УДК 517.392

О ПОСТРОЕНИИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ С РЕГУЛЯРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Н.И.Блинов, Л.В. Войтишек (Новосибирск)

Теория кубатурных формул с регулярным пограничным слоем для рациональных многогранников разработана С.Л.Соболевым [1] . В настоящей работе на основе результатов С.Л. Соболева решаются вопросы, которые возникают непосредственно при численном построении таких формул.

I. Введем обозначения. Пусть R^n - евклидово пространство точек $x=(x_1,\dots,x_n)$; A - матрица размера $n\times n$, $\det(A)=|A|\neq 0$; $\mathcal{M}$ - компактный выпуклый многогранник с положительной мерой в R^n ; $\mu(S)$ - число всех S -мерных граней многогранника $\mathcal{M}$, $S=0,1,\dots,n$; $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ - точки R^n с целочисленными координатами; $\Gamma=\Gamma(hA)$ - решетка в R^n , состоящая из точек $hA\gamma$ для всевозможных γ , где $h>0$.

Многогранник $\mathcal{M}$ назовем рациональным относительно решетки Γ , если все его 0 -мерные вершины лежат в узлах решетки Γ .

Будем считать, что в качестве узлов кубатурных формул с регулярным пограничным слоем для многогранника $\mathcal{M}$ выбраны точки $hA\gamma$, коэффициенты формул представлены в виде $a_\gamma=h^n C[\gamma]$, а толщина пограничного слоя определяется числом L (L - положительное число, не зависящее от h). Если многогранник $\mathcal{M}$ рационален относительно решетки Γ (что в дальнейшем предполагается) , то кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем можно построить так, что $C[\gamma]$ не будут зависеть от h и число различных коэффициентов $C[\gamma]$ будет зависеть только от числа всех граней многогранника и числа L .

Кубатурную формулу для $\mathcal{M}$ с узлами $hA\gamma$ назовем правильно построенной, если коэффициенты $C[\gamma]$ удовлетворяют условию: каково бы ни было $S=0,1,\dots,n$ и какова бы ни была грань размерности S , все $C[\gamma]$ для точек $hA\gamma$, удаленных от границ грани на расстояние, не меньшее чем Lh , и расположенных на одной и той же S -мерной гиперплоскости,

параллельной этой грани и удаленной от нее не дальше чем на Lh, постоянны.

Правильно построенные кубатурные формулы можно использовать и для неограниченных многогранников. В частности, неограниченными многогранниками являются телесные углы, соответствующие граням многогранника $\mathcal{M}$. Предположим, что все телесные углы многогранника $\mathcal{M}$ перенумерованы таким образом, что каждой паре (j, s) соответствует свой телесный угол с s-мерным острием $s=0,\dots,n$; $j=1,\dots,\mu(s)$. Обозначим через $\ell(x)$ функционал погрешности правильно построенной кубатурной формулы для многогранника $\mathcal{M}$, а через $\ell^{(j,s)}(x)$ — функционалы погрешностей правильно построенных кубатурных формул для телесных углов, соответствующих всем граням многогранника $\mathcal{M}$ $(s=0,\dots,n$; $j=1,\dots,\mu(s))$. Правильно построенные кубатурные формулы для телесных углов можно согласовать между собой, построив их так, чтобы коэффициенты в точках, лежащих вблизи общей грани двух телесных углов, были одинаковыми.

Пусть $\ell^{(j,s)}(x)$ $(s=0,1,\dots,n$; $j=1,\dots,\mu(s))$ - здесь и далее система функционалов погрешностей правильно построенных и согласованных между собой кубатурных формул для всех телесных углов многогранника. Тогда имеет место равенство

$$\ell(x)=\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}\sum_{j=1}^{\mu(s)}\ell^{(j,s)}(x). \tag{1}$$

Из (1) видно, для того чтобы функционал $\ell(x)$ был функционалом с регулярным пограничным слоем порядка m, достаточно, чтобы все функционалы $\ell^{(j,s)}(x)$ были функционалами с регулярным пограничным слоем порядка m, а для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы каждый функционал $\ell^{(j,s)}(x)$ был функционалом с формальным пограничным слоем порядка m, т.е. чтобы его преобразование Фурье имело нуль порядка m в начале координат [1]. Поскольку предполагается, что функционалы $\ell^{(j,s)}(x)$ правильно построены и согласованы между собой, то их построение сводится к построению функционалов погрешностей кубатурных формул для углов с 0-мерной вершиной (т.е. 0-мерным острием).

Телесный угол, число $(n-1)$-мерных граней которого равно n, будем называть простейшим.

Примерами многогранников, все углы которых простейшие, могут служить многогранник на плоскости, куб и симплекс в пространстве любой размерности.

II. В этом пункте рассмотрим способ построения кубатурных формул с регулярным пограничным слоем для рациональных многогранников, все телесные

углы которых простейшие.

Пусть Ω - простейший телесный угол с вершиной в начале координат, заданный в R^n при помощи системы $Bx \geqslant 0$, где B - неособенная матрица размера $n \times n$; $\Gamma(A)=\{A\gamma : \gamma \in R^n\}$ - решетка узлов с $h=1$. Так как, по предположению, угол Ω рационален относительно решетки $\Gamma(A)$, то можно линейным преобразованием $y=Cx$ перевести его в прямой координатный угол $y_1 \geqslant 0, \ldots, y_n \geqslant 0$ так, что ближайшие к началу координат точки решетки $\Gamma(A)$, лежащие на одномерных гранях угла Ω, перейдут в единичные координатные векторы. Найдем матрицу C, используя матрицы B и A. Если точка $A\gamma^{(i)}$ лежит на i-й одномерной грани угла Ω, то, очевидно,

$$BA\gamma^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ K_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\gamma^{(i)} = (BA)^{-1}_i K_i$, где $(BA)^{-1}_i$ - i-й столбец матрицы $(BA)^{-1}$. Точка решетки $A\gamma^{(i)}$ будет ближайшей к вершине угла, если K_i - минимальное по модулю число, при котором $(BA)^{-1}_i K_i$ - целочисленный вектор. Так как, по условию, $CA\gamma^{(i)} = e_i$, то $C = K^{-1}B$, где

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & K_n \end{pmatrix}.$$

При линейном преобразовании координат кубатурная формула с регулярным пограничным слоем порядка m переходит в кубатурную формулу с регулярным пограничным слоем того же порядка (см. [1]). Несложной выкладкой можно получить зависимость коэффициентов кубатурной формулы для угла Ω, заданного условиями $Bx \geqslant 0$, и угла Ω_1, полученного в результате преобразования координат.

Пусть

$$\ell(x) = \varepsilon_\Omega(x) - \sum_{A\gamma \in \Omega} c_\gamma \, \delta(x - A\gamma),$$

$$\ell_1(y) = \varepsilon_{\Omega_1}(y) - \sum_{CA\gamma \in \Omega_1} c'_\gamma \, \delta(y - CA\gamma).$$

Так как $x = C^{-1}y$, то $\ell(x) = \ell(C^{-1}y) =$

$$= \varepsilon_{\Omega_1}(y) - \sum_{A\gamma \in \Omega} c_\gamma (C^{-1}y - A\gamma) =$$

$$= \varepsilon_{\Omega_1}(y) - \sum_{CA\gamma \in \Omega_1} |\det C| \cdot c_\gamma \delta(y - CA\gamma).$$

Отсюда $c'_\gamma = |\det C| \cdot c_\gamma$.

Заметим, что все компоненты матрицы CA - рациональные числа, поэтому точки решетки $A\gamma$ преобразуются в точки с рациональными координатами. В полуоткрытый куб $0 \leqslant y_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, попадет несколько таких точек. Решетку с матрицей периодов CA можно теперь представить в виде периодической системы с единичной матрицей, т.е. в виде объединения нескольких кубических решеток с шагом 1.

Таким образом, задача построения кубатурной формулы для угла, рационального относительно решетки, сведена к построению кубатурной формулы для координатного угла по решетке, составленной из нескольких кубических решеток. Решение последней задачи содержится в [2]. В работе [3] вычислены коэффициенты кубатурных формул для куба по решетке интегрирования, являющейся центрированной кубической решеткой. Такая решетка разбивается на две кубических подрешетки, сдвинутых друг относительно друга на $1/2$ по всем осям. Известно, что центрированные кубические решетки при $n = 3, 4, 5$ являются наилучшими для интегрирования по формулам Соболева. Найденные кубатурные формулы реализованы в программе для ЭВМ (см. [4]).

Приведем еще примеры построения кубатурных формул для рациональных многогранников.

1. Кубатурная формула для куба в n-мерном пространстве с кубической решеткой интегрирования.

Не приводя здесь достаточно громоздких выкладок, сформулируем результат: вычисление многомерного интеграла по кубу может быть сведено к n-кратному повторному интегрированию по квадратурной формуле

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\,[c_0 f(a) + \ldots + c_m f(a + hm) +$$

$$+ f(a + h(m+1)) + \ldots + f(b - h(m+1)) +$$

$$+ c_m f(b - hm) + \ldots + c_0 f(b)],$$

где коэффициенты c_k удовлетворяют системе уравнений:

$$\sum_{k=0}^{m} c_k k^q - \frac{1}{q+1} B_{q+1}(m+1) = 0,$$

$$q = 0,1,\ldots,m-1. \qquad (2)$$

Здесь $B_k(x)$ - полиномы Бернулли степени k .

2. Кубатурная формула для правильного треугольника на плоскости.

Наилучшей решеткой для интегрирования на плоскости является решетка, разбивающая плоскость на правильные треугольники. Ее матрица периодов равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Если область интегрирования Ω - правильный треугольник, все вершины которого лежат в точках решетки с матрицей периодов hA ,то, по определению,любой угол треугольника будет рациональным относительно решетки. Один из углов задается неравенствами

$$\{ x_2 \geqslant 0,\ \sqrt{3}x_1 - x_2 \geqslant 0 \}.$$

Описанным выше способом этот угол можно развернуть в прямой. При этом решетка интегрирования преобразуется в квадратную и вычисление коэффициентов кубатурной формулы делается так, как в примере 1 . Нетрудно сосчитать, что матрица преобразования координат C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{3} \\ 1 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \qquad |\det C| = 2/\sqrt{3}.$$

Коэффициенты c_γ в точках $A\gamma$ при $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ равны

$$c_\gamma = \sqrt{3}/2\ c'_\gamma = \sqrt{3}/2\ c_{\gamma_1} \cdot c_{\gamma_2},$$

где коэффициенты c_{γ_1} и c_{γ_2} удовлетворяют системе (2) .

3. Кубатурные формулы для симплекса $\{x_i \geqslant 0,\ i=1,\ldots,n;\ x_1+\ldots+x_n \leqslant N\}$.

Нетрудно убедиться в том, что все телесные углы с 0-мерными вершинами у симплекса являются простейшими. Будем строить кубатурные формулы для телесных углов симплекса по кубической решетке, относительно которой все телесные углы рациональны. Один из углов - координатный угол, способ нахождения коэффициентов для которого указан выше. Рассмотрим угол Ω , задаваемый неравенствами $\{x_i \geqslant 0,\ i=1,\ldots,n-1;\ x_1+\ldots+x_n \leqslant N\}$.

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad AB = B.$$

Матрица B унимодулярна, так как она целочисленна и ее определитель равен 1. Матрица B^{-1} также унимодулярна. Поэтому $k_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, и $C = B$. Преобразование координат $y = Bx$ переведет угол Ω в прямой. Вследствие того, что B унимодулярна, кубическая решетка перейдет снова в кубическую. Значит, коэффициенты кубатурной формулы для угла Ω вычисляются по способу, указанному в примере 1.

Ш. Пусть многогранник M содержит произвольные телесные углы. Для того чтобы вычислить коэффициенты кубатурной формулы для какого-либо телесного угла многогранника M, предварительно этот угол нужно разбить на простейшие, затем построить кубатурные формулы для составляющих простейших углов по способу, указанному выше. Так как при разбиении телесного угла на простейшие появляются новые грани, то выгодно строить кубатурные формулы для составляющих простейших углов с таким расчетом, чтобы при их сложении не возникали пограничные слои из коэффициентов около новых граней. В [1] высказано предположение, что такое построение можно осуществить, используя как внутренние, так и внешние пограничные слои из коэффициентов, которые при сложении должны компенсировать друг друга. В настоящем пункте эта идея реализована для телесных углов, представимых в виде суммы двух простейших. Для 3-мерного пространства этого случая достаточно, чтобы охватить любой рациональный многогранник.

Пусть телесный угол Ω с вершиной в начале координат представлен в виде суммы двух простейших углов Ω_1 и Ω_2 таким образом, что при разбиении Ω возникла только одна новая грань. Ясно, что эта грань может быть только $(n-1)$-мерной. Пусть $\Omega_1 = \{ x : Bx \geqslant 0 \}$,

$\Omega_2 = \{ x : Dx \geqslant 0 \}$. По предположению, $d_{11} = -\lambda b_{11}, \dots, d_{1n} = -\lambda b_{1n}$, где $\lambda > 0$. Число λ находится следующим образом. Так же, как и в пункте П, переведем углы Ω_1 и Ω_2 в прямые координатные углы $y_1 \geqslant 0, \dots, y_n \geqslant 0$ и $z_1 \geqslant 0, \dots, z_n \geqslant 0$ при помощи преобразований $y = C_1 x$ и $z = C_2 x$ соответственно. Угол Ω_1, например, можно задать и при помощи неравенств $\Lambda B x \geqslant 0$, где Λ - диагональная матрица с положительными элементами, а матрица C_1 для угла Ω_1 и решетка $\Gamma(A)$ строятся единственным образом. Поэтому в об-

щем случае $Bx=BC_1^{-1}y=\Lambda_1 y,\ Dx=DC_2^{-1}z=\Lambda_2 z$, где Λ_1 и Λ_2 - диагональные матрицы с положительными элементами. Предположим (это не нарушает общности), что B и D выбраны таким образом, что Λ_1 и Λ_2 - единичные матрицы, т.е. $B=C_1$,и $D=C_2$. По построению, преобразования $y=C_1 x$ и $z=C_2 x$ переводят некоторые фиксированные векторы, лежащие на одномерных гранях углов Ω_1 и Ω_2 , в единичные координатные векторы. Но углы Ω_1 и Ω_2 имеют общую $(n-1)$ -мерную грань, значит, все одномерные грани, за исключением двух, у них тоже общие, т.е. матрицы C_1^{-1} и C_2^{-1} с точностью до порядка нумерации столбцов имеют вид

$$C_1^{-1}=\begin{pmatrix} p_1\tilde{c}_{12} & \dots & \tilde{c}_{1n} \\ p_2\tilde{c}_{22} & \dots & \tilde{c}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_n\tilde{c}_{n2} & \dots & \tilde{c}_{nn}\end{pmatrix},\quad C_2^{-1}=\begin{pmatrix} q_1\tilde{c}_{12} & \dots & \tilde{c}_{1n} \\ q_2\tilde{c}_{22} & \dots & \tilde{c}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_n\tilde{c}_{n2} & \dots & \tilde{c}_{nn}\end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\tilde{p}_i$ и $\tilde{q}_i$ алгебраические дополнения к элементам p_i и q_i соответственно. Тогда $\tilde{p}_i/|C_1^{-1}|=b_{1i}$, $\tilde{q}_i/|C_2^{-1}|=d_{1i}$. Так как $\tilde{p}_i=\tilde{q}_i$ и $d_{1i}=-\lambda b_{1i}$, то

$$\lambda=-|C_1^{-1}|/|C_2^{-1}|=-|B^{-1}|/|D^{-1}|.$$

Тем самым установлено следующее свойство: для любой фиксированной точки $x^{(0)}\in R^n$ имеет место равенство

$$y_1^{(0)}=\left(|B^{-1}|\,/\,|D^{-1}|\right)z_1^{(0)},$$

где

$$y^{(0)}=C_1x^{(0)}=Bx^{(0)},\quad z^{(0)}=C_2x^{(0)}=Dx^{(0)}.$$

Переходим к построению функционала $l_\Omega(x)$, который будем искать в виде $l_\Omega(x)=l_{\tilde{\Omega}_1}(Bx)+l_{\tilde{\Omega}_2}(Dx)$. В качестве узлов в $l_\Omega(x)$ возьмем узлы решетки $\Gamma(A)=\{A\gamma:\gamma\in R^n\}$. Функционалы погрешностей для углов $\tilde{\Omega}_1=\{y_1\geqslant 0,\dots,y_n\geqslant 0\}$ и $\tilde{\Omega}_2=\{z_1\geqslant 0,\dots,z_n\geqslant 0\}$ с узлами соответственно в точках $BA\gamma$ и $DA\gamma$ построим таким же способом, что и в [2] , только для угла $\tilde{\Omega}_2$ вблизи гиперплоскости $z_1=0$ возьмем внешний пограничный

слой из коэффициентов и узлов. Здесь мы воспользуемся методикой работы [2] и выпишем лишь только те системы уравнений, из которых находятся коэффициенты пограничного слоя, расположенного вблизи плоскости $z_1 = 0$ или, что то же, плоскости $y_1 = 0$. Эти системы соответственно для $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$ имеют вид:

$$\sum_{\tau=0}^{N_1-1}\left[\sum_{\gamma_1=0}^{m_\tau^{(1)}} p^{(\tau)}[\gamma_1](\gamma_1+\xi_1^{(\tau)})^\alpha - \frac{B_{\alpha+1}(m_\tau^{(1)}+\xi_1^{(\tau)}+1)}{\alpha+1}\right] = 0, \tag{3}$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{\tau=0}^{N_2-1}\left[\sum_{\beta_1=0}^{-m_\tau^{(2)}} q^{(\tau)}[\beta_1](\beta_1+\eta_1^{(\tau)})^\alpha - \frac{B_{\alpha+1}(1+\eta_1^{(\tau)})}{\alpha+1}\right] = 0, \tag{4}$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots, m,$$

где

$\xi^{(\tau)}$ $(\tau = 0, 1, \ldots, N_1 - 1)$ - все точки решетки $\Gamma(A)$, попавшие при преобразовании $y = Bx$ в куб $K_1 = \{y : 0 \leq y_i < 1,$ $i = 1, \ldots, n\}$;

$\eta^{(\tau)}$ $(\tau = 0, 1, \ldots, N_2 - 1)$ - точки решетки $\Gamma(A)$, попавшие при преобразовании $z = Dx$ в куб

$K_2 = \{z : 0 \geq z_1 > -1,\ 0 \leq z_i < 1,\ i = 2, \ldots, n\}$;

$m_\tau^{(1)}$, $m_\tau^{(2)}$ - натуральные числа;

$m_\tau^{(1)}$ - толщина пограничного слоя для подрешетки $\{\gamma + \xi^{(\tau)},$ $\gamma \in R^n\}$;

$m_\tau^{(2)}$ определяется аналогично $m_\tau^{(1)}$;

$B_\alpha(t)$ - полином Бернулли степени α.

Наша дальнейшая цель - показать, что за счет выбора подходящего решения системы (4) можно добиться того, чтобы коэффициенты функционала $l_\Omega(x) = l_{\tilde{\Omega}_1}(Bx) + l_{\tilde{\Omega}_2}(Dx)$ в узлах, расположенных вблизи грани $\Omega \cap (b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = 0)$, равнялись 1. Для этого выясним, какова структура точек $\xi^{(\tau)}$, $\tau = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$. Обозначим через $N_1^{(1)}$ число всех точек $\xi^{(\tau)} \in K_1$, для которых выполняется равенство $\xi_1^{(\tau)} - (BA\gamma)_1 = 0$,

а через T_1 - число различных гиперплоскостей вида $(BAx)_1 = z_1^{(\kappa)}$, на каждой из которых лежит хотя бы одна точка $BA\gamma \in K_1$. В силу того что совокупность $\{BA\gamma, \ \gamma \in R^n\}$ образует решетку, числа $z_1^{(\kappa)}$ имеют вид:

$$z_1^{(0)} = 0, \quad z_1^{(1)} = h_0, \ldots, z_1^{(T_1-1)} = (T_1 - 1)h_0,$$

причем число различных точек $BA\gamma \in K_1$, у которых $(BA\gamma)_1 = z_1^{(\kappa)}$, равно одному и тому же числу $N_1^{(1)}$ при всех $\kappa = 0, 1, \ldots, T_1 - 1$. Так как $T_1 h_0 = 1$, то $h_0 = 1/T_1$. Каждое число $\xi_1^{(\tau)}$ (первая координата точки $\xi^{(\tau)}$) при $\kappa = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ совпадает с каким-либо числом $z_1^{(\kappa)}$ при $\kappa = 0, 1, \ldots, T_1 - 1$, т.е. точки $\xi^{(\tau)}$ разбиваются на T_1 групп, причем в каждой группе содержатся те точки $\xi^{(\tau)}$, у которых совпадают первые координаты. Аналогичные рассуждения применимы и для узлов $\eta^{(\tau)}$ $(\tau = 0, 1, \ldots, N_2 - 1)$, где $N_2 = N_2^{(1)} \cdot T_2$. Причем $N_2^{(1)} = N_1^{(1)}$, так как числа $N_1^{(1)}$ и $N_2^{(1)}$ определяются одной и той же плоскостью $z_1 = y_1 = 0$ и одними и теми же одномерными векторами, принадлежащими ей. Заметим еще, что решетка $\Gamma(B^{-1}) = \{B^{-1}\gamma : \gamma \in R^n\}$ является подрешеткой решетки $\Gamma(A)$. Отсюда $|B^{-1}| = N_1 |A|$. Точно так же $|D^{-1}| = -N_2 |A|$.

Предыдущие рассуждения позволяют привести системы (3) и (4) к виду

$$\sum_{\tau=0}^{T_1-1}\left[\sum_{\gamma_1=0}^{m_\tau^{(1)}} p^{(\tau)}[\gamma_1]\left(\gamma_1 + \frac{\tau}{T_1}\right)^{\alpha} - \frac{B_{\alpha+1}\left(m_\tau^{(1)} + \frac{\tau}{T_1} + 1\right)}{\alpha+1}\right] = 0, \tag{5}$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{\tau=0}^{T_2-1}\left[\sum_{\beta_1=0}^{-m_\tau^{(2)}} q^{(\tau)}[\beta_1]\left(\beta_1 - \frac{\tau}{T_2}\right)^{\alpha} - \frac{B_{\alpha+1}\left(1 - \frac{\tau}{T_2}\right)}{\alpha+1}\right] = 0, \tag{6}$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots, m.$$

Подберем числа $m_\tau^{(\kappa)}$ $(\kappa = 1,2;\ \tau = 0, 1, \dots, N_\kappa - 1)$ такими, чтобы: 1) системы (5) и (6) были разрешимы; 2) точки внешнего пограничного слоя угла $\widetilde{\Omega}_2$ вблизи $z_1 = 0$ при соответствующем линейном преобразовании координат взаимно-однозначно переходили в точки внутреннего пограничного слоя угла $\widetilde{\Omega}_1$ вблизи $y_1 = 0$. Далее преобразуем каждое уравнение системы (5), используя следующие формулы для полиномов Бернулли [5]:

$$B_\kappa(0) = t^{\kappa-1} \sum_{s=0}^{t-1} B_\kappa\left(\frac{s}{t}\right), \quad \kappa = 0,1,\dots; \quad t = 1,2,\dots;$$

$$\sum_{j=0}^{\tau} (\xi + j)^s = \frac{B_{s+1}(\xi+\tau+1)}{s+1} - \frac{B_{s+1}(\xi)}{s+1},$$

$$s, \tau = 0, 1, \dots; \quad \xi \in (-\infty, \infty);$$

$$B_\kappa(0) = B_\kappa(1), \quad B_{2\kappa-1}(1-\xi) = -B_{2\kappa-1}(\xi),$$

$$\kappa = 1,2,\dots, \qquad \xi \in (0,1).$$

Учитывая, что $\gamma_1 = (|B^{-1}| \,/\, |D^{-1}|)\beta_1 = -\dfrac{N_1}{N_2}\beta_1 = -\dfrac{T_1}{T_2}\beta_1$

и

$$\sum_{\tau=0}^{T_1-1} \sum_{\gamma_1=0}^{m_\tau^{(1)}} p^{(\tau)}[\gamma_1]\left(\gamma_1 + \frac{\tau}{T_1}\right)^\alpha = \left(-\frac{T_2}{T_1}\right)^\alpha \sum_{\tau=0}^{T_2-1} \sum_{\beta_1=0}^{-m_\tau^{(2)}} p^{(\tau)}[\gamma_1]\left(\beta_1 - \frac{\tau}{T_2}\right)^\alpha,$$

имеем

$$\sum_{\tau=0}^{T_1-1}\left[\sum_{\gamma_1=0}^{m_\tau^{(1)}} \left(p^{(\tau)}[\gamma_1]-1\right)\left(\gamma_1+\frac{\tau}{T_1}\right)^\alpha - \frac{B_{\alpha+1}\left(\frac{\tau}{T_1}\right)}{\alpha+1}\right] =$$

$$= \left(-\frac{T_2}{T_1}\right)^{\alpha} \sum_{\tau=0}^{T_2-1} \left[\sum_{\beta_1=0}^{-m_\tau^{(2)}} \left(p^{(\tau)}[\gamma_1]-1\right)\left(\beta_1-\frac{\tau}{T_2}\right)^{\alpha}\right] - \frac{1}{T_1^{\alpha_1}} \frac{B_{\alpha+1}(0)}{\alpha+1} =$$

$$= \left(-\frac{T_2}{T_1}\right)^{\alpha+1} \sum_{\tau=0}^{T_2-1} \left[\sum_{\beta_1=0}^{-m_\tau^{(2)}} \left(1-p^{(\tau)}[\gamma_1]\right)\left(\beta_1-\frac{\tau}{T_2}\right)^{\alpha} - \frac{B_{\alpha+1}\left(1-\frac{\tau}{T_2}\right)}{\alpha+1}\right].$$

Отсюда следует, что если коэффициенты $p^{(\tau)}[\gamma_1]$, $\tau=1,\dots,T_1$, $\gamma_1=0,1,\dots,m_\tau^{(1)}$, являются решением системы (5), то коэффициенты

$$\left(1-p^{(\tau)}\left[\frac{N_1}{N_2}\beta_1\right]\right), \quad \tau=0,1,\dots,T_2, \quad \beta_1=0,-1,\dots,-m_\tau^{(2)},$$

являются решением системы (6) при подходящих $m_\tau^{(1)}$ и $m_\tau^{(2)}$. А это значит, что при таком выборе решения системы (6) коэффициенты функционала $\ell_\Omega(x)=\ell_{\tilde{\Omega}_1}(Bx)+\ell_{\tilde{\Omega}_2}(Dx)$ в точках, расположенных вблизи грани $\Omega\cap(b_{11}x_1+\dots+b_{1n}x_n=0)$ и удаленных от остальных граней не ближе чем на L, равны 1 (L - толщина пограничного слоя функционала $\ell_\Omega(x)$).

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974.- 808 с.
2. Войтишек Л.В. Об одном частном случае построения кубатурных формул с пограничным слоем.- Журн.вычислит.математики и мат.физики, 9, № 2, 1969, с.417-418.
3. Блинов Н.И., Войтишек Л.В. Кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем для куба.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1970, вып.38, с.8-18.
4. Блинов Н.И. Приближенное вычисление n -кратных интегралов.- Информ. бюлл."Алгоритмы и программы", ВНТИцентр, М., 1974, №3, 17, с.12-13.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.-М.: Физматгиз, 1962.-1100 с.