilde{B}\tilde{\mathcal{D}}_p + T$ и $\tilde{\mathcal{D}}_p = \tilde{\mathcal{D}}_p' + T'$, где $\tilde{B}$ и $\tilde{B}'$ - операторы не выше нулевого порядка на X, а порядки T и T' равны $-\infty$) и может быть одним и тем же для различных операторов A.

Отметим, что если компоненты вектора s равны между собой, то

$$H^{k+p-s}(X) \subset H_c^{k-s}(X) \subset H^{k-s}(X).$$

Имеет место

Т е о р е м а 3. <u>Для</u> $\ell \times \ell$ <u>-матричного п.д. оператора</u> A <u>порядка</u> (s,t) <u>на компактном многообразии</u> X <u>без края следующие условия эквивалентны:</u>

а) A <u>слабоэллиптичен на</u> X,

б) <u>оператор</u> A <u>, действующий в пространствах (1), имеет левый и правый регуляризаторы,</u>

в) <u>оператор</u> A <u>нётеров в пространствах (1), его ядро и коядро состоят из бесконечно дифференцируемых вектор-функций,</u>

г) <u>имеется оценка</u>

$$\| u \|_{H^{k+t}(X)} \leq C \left(\| Au \|_{H_c^{k-s}(X)} + \| u \|_{H^{\tau}(X)} \right),$$

<u>где постоянная</u> C <u>не зависит от</u> u, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_\ell)$ <u>и</u> $\tau_j < k + t_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о а) $\Longrightarrow$ б). Оператор $A^L = A_p^L \mathcal{D}_p J_{-s}$, где A_p^L - левый регуляризатор эллиптического на X оператора A_p, является левым регуляризатором слабоэллиптического оператора A. Построение правого регуляризатора A^R через локальные регуляризаторы $\hat{A}^R$, которые существуют согласно лемме 1 § 2 проводится так же, как в лемме 7 работы [5]

Переход б) $\Longrightarrow$ в) является следствием существования регуляризаторов (см., например, [1]). Гладкость решений однородной и однородной сопряженной системы доказаны в [5] (теорема 4) в аналогичной ситуации. Существование априорной оценки г) при условии в) является известным фактом функционального анализа (см., например, [7]). Наконец, из оценки г) и определения нормы в $H_c^{k-1}(X)$ вытекает эллиптичность оператора $\tilde{\mathcal{D}}_p J_{-1} A$ (см., например, [4]), а, следовательно, в силу (3) и теоремы 1 слабая эллиптичность оператора A.

Теорема 3 доказана.

Замечания. 1. Прямоугольный оператор $A\ (l_1 > l_2)$, приводимый к эллиптическому, имеет левый регуляризатор и, следовательно, конечномерное ядро и замкнутую область значений в соответствующих пространствах.

2. При $n=1$ многообразие $T'(X)$ несвязно. В этом случае условие слабой эллиптичности нужно проверять в каждой из связных компонент $T'(X)$ и вместо λ использовать операторы λ_{10} и λ_{01} с символами $\sigma(\lambda_{10}) = \left\{\begin{matrix} \xi, & \xi>0 \\ 1, & \xi<0 \end{matrix}\right\}$ и $\sigma(\lambda_{01}) = \left\{\begin{matrix} 1, & \xi>0 \\ -\xi, & \xi<0 \end{matrix}\right\}$.

Для слабоэллиптических систем п.д. уравнений имеет место аналог теоремы 3 в соответствующих пространствах (см. [5], где имеются также другие замечания).

Построена также теория слабоэллиптических систем одномерных сингулярных интегродифференциальных уравнений на основе интеграла типа Коши (см. [12], где доказан аналог теоремы 3 в пространствах Гёльдера).

Полученные результаты применяются при изучении краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений [4, 13-17].

Для слабоэллиптических систем дифференциальных уравнений в ограниченных областях возможны постановки нётеровых краевых задач [18].

Литература

1. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., ФМ, 1962, 305 с.
2. Агранович М.С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы. - "Успехи мат. наук", 1965, т.20, вып.5, с.3-120.
3. Кон Д., Ниренберг Л. Алгебра псевдодифференциальных операторов. - В кн.: Псевдодифференциальные операторы. М., "Мир", 1967, с.9-62.
4. Хермандер Л. Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи. В кн.: Псевдодифференциальные операторы. М., "Мир", 1967, с.166-296.
5. Вайнберг Б.Р., Грушин В.В. О равномерно неэллиптических задачах. - "Мат. сб.", 1967, т.72, № 4, с.602-636.

6. D o u g l i s A. and N i r e n b e r g L. Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Comm. Pur. Appl. Math., 1955, v.8, p.503-538.

7. В о л е в и ч Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. - "Мат. сб.", 1965, т.68, № 3, с.373-416.

8. С т и н р о д Н. Топология косых произведений. М., "ИЛ", 1953, 275 с.

9. О л е й н и к О.А., Р а д к е в и ч Е.В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. В кн.: Итоги науки. Математический анализ, 1969. М., ВИНИТИ, 1971, 252 с.

10. Э с к и н Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М., "Наука", 1973, 232 с.

11. Х е р м а н д е р Л. Псевдодифференциальные операторы. - В кн.: Псевдодифференциальные операторы. М., "Мир", 1967, с.63-87.

12. С а к с Р.С. К теории систем одномерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, приводимых к системам нормального типа. - "Докл. АН СССР", 1977, т.234, № 3, с.544-547.

13. Б и ц а д з е А.В. Краевые задачи для эллиптических систем второго порядка, М., "Наука", 1966, 204 с.

14. В а й н б е р г Б.Р., Г р у ш и н В.В. О равномерно неэллиптических задачах. - "Мат. сб.", 1967, т.73, № 1, с.126-154.

15. Т о в м а с я н Н.Е. К теории общих линейных краевых задач для эллиптических систем. - "Сиб. мат. журн.", 1967, т.8, № 5, с.1104-1123.

16. С а к с Р.С. О задаче Дирихле для одного класса эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка. - "Дифференц. уравнения", 1970, т.6, № 1, с.72-85.

17. С а к с Р.С. Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во НГУ, 1975, 164 с.

18. С а к с Р.С. Краевые задачи для слабоэллиптических систем дифференциальных уравнений. - "Докл. АН СССР", 1977, т.236, № 6, с.1312-1316.