УДК 517.994

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

В.Л.Солонников (Ленинград)

§ 1. Введение

В работе [1] доказана разрешимость задачи об установившемся плоском движении тяжелой вязкой несжимаемой капиллярной жидкости, частично заполняющей сосуд с прямолинейными вертикальными стенками. В данной работе мы отказываемся от этого последнего предположения. Это заставляет внести в рассуждения, проведенные в [1], некоторые изменения, которые здесь излагаются.

Пусть в R^2 задан сосуд V, граница которого S состоит из двух кривых $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$, заданных уравнением

$$x_2 = \mp h(x_1) \in C^{3+\alpha}(R_+^1), \quad R_+^1 = \{x_1 \in R^1 : x_1 > 0\}, \quad \alpha \in (0,1),$$

причем $h(0) = 1$, и кривой γ, соединяющей точки $(-1,0)$ и $(1,0)$. Предположим, что $S \in C^{2+\alpha}$ и $x_2 \leq 0$ для $x \in \gamma$. Рассмотрим задачу об установившемся движении жидкости, частично заполняющей сосуд V под действием источников и стоков суммарной нулевой интенсивности, сосредоточенных на множестве $\Sigma_1 \subset \gamma$ (силу тяжести предположим направленной вдоль вектора $(0,-1)$). Эта задача состоит в определении "свободной поверхности" жидкости - линии Γ, соединяющей кривые $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ в точках $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ и отделяющей от V ограниченную область Ω, а также вектора скорости жидкости $\vec{v}(x) = (v_1(x), v_2(x))$ и давления $p(x)$, заданных в Ω и удовлетворяющих системе уравнений Навье-Стокса

$$-\nabla^2 \vec{v}(x) + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \nabla p = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\vec{v}\big|_{\Sigma} = R\vec{a}(x), \quad \vec{v} \cdot \vec{n}\big|_{\Gamma} = 0, \quad \vec{\tau} \cdot S(\vec{v})\vec{n}\big|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

$$K - \beta x_2\big|_{\Gamma} = W(-p + \vec{n} \cdot S(\vec{v})\vec{n})\big|_{\Gamma}. \tag{3'}$$

Здесь $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$, $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$, так что $\nabla p=\mathrm{grad}\,p$, $\nabla\cdot\vec{v}=\mathrm{div}\,\vec{v}$, $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u}=v_1\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_2}$, $\nabla^2\vec{v}=\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x_2^2}$, $\Sigma=\partial\Omega\setminus\Gamma$, $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ - единичные векторы, направленные по касательной и по нормали к Γ, внешней относительно Ω; K - кривизна Γ; R, β и W - положительные постоянные; $\vec{a}(x)$ - заданный вектор с носителем $\Sigma_1\subset\gamma$, причем $\int_{\Sigma}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=0$, $S(\vec{v})$ - матрица с элементами $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$.

Далее, в точках $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ должно выполняться условие

$$\vec{n}\cdot\vec{n}'=\cos\theta,\quad \theta\in(0,\pi),\qquad (4')$$

где $\vec{n}'$ - нормаль к Σ, направленная внутрь V; наконец, следует задать "объем жидкости" $\mathrm{mes}\,\Omega=M$, что можно записать в виде

$$\int_{\Gamma}x_2n_2\,dS=M+\int_{\Sigma}x_2n_2'\,dS.\qquad (5)$$

Мы будем предполагать, что кривая Γ задана параметрически: $x_1=x(t)$, $x_2=y(t)$, причем параметр $t\in[0,1]$ пропорционален длине дуги, $x^{(1)}=(x(0),y(0))$, $x^{(2)}=(x(1),y(1))$. Следовательно, $x'(t)=\ell\cos\alpha(t)$, $y'(t)=\ell\sin\alpha(t)$, где ℓ - длина Γ, а $\alpha(t)$ - угол, образованный вектором $\vec{\tau}(x(t),y(t))$ с осью x_1. Положим $\lambda=\frac{1}{\ell}$ и нормируем $p(x)$ условием

$$\int_{\Gamma}(p-\vec{n}\cdot S(\vec{v})\vec{n})n_2\,dS=0.\qquad (6)$$

Тогда в $(3')$ надо заменить p на $p-W^{-1}k$, где k - величина, не зависящая от t, после чего можно записать $(3')$ в виде системы

$$\lambda\alpha'(t)-\beta y(t)=g(t)+k,\qquad (3)$$

$$\lambda y'(t)-\sin\alpha(t)=0,$$

$$\lambda=\frac{\int_0^1\cos\alpha(t)\,dt}{h(y(1))+h(y(0))}$$

(последнее условие выражает тот факт, что концы кривой Γ лежат на $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$). Краевые условия $(4')$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\alpha(0)&=\theta+\alpha_1,\\ \alpha(1)&=\alpha_2-\theta,\end{aligned}\qquad (4)$$

где α_1 и α_2 - углы, образованные с осью x_1 касательными к $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ в $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ векторами $\vec{t}^{(1)}=(h'(y(0)),-1)$, $\vec{t}^{(2)}=(h'(y(1)),1)$.

Функция $g(t)=W(-p+\vec{n}\cdot S(\vec{v})\vec{n})\Big|_{\substack{x_1=x(t)\\ x_2=y(t)}}$, в силу (6), удовлетворяет

условию $\int\limits_0^1 g(t)\cos\alpha(t)dt = 0$, так что

$$k\int\limits_0^1 \cos\alpha(t)dt = \lambda\int\limits_0^1 \alpha'(t)\cos\alpha(t)dt - \beta\int\limits_0^1 y(t)\cos\alpha(t)dt =$$

$$= \lambda\left[\sin(\alpha_2-\theta) - \sin(\alpha_1+\theta)\right] - \beta\lambda\left(M + \int\limits_{\Sigma} x_2 n_2' dS\right).$$

Таким образом,

$$k = \left[h(y(1)) + h(y(0))\right]^{-1}\left[\sin(\alpha_2-\theta) - \sin(\alpha_1+\theta) - \beta\left(M + \int\limits_{\Sigma} x_2 n_2' dS\right)\right]$$

зависит от неизвестных точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ (если стенки сосуда вертикальны, то k - известная постоянная).

При $R=0$ жидкость покоится $(\vec{v}=0,\ p=Const)$, а $\Gamma=\Gamma_0$ определяется из уравнений:

$$\begin{aligned}
&\lambda_0\alpha_0'(t) - \beta y_0(t) = k_0,\\
&\lambda_0 y_0'(t) - \sin\alpha_0(t) = 0,\\
&\lambda_0 = \frac{\int\limits_0^1 \cos\alpha_0(t)dt}{h(y_0(1)) + h(y_0(0))},\\
&\alpha_0(0) = \theta + \alpha_{01}, \quad \alpha_0(1) = \alpha_{02} - \theta,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$k_0 = \left[h(y_0(1)) + h(y_0(0))\right]^{-1}\left[\sin(\alpha_{02}-\theta) - \sin(\alpha_{01}+\theta) - \beta\left(M + \int\limits_{\Sigma_0} x_2 n_2' dS\right)\right].$$

Можно показать, что если кривые $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ достаточно плавные ($h''(x_2)$ достаточно мала), то эти соотношения определяют единственную кривую $x_1 = x_0(t),\ x_2 = y_0(t)$, бесконечно дифференцируемую, симметричную относительно оси x_2 и имеющую в точке пересечения с этой осью единственный максимум или минимум (в частности, $\alpha_{02} = -\alpha_{01} = \omega,\ y_0(0) = y_0(1) = z$). Если $\alpha_0(1) = \omega - \theta$ по модулю меньше $\frac{\pi}{2}$ (как это имеет место при $\omega = \frac{\pi}{2}$), то эта кривая однозначно проектируется на ось x_1 (или, что то же самое, функция $\cos\alpha_0(t) = \lambda_0 x_0'(t)$ положительна), в противном случае $\cos\alpha_0(t)$ меняет знак дважды.

Целью работы является доказательство разрешимости задачи (1)-(6) в весовых гёльдеровских классах функций $C_s^{\ell}(\Omega)$ при малых R . Как и в [1] , будем под пространством $C_s^{\ell}(\Omega)$ при нецелом $\ell>0$ и нецелом $s\in(0,\ell)$ понимать пространство $[\ell]$ раз непрерывно дифференцируемых в Ω функций с конечной нормой

$$|u|^{(l)}_{s,\Omega} = |u|^{(s)}_{\Omega} + \sum_{s<|\alpha|<l} \sup_{x\in\Omega} \rho^{|\alpha|-s}(x)|\mathcal{D}^{\alpha}u(x)| +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=[l]} \sup_{x,y\in\Omega} \left\{ \min\left(\rho^{l-s}(x), \rho^{l-s}(y)\right) \frac{|\mathcal{D}^{\alpha}u(x)-\mathcal{D}^{\alpha}u(y)|}{|x-y|^{l-[l]}} \right\}, \quad (8)$$

где $\mathcal{D}^{\alpha}u = \dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2$, $\rho(x) = \min(|x-x^{(1)}|, |x-x^{(2)}|)$,

а $|u|^{(s)}_{\Omega} = \sum_{|\alpha|<s} \sup_{x\in\Omega} |\mathcal{D}^{\alpha}u(x)| + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{x,y\in\Omega} \dfrac{|\mathcal{D}^{\alpha}u(x)-\mathcal{D}^{\alpha}u(y)|}{|x-y|^{s-[s]}}$ – норма в пространстве $C^{s}(\Omega)$. При $s<0$ определим норму в $C^{l}_{s}(\Omega)$ той же формулой (8), но без члена $|u|^{(s)}_{\Omega}$ в правой части. Аналогичным образом определим пространства $C^{l}_{s}(\Delta)$ для функций $u(t)$, заданных на интервале $\Delta = [0,1]$ (при этом функцию $\rho(x)$ в определении нормы, естественно, следует заменить на $\rho_0(t) = \min(t, 1-t)$).

Основной результат формулируется в конце работы.

§ 2. Вспомогательная задача: преобразование задачи (3), (4)

Будем доказывать разрешимость задачи (1)-(6) с помощью схемы, изложенной в работах [2-4] и использованной также в [1]. По этой схеме, в основу доказательства положено, во-первых, исследование вспомогательной задачи (1), (2) в заданной области Ω (т.е. кривая Γ предполагается известной), и, во-вторых, исследование задачи (3), (4), линеаризованной на известном ее решении $\alpha_0(t)$, $y_0(t)$.

Вспомогательная задача рассматривается так же, как в работе [1], и мы ограничимся лишь формулировками соответствующих результатов.

Т е о р е м а 1. Существуют такие $R_0>0$ и $\delta_0\in(0,\alpha)$, что при $R<R_0$, $\Gamma\in C^{3+\delta}_{\delta}$, $\delta<\delta_0$, и $\vec{a}\in C^{2+\delta}_{\delta}(\Sigma)$, удовлетворяющем условиям

$$\int_{\Sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}'dS = 0, \quad \vec{a}\cdot\vec{n}\big|_{x=x^{(i)}} = 0, \quad i=1,2,$$

($\vec{n}|_{x=x^{(i)}}$ - вектор нормали к Γ в точке $x^{(i)}$) задача (1), (2) имеет единственное решение $\vec{v}\in C^{2+\delta}_{\delta}(\Omega)$, $p\in C^{1+\delta}_{\delta-1}(\Omega)$ и для него справедливо неравенство

$$|\vec{v}|^{(2+\delta)}_{\delta,\Omega} + |p|^{(1+\delta)}_{\delta-1,\Omega} \le cR\,|\vec{a}|^{(2+\delta)}_{\delta,\Sigma}. \quad (9)$$

Постоянная c может быть выбрана одинаковой для всех кривых Γ, удовлетворяющих условию

$$|x(t)-x_0(t)|^{(3+\delta)}_{\delta+1,\Delta} \leq \varepsilon_0\ ,\quad |y(t)-y_0(t)|^{(3+\delta)}_{1+\delta,\Delta} \leq \varepsilon_0\ ,\quad \varepsilon_0>0. \tag{10}$$

Функция p предполагается нормированной условием

$$\int_\Gamma p n_2\, dS = \int_\Gamma n_2 \vec{n}\cdot S(\vec{v})\vec{n}\, dS. \tag{11}$$

Рассмотрим наряду с задачей (1), (2) в области Ω такую же задачу в области $\tilde{\Omega}$ с границей $\partial\tilde{\Omega}=\tilde{\Sigma}\cup\tilde{\Gamma}$, где $\tilde{\Gamma}$ определяется соотношениями $x_1=\tilde{x}(t)$, $x_2=\tilde{y}(t)$, а $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ близки к x и y:

$$|\tilde{x}(t)-x(t)|^{(3+\delta)}_{1+\delta,\Delta}+|\tilde{y}(t)-y(t)|^{(3+\delta)}_{1+\delta,\Delta}\leq\varepsilon,$$

решение этой задачи обозначим через $\tilde{\vec{v}}$, $\tilde{p}$.

Т е о р е м а 2. Если $R<R_0$, $\varepsilon<\varepsilon_0$, то для функций

$$g(t)=W(-p+\vec{n}\cdot S(\vec{v})\vec{n})\Big|_{\substack{x_1=x(t),\\ x_2=y(t),}}\ ,\quad \tilde{g}(t)=W(-\tilde{p}+\vec{n}\cdot S(\tilde{\vec{v}})\vec{n})\Big|_{\substack{x_1=\tilde{x}(t),\\ y_1=\tilde{y}(t)}}$$

справедливо неравенство

$$|g(t)-\tilde{g}(t)|^{(1+\delta)}_{\delta-1,\Delta}\leq CR\left(|x-\tilde{x}|^{(3+\delta)}_{1+\delta,\Delta}+|y-\tilde{y}|^{(3+\delta)}_{1+\delta,\Delta}\right).$$

Сформулированные теоремы аналогичны теоремам 2 и 6 из работы [1] и доказываются такими же методами (доказательство теоремы 2, опущенное в [1], публикуется в журнале "Известия АН СССР").

Перейдем к рассмотрению задачи (3), (4), которую запишем в виде:

$$\begin{aligned}
&\mu\alpha'(t)-\beta[h(y(1))+h(y(0))]y(t)=[h(y(0))+h(y(1))]g(t)+B,\\
&\mu y'(t)-[h(y(1))+h(y(0))]\operatorname{Sin}\alpha(t)=0,\\
&\mu=\int_0 \operatorname{Cos}\alpha(t)dt,\\
&\alpha(0)=\alpha_1+\theta,\\
&\alpha(1)=\alpha_2-\theta,
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$B=\operatorname{Sin}(\alpha_2-\theta)-\operatorname{Sin}(\alpha_1+\theta)-\beta\left(M+\int_\Sigma x_2 n_2' dS\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{Cos}\theta-h'(y(1))\operatorname{Sin}\theta}{\sqrt{1+h'^2(y(1))}}-\frac{h'(y(0))\operatorname{Sin}\theta-\operatorname{Cos}\theta}{\sqrt{1+h'^2(y(0))}}-\beta\left(M_+ +\int_0^{y(1)} x_2 h'(x_2)dx_2+\right.$$

$$\left.+\int_0^{y(0)} x_2 h'(x_2)dx_2\right),\quad M_+=\operatorname{mes}\{x\in\Omega : x_2>0\}.$$

Аналогичным образом заменим (7) на

$$\begin{aligned}
&\mu_0\alpha_0'(t) - 2\beta h(z)y_0(t) = B_0,\\
&\mu_0 y_0'(t) - 2h(z)\sin\alpha_0(t) = 0,\\
&\mu_0 = \int_0^1 \cos\alpha_0(t)\,dt,\\
&\alpha_0(0) = -\omega+\theta, \quad \alpha_0(1) = \omega-\theta.
\end{aligned} \tag{13}$$

Введем обозначения $\xi(t)=\alpha(t)-\alpha_0(t)$, $\eta(t)=y(t)-y_0(t)$ и вычтем (13) из (12). При этом учтем зависимость $B, \mu, \alpha_1, \alpha_2$ от неизвестных функций и воспользуемся соотношениями $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} h'(y(1))$,

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} h'(y(0)) - \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} h'(y_0(1)) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} h'(y_0(0)),$$

$$\alpha_2 - \omega = -\frac{h''(z)}{1+h'^2(z)}\eta(1) + \tau_1,$$

$$\alpha_1 + \omega = \frac{h''(z)}{1+h'^2(z)}\eta(0) + \tau_0,$$

$$B - B_0 = -h''(z)[\eta(1)+\eta(0)]\frac{h'(z)\cos\theta+\sin\theta}{(1+h'^2(z))^{3/2}} - \beta z h'(z)[\eta(1)+$$

$$+\eta(0)] + Q = -[\eta(1)+\eta(0)]\left[\frac{h''(z)}{1+h'^2(z)}\cos(\theta-\omega)+\beta z h'(z)\right] + Q,$$

$$\mu - \mu_0 = -\int_0^1 \xi(t)\sin\alpha_0(t)\,dt + Q_1,$$

где

$$\tau_q = -2(-1)^q\left[h'(y(q)) - h'(z)\right]^2\int_0^1 (1-\lambda)\frac{h'(z)+\lambda\left[h'(y(q))-h'(z)\right]}{\left\{1+\left[h'(z)+\lambda(h'(y(q))-h'(z))\right]^2\right\}^2}\,d\lambda +$$

$$+\frac{(-1)^q\eta(q)}{1+h'^2(z)}\int_0^1\left[h''(z+\lambda\eta(q)) - h''(z)\right]d\lambda, \quad q = 0,1, \tag{14}$$

$$Q = \left[h'(y(1)) - h'(z)\right]^2\int_0^1 (1-\lambda)\left\{\frac{3t\sin\theta+3t^2\cos\theta}{(1+t^2)^{5/2}} - \frac{\cos\theta}{(1+t^2)^{3/2}}\right\}\Bigg|_{t=h'(z)+\lambda(h'(y(1))-h'(z))} d\lambda +$$

$$+\left[h'(y(0))-h'(z)\right]^2\int_0^1(1-\lambda)\left\{\frac{3t\sin\theta+3t^2\cos\theta}{(1+t^2)^{5/2}}-\frac{\cos\theta}{(1+t^2)^{3/2}}\right\}\Bigg|_{t=h'(z)+\lambda(h'(y(0))-h'(z))}d\lambda-$$

$$-\frac{\cos(\theta-\omega)}{1+h'^2(z)}\left\{\eta(1)\int_0^1\left[h''(z+\lambda\eta(1))-h''(z)\right]d\lambda+\eta(0)\int_0^1\left[h''(z+\lambda\eta(0))-h''(z)\right]d\lambda\right\}-$$

$$-\beta\left\{\eta^2(1)\int_0^1(1-\lambda)\left[h'(t)+th''(t)\right]\Big|_{t=z+\eta(1)\lambda}d\lambda+\eta^2(0)\int_0^1(1-\lambda)\left[h'(t)+th''(t)\right]\Big|_{t=z+\lambda\eta(0)}d\lambda\right\} \quad (15)$$

$$Q_1=-\int_0^1(1-\lambda)d\lambda\int_0^1\xi^2(t)\cos(\alpha_0(t)+\lambda\xi(t))dt. \quad (16)$$

После вычитания получим

$$\begin{aligned}&\mu_0\xi'(t)-2\beta H\eta(t)-\alpha_0'(t)\int_0^1\xi(t)\sin\alpha_0(t)dt-\beta h'(z)y_0(t)[\eta(1)+\eta(0)]+\\&+[\eta(1)+\eta(0)]\Big[\beta z h'(z)+\frac{h''(z)}{1+h'^2(z)}\cos(\theta-\omega)\Big]=g_1(t),\\&\mu_0\eta'(t)-2H\xi(t)\cos\alpha_0(t)-y_0'(t)\int_0^1\xi(t)\sin\alpha_0(t)dt-\\&-h'(z)[\eta(1)+\eta(0)]\sin\alpha_0(t)=g_2(t),\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}&\xi(0)-\frac{h''(z)}{1+h'^2(z)}\eta(0)=\tau_0,\\&\xi(1)+\frac{h''(z)}{1+h'^2(z)}\eta(1)=\tau_1,\end{aligned} \quad (18)$$

причем $H=h(z)$,

$$\begin{aligned}g_1(t)=&-\alpha_0'(t)Q_1-\xi'(t)(\mu-\mu_0)+\beta\eta(t)\left[(h(y(1))-h(z))+(h(y(0))-h(z))\right]+\\&+\beta y_0(t)\Big[\eta^2(1)\int_0^1(1-\lambda)h''(z+\lambda\eta(1))d\lambda+\eta^2(0)\int_0^1(1-\lambda)h''(z+\lambda\eta(0))d\lambda\Big]+\\&+\left[h(y(1))+h(y(0))\right]g(t)+Q,\end{aligned} \quad (19)$$

$$g_2(t)=-y_0'(t)Q_1-\eta'(t)(\mu-\mu_0)+\left[(h(y(1))-h(z))+(h(y(0))-\right.$$

$$- h(z))\Big]\xi(t)\int\limits_0^1 \cos(\alpha_0(t)+\lambda\xi(t))d\lambda -$$

$$- 2h(z)\xi^2(t)\int\limits_0^1 (1-\lambda)\sin(\alpha_0(t)+\lambda\xi(t))d\lambda +$$

$$+ \sin\alpha_0(t)\Big[\eta^2(1)\int\limits_0^1 (1-\lambda)h''(z+\lambda\eta(1))d\lambda + \eta^2(0)\int\limits_0^1 (1-\lambda)h''(z+\lambda\eta(0))d\lambda\Big]. \quad (20)$$

§ 3. Исследование линеаризованной задачи (3), (4)

Рассмотрим задачу (17), (18) при произвольных $\tau_0, \tau_1 \in R^1$, $g_1(t) \in C^{1+\delta}_{\delta-1}(\Delta)$, $g_2(t) \in C^{2+\delta}_{\delta}(\Delta)$; будем искать решение $\xi \in C^{2+\delta}_{\delta}(\Delta)$, $\eta \in C^{3+\delta}_{1+\delta}(\Delta)$. Эта линейная задача отличается от обычных краевых задач для систем дифференциальных уравнений тем, что в уравнение входят два функционала от неизвестных функций:

$$L_1 = \int\limits_0^1 \xi(t)\sin\alpha_0(t)dt \qquad \text{и} \quad L_2 = \eta(1) + \eta(0).$$

Т е о р е м а 3. <u>Задача (17), (18) имеет решение $\xi \in C^{2+\delta}_{\delta}(\Delta)$, $\eta \in C^{3+\delta}_{1+\delta}(\Delta)$ при любых $g_1 \in C^{1+\delta}_{\delta-1}(\Delta)$, $g_2 \in C^{2+\delta}_{\delta}(\Delta)$, $\tau_0, \tau_1 \in R^1$ тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение. В этом случае для решения справедлива оценка</u>

$$|\xi|^{(2+\delta)}_{\delta,\Delta} + |\eta|^{(3+\delta)}_{1+\delta,\Delta} \leq c\left(|g_1|^{(1+\delta)}_{\delta-1,\Delta} + |g_2|^{(2+\delta)}_{\delta,\Delta} + |\tau_0| + |\tau_1|\right). \quad (21)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим однородную задачу

$$u' - \frac{2\beta H}{\mu_0}v = 0; \qquad v' - \left(\frac{2H}{\mu_0}\cos\alpha_0(t) + A\right)u = 0, \quad (22)$$

$$u(0) - \sigma v(0) = 0, \qquad u(1) + \sigma v(1) = 0, \quad (23)$$

где $\sigma = \dfrac{h''(z)}{1+h'^2(z)}$, $A \geq 0$. Любое ее решение $u \in C^{2+\delta}_{\delta}(\Delta)$, $v \in C^{3+\delta}_{1+\delta}(\Delta)$ бесконечно дифференцируемо и удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_0^1 \Big[u'^2 + \frac{2\beta H}{\mu_0}\Big(\frac{2H}{\mu_0}\cos\alpha_0(t) + A\Big)u^2\Big]dt + \frac{2\beta H}{\mu_0\sigma}\Big[u^2(1) + u^2(0)\Big] = 0$$

(если $\sigma = 0$, то второй член в левой части отсутствует). Отсюда видно, что при достаточно большом $A > 0$ задача (22), (23) не имеет ненулевых решений. Поэтому (см., например, [5]) решение соответствующей неоднородной задачи существует и может быть выражено с помощью матрицы Грина $G(t,\tau)$ с элементами

$$G_{pq}(t,\tau)=\begin{cases} X_p^{(1)}(t)\,Y_q^{(1)}(\tau), & \tau<t,\\ X_p^{(0)}(t)\,Y_q^{(0)}(\tau), & t<\tau, \end{cases}\qquad p,q=1,2,$$

где $X^{(s)}(t)=(X_1^{(s)},X_2^{(s)})$, $s=0,1$, - линейно-независимые решения системы (22), удовлетворяющие условиям (23) при $t=s$, а функции $Y_q^{(s)}$ связаны с $X_p^{(s)}$ соотношениями

$$X_p^{(1)}(t)\,Y_q^{(1)}(t)-X_p^{(0)}(t)\,Y_q^{(0)}(t)=\delta_{pq},\quad p,q=1,2$$

(нетрудно проверить, что эта система относительно $Y_q^{(s)}(t)$ однозначно разрешима). Матрица Грина позволяет записать соотношения (17), (18) в виде эквивалентной системы уравнений

$$X(t)=\frac{1}{\mu_0}\int_0^1 G(t,\tau)f(\tau)d\tau+\frac{A}{\mu_0}\int_0^1 G(t,\tau)e\,\xi(\tau)d\tau+$$

$$+X_0(t)=TX+X_0, \tag{24}$$

где $f(t)=(f_1,f_2)$, $X(t)=(\xi,\eta)$, $X_0(t)=(\xi_0,\eta_0)$, $e=(0,1)$,

$$f_1(t)=L_1\alpha_0'(t)+\left[\beta h'(z)y_0(t)-\beta z h'(z)-\sigma\cos(\theta-\omega)\right]L_2,$$

$$f_2(t)=\left[\frac{2H}{\mu_0}L_1+h'(z)L_2\right]\sin\alpha_0(t),$$

$$X_0(t)=\int_0^1 G(t,\tau)g(\tau)d\tau+\tau_0\frac{X^{(1)}(t)}{X_1^{(1)}(0)-\sigma X_2^{(1)}(0)}+\tau_1\frac{X^{(0)}(t)}{X_1^{(0)}(1)+\sigma X_2^{(0)}(1)},$$

$$g=(g_1,g_2).$$

Если $g_1\in C_{\delta-1}^{1+\delta}(\Delta)$, $g_2\in C_\delta^{2+\delta}(\Delta)$, то $X_0\in C^\delta(\Delta)$ и

$$|X_0|_\Delta^{(\delta)}\equiv|\xi_0|_\Delta^{(\delta)}+|\eta_0|_\Delta^{(\delta)}\le C_1\Big(\sup_{t\in\Delta}\rho_0^{1-\delta}(t)|g_1(t)|+\sup_{t\in\Delta}|g_2(t)|+|\tau_0|+|\tau_1|\Big).$$

Оператор T вполне непрерывен в $C^\delta(\Delta)$, а значит, для системы (24) и задачи (17), (18) справедлива альтернатива Фредгольма. Если оператор $I-T$ обратим в $C^\delta(\Delta)$, то

$$|X|_\Delta^{(\delta)}\le C_2|X_0|_\Delta^{(\delta)}\le C_1C_2\left(|g_1|_{\delta-1,\Delta}^{(1+\delta)}+|g_2|_{\delta,\Delta}^{(2+\delta)}+|\tau_0|+|\tau_1|\right).$$

Оценивая производные ξ и η с помощью системы (17), получаем (21). Теорема доказана.

Представим условие разрешимости задачи (17), (18) в несколько более явном виде при следующем дополнительном предположении: задача (22), (23) при $A=0$ не имеет ненулевых решений. В этом случае можно положить в (24) $A=0$; оператор $TX=X_1L_1(X)+X_2L_2(X)$ вырожден, и уравнение $X=TX$

имеет нетривиальные решения в том и только в том случае, если имеет ненулевые решения система уравнений

$$\ell_j = \sum_{k=1}^{2} F_{jk}\ell_k, \quad F_{jk} = L_j(X_k). \tag{25}$$

Построим матрицу Грина. Будем пользоваться симметрией кривой Γ_0, а именно соотношениями

$$\cos\alpha_0(1-t) = \cos\alpha_0(t), \qquad \sin\alpha_0(1-t) = -\sin\alpha_0(t). \tag{26}$$

Пусть $\psi(t)$ - решение уравнения $\psi''(t) - \frac{4\beta H^2}{\mu_0^2}\cos\alpha_0(t)\psi(t) = 0$, удовлетворяющее краевому условию $\psi(1)+\sigma\varkappa\psi'(1) = 0$, где $\varkappa = \frac{\mu_0}{2\beta H}$, $\sigma = \frac{h''(\varkappa)}{1+h'^2(z)}$. Тогда векторы $X^{(1)}(t) = (\psi(t), \varkappa\psi'(t))$ и $X^{(0)}(t) = (\psi(1-t), -\varkappa\psi'(1-t))$ удовлетворяют однородной системе (22) с $A = 0$, причем вектор $X^{(1)}$ удовлетворяет краевому условию (23) при $t = 1$, а $X^{(0)}$ - при $t = 0$. В силу нашего предположения, ни один из этих векторов не удовлетворяет обоим условиям (23). Функции $Y_q^{(s)}$ определяются формулами

$$Y_1^{(1)} = \mathcal{D}^{-1}\psi'(1-t), \; Y_1^{(0)} = -\mathcal{D}^{-1}\psi'(t), \; Y_2^{(1)} = (\varkappa\mathcal{D})^{-1}\psi(1-t), Y_2^{(0)} = (\varkappa\mathcal{D})^{-1}\psi(t),$$

где $\mathcal{D} = \psi(0)\psi'(1) + \psi'(0)\psi(1) = \psi'(1)[\psi(0) - \sigma\varkappa\psi'(0)]$ - определитель Вронского, вычисленный на решениях $\psi(t)$ и $\psi(1-t)$ уравнения $\psi'' - \frac{4\beta H^2}{\mu_0^2}\cos\alpha_0\psi = 0$. Таким образом, однородная задача (22), (23) с $A = 0$ эквивалентна системе уравнений:

$$\xi(t) = \frac{1}{\mu_0}\psi(t)\int_0^t Y^{(1)}\cdot f d\tau + \frac{1}{\mu_0}\psi(1-t)\int_t^1 Y^{(0)}\cdot f d\tau,$$

$$\eta(t) = \frac{\varkappa}{\mu_0}\psi'(t)\int_0^t Y^{(1)}\cdot f d\tau - \frac{\varkappa}{\mu_0}\psi'(1-t)\int_t^1 Y^{(0)}\cdot f d\tau,$$

где $Y^{(s)}\cdot f = Y_1^{(s)}f_1 + Y_2^{(s)}f_2$. Образовав функционалы L_1 и L_2 от обеих частей этих уравнений, придем к системе (25) для L_1 и L_2. Пользуясь легко проверяемым соотношением

$$\int_{1-t}^1 Y^{(0)}(\tau)\cdot f(\tau)d\tau = \int_0^t Y^{(0)}(1-\tau)\cdot f(1-\tau)d\tau = -\int_0^t Y^{(1)}(\tau)\cdot f(\tau)d\tau,$$

получаем

$$L_1 = \int_0^1 \xi(t)\sin\alpha_0(t)dt = \frac{1}{\mu_0}\int_0^1 \psi(t)\sin\alpha_0(t)dt\int_0^t Y^{(1)}(\tau)\cdot f(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_0^1 \psi(1-t)\sin\alpha_0(t)dt\int_t^1 Y^{(0)}\cdot f d\tau = \frac{2}{\mu_0}\int_0^1 \psi(t)\sin\alpha_0(t)dt\int_0^t Y^{(1)}\cdot f d\tau,$$

$$L_2 = \frac{2\varkappa}{\mu_0}\psi'(1)\int_0^1 Y^{(1)}(\tau)\cdot f(\tau)d\tau.$$

Преобразуем интегралы в правой части с помощью (26). Имеем

$$\int_0^t Y^{(1)}\cdot f d\tau = \mathcal{D}^{-1}\int_0^t \left[\psi'(1-\tau)f_1(\tau) + \psi(1-\tau)\,\frac{f_2(\tau)}{\varkappa}\right] d\tau =$$

$$= \frac{4\beta H}{\mathcal{D}\mu_0}\, S \int_0^t \psi(1-\tau)\,\mathrm{Sin}\,\alpha_0(\tau)d\tau - \mathcal{D}^{-1}\psi(1-t)f_1(t) + \mathcal{D}^{-1}\psi(1)f_1(0),$$

где

$$S = \frac{2H}{\mu_0} L_1 + h'(z) L_2 \ . \tag{27}$$

Положим

$$C_0 = -\frac{2}{\mathcal{D}}\int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{Sin}\,\alpha_0(t)dt \int_0^t \psi(1-\tau)\,\mathrm{Sin}\,\alpha_0(\tau)d\tau, \quad C_1 = \int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{Sin}\,\alpha_0(t)dt$$

и заметим, что

$$f_1(0) = f_1(1) = \frac{2\beta H z + B_0}{\mu_0} L_1 - \sigma\,\mathrm{Cos}(\theta-\omega) L_2 \tag{28}$$

и $\int_0^1 \psi(t)\psi(1-t) f_1(t)\,\mathrm{Sin}\,\alpha_0(t)dt = 0.$ Поэтому

$$L_1 = -\frac{4\beta H C_0}{\mu_0^2} S + \frac{2\psi(1)C_1}{\mu_0\mathcal{D}} f_1(0) = -\frac{4\beta H C_0}{\mu_0^2} S - \frac{2\sigma\varkappa\psi'(1)C_1}{\mu_0\mathcal{D}} f_1(0),$$

$$L_2 = -\frac{2\varkappa\psi'(1)}{\mu_0\mathcal{D}}\left[\frac{4\beta H C_1}{\mu_0} S + (\psi(0)-\psi(1)) f_1(0)\right]. \tag{29}$$

Из (27)-(29) следует, что система (25) для вектора $L = (L_1, L_2)$ записывается в форме

$$L = \mathcal{A}\mathcal{B}L ,$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4\beta h(z)C_0}{\mu_0^2} & -\dfrac{2\psi'(1)\sigma\varkappa C_1}{\mu_0\mathcal{D}} \\ -\dfrac{4C_1\psi'(1)}{\mu_0\mathcal{D}} & -\dfrac{2\varkappa\psi'(1)[\psi(0)-\psi(1)]}{\mu_0\mathcal{D}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{2h(z)}{\mu_0} & h'(z) \\ \dfrac{2\beta h(z)z + B_0}{\mu_0} & -\sigma\,\mathrm{Cos}(\theta-\omega) \end{pmatrix}, \tag{30}$$

и справедлива следующая

Т е о р е м а 4. Пусть задача (22), (23) при $A = 0$ не имеет ненулевых решений. Тогда задача (17), (18) при $g_1 = g_2 = 0$, $\tau_0 = \tau_1 = 0$ не имеет ненулевых решений в том и только в том случае, если

$$\det(\mathcal{A}\mathcal{B} - I) \neq 0, \tag{31}$$

причем матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определяются (30).

Заметим, что число C_0 связано с функцией Грина $G(t,\tau)$ для задачи

$$-\xi''+\frac{4\beta H^2}{\mu_0^2}\cos\alpha_0(t)\xi=h,\quad \xi(1)+\sigma\varkappa\xi'(1)=0,\ \xi(0)-\sigma\varkappa\xi'(0)=0.$$

Легко видеть, что решение этой задачи дается формулой

$$\xi(t)=\int_0^1 G(t,\tau)h(\tau)d\tau=-\frac{\psi(t)}{\mathcal{D}}\int_0^t\psi(1-\tau)h(\tau)d\tau-\frac{\psi(1-t)}{\mathcal{D}}\int_t^1\psi(\tau)h(\tau)d\tau.$$

Поэтому

$$c_0=\int_0^1\int_0^1 G(t,\tau)\sin\alpha_0(t)\sin\alpha_0(\tau)dtd\tau.$$

Рассмотрим частный случай $h''(z)=0$. При этом условии $\sigma=0$, $\psi(1)=0$, $\mathcal{D}=\psi(0)\psi'(1)$,

$$I-\mathcal{A}\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1+\dfrac{8\beta h^2(z)c_0}{\mu_0^3} & \dfrac{4\beta h(z)h'(z)c_0}{\mu_0^2}\\ \dfrac{8h(z)c_1}{\mu_0^2\psi(0)}+\dfrac{2\varkappa}{\mu_0}\,\dfrac{2\beta h(z)z+B_0}{\mu_0} & 1+\dfrac{4c_1h'(z)}{\mu_0\psi(0)}\end{pmatrix}$$

и

$$\det(I-\mathcal{A}\mathcal{B})=1+\frac{8\beta h^2(z)c_0}{\mu_0^3}+\frac{4c_1h'(z)}{\mu_0\psi(0)}-\frac{4h'(z)c_0}{\mu_0^2}\cdot\frac{2\beta h(z)z+B_0}{\mu_0}.$$

Если, кроме того, $h'(z)=0$ что выполняется, когда стенки сосуда вертикальны, то $\cos\alpha_0(t)>0$, $c_0>0$ и $\det(I-\mathcal{A}\mathcal{B})>0$.

Предположим теперь, что задача (22), (23) при $A=0$ имеет ненулевое решение $X(t)=(\xi(t),\eta(t))$. Тогда $\tilde{X}(t)=(\xi(1-t),-\eta(1-t))$ также будет решением этой задачи, и следовательно, $\tilde{X}(t)=\lambda X(t)$, $\lambda=\pm1$. В случае $\lambda=1$ имеем $\xi(1-t)=\xi(t)$, $\eta(1-t)=-\eta(t)$, а значит, $L_1=-\int\xi(t)\sin\alpha_0(t)dt=0$, $L_2=\eta(1)+\eta(0)=0$, т.е. $X(t)$ будет решением и задачи (17), (18) с нулевыми g_j, τ_s. Случай $\lambda=-1$ требует дополнительного исследования.

§ 4. Разрешимость задачи (1)-(5)

Вернемся к задаче (1)-(5) и установим основной результат работы.

Т е о р е м а 5. Предположим, что задача (17), (18) при $g_1=g_2=0$, $\tau_0=\tau_1=0$ имеет только нулевое решение. Тогда при достаточно малом R задача (1)-(5) имеет единственное решение $\Gamma\in C^{3+\delta}_{1+\delta}$, $\vec{v}\in C^{2+\delta}_{\delta}(\Omega)$, $p\in C^{(1+\delta)}_{\delta-1}(\Omega)$, $\delta\le\delta_0$, для любого $\vec{a}\in C^{2+\delta}(S)$ с носителем $\Sigma_1\subset f$, удовлетворяющего условию $\int_{\Sigma_1}\vec{a}\cdot\vec{n}dS=0$. Кривая Γ задается параметрически с помощью соотношений

$$x_2=y(t),\quad x_1=-h(y(0))+\frac{h(y(1))+h(y(0))}{\int_0^1\cos\alpha(\tau)d\tau}\int_0^t\cos\alpha(\tau)d\tau, \tag{32}$$

причем $y(t)\in C^{3+\delta}_{1+\delta}(\Delta)$, $\alpha(t)\in C^{2+\delta}_{\delta}(\Delta)$ удовлетворяют условию

$$|y-y_0|^{(3+\delta)}_{1+\delta,\Delta}+|\alpha-\alpha_0|^{(2+\delta)}_{\delta,\Delta}\leq \varepsilon(R), \tag{33}$$

где y_0, α_0 – решения задачи (13), определяющие кривую Γ_0 .

Доказательство. Заменим (3), (4) эквивалентными соотношениями (17), (18) для функций $\xi=\alpha-\alpha_0\in C^{2+\delta}_{\delta}(\Delta)$, $\eta=y-y_0\in C^{3+\delta}_{1+\delta}(\Delta)$, которые, в свою очередь, при наших предположениях могут быть записаны в виде $X=\mathcal{G}Z$, где $\mathcal{G}$ – оператор, сопоставляющий вектору $Z=(g_1,g_2,\tau_0,\tau_1)\in C^{1+\delta}_{\delta-1}(\Delta)\times C^{2+\delta}_{\delta}(\Delta)\times R^1\times R^1\equiv\mathcal{B}_1$ вектор $X=(\xi,\eta)\in C^{2+\delta}_{\delta}(\Delta)\times C^{3+\delta}_{1+\delta}(\Delta)\equiv\mathcal{B}_2$ как решение задачи (17), (18). В силу теоремы 3, этот оператор ограничен. Функции g_1, g_2 и числа τ_0, τ_1 определяются с помощью (19), (20), (14), причем функция g в (19) выражается по формуле

$$g(t)=W(-p+\vec{n}\cdot S(\vec{v})\vec{n})\Big|_{\substack{x_1=x(t),\\ x_2=y(t),}}$$

где $\vec{v}$, p – решение вспомогательной задачи (1), (2). Таким образом, $Z=\mathcal{F}X$, где $\mathcal{F}$ – некоторый нелинейный оператор, и задача (1)-(5) свелась к уравнению

$$X=\mathcal{G}\mathcal{F}X. \tag{34}$$

Будем искать решение этого уравнения в классе векторов $X=(\xi,\eta)$, удовлетворяющих условию

$$|\xi|^{(2+\delta)}_{\delta,\Delta}+|\eta|^{(3+\delta)}_{1+\delta,\Delta}\leq\varepsilon, \tag{35}$$

а число ε выберем столь малым, чтобы любая кривая (32), у которой $\xi=\alpha-\alpha_0$, $\eta=y-y_0$ удовлетворяют (35), не выходила из V . Так как θ не принимает значений 0 и π , то при достаточно малом ε это условие будет выполнено. Из (19), (20), (14)-(16) для любых X, $\tilde{X}\in\mathcal{B}_2$, удовлетворяющих (35), можно с помощью теорем 1 и 2 вывести оценки

$$\|\mathcal{F}X\|_{\mathcal{B}_1}\leq c_1R+c_2\|X\|^2_{\mathcal{B}_2}\leq c_1R+c_2\varepsilon^2,$$
$$\|\mathcal{F}X-\mathcal{F}\tilde{X}\|_{\mathcal{B}_1}\leq(c_3R+c_4\varepsilon)\|X-\tilde{X}\|_{\mathcal{B}_2}.$$

Из них видно, что при $\varepsilon=\sqrt{R}$ и при достаточно малом R оператор $\mathcal{G}\mathcal{F}$ является оператором сжатия на множестве (35), и разрешимость уравнения (34) на этом множестве следует из принципа сжатых отображений. Теорема доказана.

Литература

1. Солонников В.А. Разрешимость задачи о плоском движении вязкой несжимаемой капиллярной жидкости в незамкнутом сосуде. - Препринт ЛОМИ Р-5-77, Л., 1977.
2. Пухначёв В.В. Плоская стационарная задача со свободной границей для уравнения Навье-Стокса. - "Журн. прикл. математики и техн. физики", 1972, № 3, с.91-102.
3. Осмоловский В.Г. О свободной поверхности капли в симметричном силовом поле. - "Записки научных семинаров Ленингр. отделения Мат. ин-та АН СССР", 1975, т.52, с.160-174.
4. Ладыженская О.А., Осмоловский В.Г. О свободной поверхности слоя жидкости над твердой сферой. - "Вестник ЛГУ", 1976, № 13, с 25÷30.
5. Bounitzky E. Sur la fonction de Green des equations differentielles lineaires ordinaires. - "J. math. pures et appl.", 1909, t.5, p.65-125.