УДК 517.946

СЛАБОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СВОЙСТВА

Р.С. Сакс (Новосибирск)

Рассматривается класс неэллиптических систем дифференциальных уравнений, которые мы называем слабоэллиптическими, так как они обладают свойствами эллиптических систем такими, как гипоэллиптичность систем с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, аналитическая гипоэллиптичность систем с аналитическими коэффициентами и имеют в ограниченных областях с гладкой границей нетеровы краевые задачи.

Слабоэллиптические системы дифференциальных уравнений содержатся в более общем классе слабоэллиптических систем псевдодифференциальных уравнений (см. [1], где имеется наиболее простое определение). Поэтому слабую эллиптичность конкретной системы можно проверять, проводя последовательные $\mathcal{C}$-преобразования системы. При этом мы приходим в общем случае к эллиптической системе псевдодифференциальных уравнений. Однако для систем дифференциальных уравнений можно применять другое дифференциальное $\mathcal{Q}$-преобразование и прийти к дифференциальной эллиптической системе. Это важно при изучении краевых задач.

Работа состоит из 4-х параграфов. В § 1 мы приводим основные определения слабой эллиптичности дифференциального оператора и доказываем их эквивалентность (теорема 1). Определение приводимости оператора к локально эллиптическому задает основной алгоритм для проверки принадлежности системы к рассматриваемому классу.

В § 2 устанавливается тесная связь между классами систем эллиптических по Дуглису-Ниренбергу и слабоэллиптических. Показывается, что, расширяя класс систем, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу, слабоэллиптическими системами, мы получаем класс обобщенно эллиптических систем, который обладает инвариантностью относительно линейных невырожденных преобразований строк и столбцов оператора (теорема 3), а также алгебраической структурой, являясь полугруппой относительно композиции операторов (теорема 4). Поэтому обоб-

щенная эллиптичность системы, в отличие от эллиптичности по Дуглису-Ниренбергу, не зависит от того вида, в котором записана система, а также от выбора порядков для строк и столбцов оператора системы (теорема 2).

Операторы A с постоянными коэффициентами из этого класса характеризуются тем, что их определители (т.е. скалярные операторы $\det A$) эллиптичны.

В § 3 доказывается гипоэллиптичность слабоэллиптического оператора с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и аналитическая гипоэллиптичность слабоэллиптического оператора с аналитическими в рассматриваемой области коэффициентами.

В § 4 излагается наш подход к изучению краевых задач для слабоэллиптических систем и формулируются основные теоремы 6 и 7.

§ 1. Определения слабой эллиптичности дифференциального оператора

Обозначения: G - замкнутая ограниченная область из R^n, $n \geq 2$, с границей Γ класса C^∞. Без ограничения общности будем считать, что G является замыканием относительно компактной открытой подобласти G^0 многообразия $\mathcal{M}$ без границы, в котором G^0 обладает границей Γ. Далее, $T'(G)=G\times(R^n\setminus 0)$, $S(G)=G\times S^{n-1}$; $\mathcal{U}$ - угловая окрестность точки (x,ξ) из $T'(G)$, например, $\mathcal{U}=V\times K$, где V - окрестность точки x, K - коническая окрестность вектора $\xi\neq 0$. Наконец, $\mathcal{U}_1\Subset\mathcal{U}_2$ означает, что $\overline{\mathcal{U}}_1\subset\mathcal{U}_2$.

Пусть $\lambda=(1-\Delta)^{1/2}$, где Δ - скалярный оператор Лапласа на $\mathcal{M}$. Целочисленному вектору $s=(s_1,\dots,s_\ell)$ поставим в соответствие матричный псевдодифференциальный оператор J_s, у которого по диагонали стоят операторы $\lambda^{s_1},\dots,\lambda^{s_\ell}$ порядков $s_1,\dots,s_\ell$ соответственно, а остальные элементы равны нулю. Назовем J_s диагональным оператором.

Пусть $\ell\leq L$ и $A=\{a_{ij}\}$ есть $(L\times\ell)$ - матричный дифференциальный оператор с коэффициентами класса C^∞ в области $G_1\supset G$; $\alpha_{ij}=\operatorname{ord} a_{ij}$. Число $m=\max_{ij}\alpha_{ij}$ называется скалярным порядком оператора A.

Пусть s и t - два целочисленных вектора с компонентами s_i и t_j, $i=1,\dots,L$, $j=1,\dots,\ell$. Следуя [5], скажем, что оператор A имеет векторный порядок $(s;t)$, если $\alpha_{ij}\leq s_i+t_j$. Числа s_i и t_j - "порядки" строк и столбцов оператора A - определяются неоднозначно. Их можно нормировать условием $s_i\leq 0$, $\max_i s_i=0$. Вообще, если порядки t_j

заданы, то точные порядки s_i строк матрицы A определяются однозначно. Например, $t_j = \max_i \alpha_{ij}$, $s_i = \max_j (\alpha_{ij} - t_j)$.

Задав порядок оператора A, можно выделить его главную часть $A_0^{(s,t)}$ (и его символ $\sigma_{s,t}(A) \equiv A_0^{(s,t)}(x,\xi)$), отбросив в операторах a_{ij} члены, порядки которых меньше $s_i + t_j$.

Отметим, что если Q - другой $(M \times L)$ - матричный дифференциальный оператор порядка $(q,-S)$, то оператор QA имеет, в частности, порядок (q,t) и его символ $\sigma_{q,t}(QA) = \sigma_{q,-s}(Q) \cdot \sigma_{s,t}(A)$. Напомним, что оператор A порядка (s,t) называется эллиптическим в области G, если $\operatorname{rang} \sigma_{s,t}(A) = \ell$ (максимален) в $T'(G)$. Пусть A - квадратный $(\ell \times \ell)$ - дифференциальный оператор порядка $(S;t)$, неэллиптический в области G.

1. Оператор A порядка (S,t) называется слабоэллиптическим в области G (в классе псевдодифференциальных операторов [1]), если для любой точки (x,ξ) из $T'(G)$ существует угловая окрестность $\mathcal{U} \subset T'(G)$ и векторы $\tau_1, \dots, \tau_m$ такие, что

$$A = J_s \left(J_{\tau_1} \overset{0}{A}_1 \dots J_{\tau_m} \overset{0}{A}_m \right) J_t + T, \tag{1}$$

где J_{τ_k} - диагональные операторы, $\overset{0}{A}_k$ - матричные псевдодифференциальные операторы нулевого порядка, эллиптические в $\mathcal{U}$ (т.е. $\det \sigma_0(\overset{0}{A}_k) \neq 0$ в $\mathcal{U}$, $k = 1, \dots, m$), а T - оператор порядка $-\infty$ в $\mathcal{U}$.

Целое число $\sigma = |S| + |t| + |\tau_1| + \dots + |\tau_m|$, где, скажем, $|S| = S_1 + \dots + S_\ell$, называется степенью слабоэллиптического оператора. Оно не зависит от выбора представления (1) и определяется однозначно на каждой связной компоненте многообразия $T'(G)$.

Так же, как в [1], приведем два других определения слабой эллиптичности оператора A, удобные при проверке принадлежности A к классу слабоэллиптических операторов.

2. Мы скажем, что оператор A допускает локально дифференциальное Q - преобразование в окрестности точки (x_0,ξ_0) из $T'(G)$, если существует угловая окрестность $\mathcal{U} \subset T'(G)$ точки (x_0,ξ_0) и квадратный матричный дифференциальный оператор Q с гладкими в G коэффициентами порядка $(q,-S)$ такой, что

а) оператор Q эллиптичен в $\mathcal{U}$ (т.е. $\det \sigma_{q,-s}(Q)(x,\xi) \neq 0$ для $(x,\xi) \in \mathcal{U}$);

б) порядок оператора QA в G равен $(S_1,t) \neq (q,t)$, причем компоненты вектора $q - S_1$ неотрицательны и $|q - S_1| > 0$.

Обозначим через Q' часть матрицы Q, составленную из тех ее строк i, для которых компоненты $S_{1i} < q_i$. Тогда условие б) означает, что символическая матрица $Q'_0(x,\xi)$ оператора Q' порядка (q',t) аннулирует символ оператора A:

$$Q'_0(x,\xi)A_0^{(s,t)}(x,\xi) = 0, \quad (x,\xi)\in T'(G). \tag{2}$$

Необходимое условие существования локального Q-преобразования оператора A состоит в том, что существует окрестность $\mathcal{U}_0$ точки (x_0,ξ_0), где

$$\operatorname{rang} A_0^{(s,t)}(x,\xi) \le r_0 < \ell, \quad (x,\xi)\in \mathcal{U}_0. \tag{3}$$

Если ранг матрицы $A_0(x,\xi)$ постоянный в $\mathcal{U}_0$, то матрицу Q'_0, удовлетворяющую условию (2), а следовательно, и оператор Q, удовлетворяющий условиям а) и б), всегда можно построить. Действительно, пусть M - ненулевой минор матрицы A_0 ранга r в $\mathcal{U}_0$. Тогда, решая матричное уравнение $YA_0 = 0$ и задавая свободную часть неизвестной $((\ell-r)\times\ell)$ - матрицы Y в виде $M\cdot I_{\ell-r}$, мы получим полиномиальное по ξ решение, которое затем нормируем, исключая в каждой строке $Y(x,\xi)$ общие полиномиальные по ξ делители, отличные от нуля в $\mathcal{U}_0$ (при этом может оказаться, что какая-либо строка в Y не зависит от ξ).

Отметим, что если $YA_0(x,\xi) = 0$ в $\mathcal{U} = V\times K \Subset \mathcal{U}_0$, то в силу аналитичности $YA_0(x,\xi)$ по переменной ξ при фиксированном x равенство нулю сохранится для всех $(x,\xi)\in V\times R^n$.

Если $YA_0 \ne 0$ - вне этого множества, то умножим Y слева на срезывающую функцию $\varphi(x)\in C^\infty(G)$, равную единице в $\bar{V}\subset V_0$ и нулю вне V_0.

Тем самым мы построим матрицу Q'_0, удовлетворяющую условию (2). Достроим ее до невырожденной в $\mathcal{U}$ матрицы Q_0, полагая, например, $Q''_0 = (0, \varphi(x) I_r)$, где I_r - единичная матрица порядка r, если ненулевой минор M матрицы A_0 при $(x,\xi)\in\mathcal{U}$ расположен в ее левом верхнем углу. Пусть $(q,-S)$ - порядок оператора Q_0. Тогда Q - произвольный оператор порядка $(q,-S)$ с главной частью Q_0. Легко убедиться, что полученная матрица удовлетворяет условиям а) и б).

Нетрудно видеть, что оператор Q_0 имеет аналитические (либо постоянные) коэффициенты, если коэффициенты оператора A аналитичны (либо постоянны).

Как показывают примеры (см. (4) § 2, а также [3]), условие (3) в случае переменного ранга матрицы A_0 в любой окрестности точки (x_0,ξ_0) не

гарантирует существования матрицы $Q_0'(x,\xi)$, удовлетворяющей условию (2). Построение Q_0' в этом случае можно начинать с открытого подмножества окрестности точки (x_0,ξ_0), где матрица $A_0(x,\xi)$ имеет максимальный постоянный ранг.

Имеет место следующая

Лемма 1. Дифференциальный оператор A допускает локальное дифференциальное Q-преобразование тогда и только тогда, когда он допускает локальное псевдодифференциальное преобразование C.

Напомним, что преобразование C имеет вид (см. [1]): $C = J_e \cdot C^0$, где J_e - диагональный оператор, соответствующий вектору e с компонентами 0 или 1, $|e| > 0$, C^0 - псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, эллиптический в окрестности U_0 точки (x_0,ξ_0), и применяется оно к оператору $A^0 = J_{-s} A J_{-t}$ нулевого порядка, эллиптическому одновременно с A.

Действительно, пусть A допускает дифференциальное Q-преобразование в окрестности U_0 точки (x_0,ξ_0) из $T'(G)$. Тогда $Q = J_q Q^0 J_{-s}$, где Q^0 - псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, эллиптический в окрестности $U \Subset U_0$ точки (x_0,ξ_0). Из равенства $QA = A_1$, где A_1 - оператор порядка (s_1,t), применяя диагональные операторы J_{-s_1} слева и J_{-t} справа, получаем

$$A_1^0 = J_{-s_1} Q A J_{-t} = J_{q-s_1} Q^0 A^0 + T, \tag{4}$$

где нулевым индексом обозначены операторы нулевого порядка, T - оператор порядка $-\infty$ в U. Компоненты вектора $q - s_1$ неотрицательны, поэтому он представим в виде суммы векторов e_j с компонентами 0 или 1: $q - s_1 = e_1 + \ldots + e_m$, $m \geq 1$, а следовательно,

$$J_{q-s_1} Q^0 = C_m \ldots C_1 + T_1 \tag{5}$$

и оператор A допускает преобразования $C_1 = J_{e_1} Q^0$, $C_2 = J_{e_2}, \ldots, C_m = J_{e_m}$.

Обратно, пусть оператор A допускает C-преобразование в окрестности U_0 точки (x_0,ξ_0). Тогда из равенства $CA^0 = A_1^0$ имеем $CJ_{-s}A = A_1$, где A_1 - оператор порядка $(0,t)$. Следовательно, так как $|e| > 0$ и некоторые строки оператора C имеют первый порядок, то

$$\sigma_{(1,-s)}(CJ_{-s}) \cdot A_0^{(s,t)}(x,\xi) = 0, \quad (x,\xi) \in U_0 .$$

Так что система $YA_0 = 0$ имеет в U_0 гладкое нетривиальное решение, ибо

в силу эллиптичности C^0 ранг матрицы $\sigma_{(1,-s)}(J_\ell C^0 J_{-s})$ в $\mathcal{U}_0$ равен $|\ell| > 0$. Но это решение может не быть полиномом по ξ. Однако в этом случае таким же путем, как при доказательстве теоремы 1 приложения А в книге [4], можно найти нетривиальное в $\mathcal{J} \subset \mathcal{U}_0$ решение $Y(x,\xi)$, каждая компонента y_j которого представляет собой полином с постоянными коэффициентами относительно элементов a^0_{ij} матрицы $A_0^{(s,t)}(x,\xi)$ и, следовательно, является многочленом от ξ.

Далее, аналогично предыдущему, строится дифференциальный оператор Q. Лемма доказана.

Дальнейшие определения аналогичны определениям 3-5 из [1].

3. Оператор A называется приводимым к локально эллиптическому оператору в окрестности точки $(x_0,\xi_0) \in T'(G)$, если существуют окрестность $\mathcal{U} \subset T'(G)$ и цепочка последовательных Q-преобразований оператора $A: A_1 = Q_1 A, \ldots, A_p = Q_p A_{p-1}$, такие, что оператор A_p порядка (s_p,t) эллиптичен в $\mathcal{U}$.

Пусть (s_k,t) и $(q_k,-s_{k-1})$- порядки операторов A_k и Q_k. Целое число $\omega = |s|+|t| - \sum\limits_{k=1}^{p} (|q_k - s_k|)$ в $\mathcal{U}$ является инвариантом оператора, приводимого к локально эллиптическому. Оно не зависит от выбора цепочки операторов $\mathcal{D}_p = Q_p \ldots Q_1$, приводящей A к локально эллиптическому оператору $A_p = \mathcal{D}_p A$.

4. Оператор A допускает глобальное дифференциальное преобразование $\tilde{Q}$ в G, если существует $(m \times \ell)$ - матричный дифференциальный оператор $\tilde{Q}$ порядка $(\tilde{q},-s)$, не обязательно квадратный $(m \geqslant \ell)$ с гладкими в G коэффициентами, удовлетворяющий условиям а) и б) в $T'(G)$, т.е.

а) оператор $\tilde{Q} - (\tilde{q},-s)$ - эллиптичен в G,

б) порядок оператора $\tilde{Q}A$ равен $(\tilde{s}_1,t) \neq (\tilde{q},t)$, причем компоненты вектора $\tilde{q} - \tilde{s}_1$ неотрицательны.

Составим матрицу $\tilde{Q}'$ из тех строк, для которых компоненты $\tilde{s}_{1i} < \tilde{q}_i$. При $m > \ell$ дополнительно предположим, что

в) максимум ранга $\sigma_{(\tilde{q}',-s)}(\tilde{Q}')$ больше нуля в $T'(G)$.

5. Оператор A называется глобально приводимым к дифференциальному эллиптическому в G оператору, если он допускает цепочку глобальных $\tilde{Q}$-преобразований: $\tilde{A}_1 = \tilde{Q}_1 A, \ldots, \tilde{A}_p = \tilde{Q}_p \tilde{A}_{p-1}$ до эллиптического в G (вообще говоря, прямоугольного) оператора $\tilde{A}_p$ порядка $(\tilde{s}_p,t)$ (т.е. ранги матриц $\sigma_{(s,t)}(A),\ldots,\sigma_{(\tilde{s}_{p-1},t)}(A_{p-1})$ не максимальны, а ранг матрицы $\sigma_{(\tilde{s}_p,t)}(A_p)$ максимален в $T'(G)$).

Имеет место следующее утверждение, аналогичное теореме 1 из [2].

Теорема 1. Для квадратного матричного дифференциального оператора A порядка (s,t) следующие утверждения эквивалентны:

1) оператор A слабоэллиптичен в области G (в классе псевдодифференциальных операторов);

2) оператор A приводим в окрестности любой точки из $T'(G)$ к локально эллиптическому дифференциальному оператору;

3) оператор A глобально приводим к эллиптическому в области G дифференциальному оператору.

При этом инварианты σ и ω совпадают в каждой из связных компонент многообразия $T'(G)$.

Доказательство. Пусть оператор A слабоэллиптичен в области G и задана точка $(x_0, \xi_0) \in T'(G)$. Тогда он имеет в $U_0 \subset T'(G)$ представление (1), и в силу леммы 2 из [1] оператор $A^0 = J_{-s} A J_{-t}$ является приводимым к локально эллиптическому в $U' \Subset U_0$ оператору $A^0_p = \mathcal{D}_p A^0$ нулевого порядка с помощью цепочки $\mathcal{D}_p = C_p \ldots C_1$ локальных C-преобразований. Причем степень слабой эллиптичности оператора A равна $\omega = |s|+|t|-\omega^0_+$, где

$$\omega^0_+ = \sum_{k=1}^{p} |e_k| > 0$$

есть степень слабоэллиптического в U' оператора $\mathcal{D}_p$.

В силу леммы 1, оператор A допускает дифференциальное Q_1-преобразование в окрестности $U_1 \Subset U'$ и оператор $A_1 = Q_1 A$ имеет порядок $(s_1, t_1) \neq (q_1, t)$. Ему соответствует по формуле (4) оператор A^0_1 нулевого порядка, который эллиптичен одновременно с оператором A_1. Если A^0_1 не является эллиптическим в U_1, т.е. если $|q_1 - s_1| < \omega^0_+$, то, в силу леммы 4 из [1], он допускает локальное C-преобразование. Тогда снова, в силу леммы 1, оператор A_1 допускает Q_2-преобразование в окрестности $U_2 \Subset U_1$ и мы приходим к оператору $A_2 = Q_2 A_1$ порядка $(s_2, t) \neq (q_2, t)$.

Если оператор A_2 не эллиптичен в U_2, то рассмотрим оператор A^0_2 нулевого порядка и т.д. После конечного числа шагов мы придем к оператору $A_n = Q_n \ldots Q_1 A$ порядка (s_n, t) и такому, что

$$\omega^0_+ = \sum_{j=1}^{n} |q_j - s_j| .$$

Тогда оператор A^0_n нулевого порядка имеет в U_n представление

$$A^0_n = J_{q_n - s_n} Q^0_n \ldots J_{q_1 - s_1} Q^0_1 A^0 + T, \tag{6}$$

аналогичное представлению (4) у A^0_1, и, следовательно, является слабоэллиптическим в $U \Subset U_n$ оператором нулевой степени. Такой оператор является

эллиптическим в $\mathcal{U}$ в силу замечания к лемме 4 в [1] . Следовательно, оператор A_n порядка (s_n, t) - эллиптичен в $\mathcal{U}$, а оператор A - приводим к локально эллиптическому дифференциальному оператору A_n .

Обратно, если оператор A приводим в окрестности $\mathcal{U}_0$ заданной точки $(x_0, \xi_0) \in T'(G)$ к локально эллиптическому дифференциальному оператору $A_n = Q_n \dots Q_1 A$ порядка (s_n, t), то оператор A_n^0 нулевого порядка имеет представление (6) . Для каждого из операторов Q_j справедливо разложение (5) . Поэтому оператор A^0 является приводимым к эллиптическому в $\mathcal{U}_1 \Subset \mathcal{U}_0$ оператору A_n^0 нулевого порядка цепочкой C-преобразований. Тогда, в силу [1, лемма 2] , оператор A имеет в $\mathcal{U} \Subset \mathcal{U}_1$ представление (1), и так как (x_0, ξ_0) - произвольная точка из $T'(G)$, он является слабоэллиптическим в G .

Доказательство 2) $\Longrightarrow$ 3) проводится так же, как в теореме 1 из [1] . Предполагается, что многообразие $T'(G)$ связно, область G замкнута ($\bar{G} = G$) и оператор A приводим в окрестности $\mathcal{U}_q$ любой точки $q \in T'(G)$ к локально эллиптическому оператору. Окрестности $\mathcal{U}_q$ образуют покрытие $T'(G)$. Выберем из него конечное подпокрытие $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_N$, что возможно ввиду компактности $S(G)$.

В каждой $\mathcal{U}_j$ оператор A имеет цепочку $\mathcal{D}_{n_j}^{(j)} = Q_{n_j}^{(j)} \dots Q_1^{(j)}$ дифференциальных Q-преобразований, приводящую его к дифференциальному эллиптическому в $\mathcal{U}_j$ оператору $A_{n_j}^{(j)}$ порядка $(s_{n_j}^{(j)}, t)$.

При этом все цепочки имеют одинаковый инвариант

$$\omega_+^{(j)} = \sum_{k=1}^{n_j} | q_k^{(j)} - s_k^{(j)} |,$$

равный $\omega_+^0 = |s| + |t| - \sigma$, где σ - степень слабой эллиптичности оператора A . Пусть $n = \max_j n_j$, $n \leqslant \omega_+^0$. Все цепочки, у которых $n_j < n$, удлиним, дописав $n - n_j$ единичных матриц I_ℓ порядка ℓ .

Тогда цепочка $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n$ глобальных Q-преобразований строится следующим образом. Оператор $\tilde{Q}_1$ есть вертикальная блок-матрица, составленная из матриц $Q_1^{(j)}$:

$$\tilde{Q}_1 = \begin{pmatrix} Q_1^{(1)} \\ \vdots \\ Q_1^{(N)} \end{pmatrix} .$$

Из матриц $Q_2^{(j)}, I_\ell$ и нулевых образуем следующие матрицы порядка $N\ell$:

$$
\begin{pmatrix} Q_2^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_\ell & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_\ell \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_\ell & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_\ell \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} I_\ell & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_\ell & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_2^{(N)} \end{pmatrix}.
$$

Тогда $\widetilde{Q}_2$ - вертикальная $(N^2\ell \times N\ell)$ - блок-матрица, составленная из этих матриц, и т.д.

Легко убедиться, что операторы $\widetilde{Q}_1,\dots,\widetilde{Q}_n$ удовлетворяют условиям а), б) определения 4 и оператор $\widetilde{A}_n = \widetilde{Q}_n\dots\widetilde{Q}_1 A$ порядка $(\widetilde{S}_n, t)$ эллиптичен в области G. При этом

$$
\widetilde{q}_1 = \left(q_1^{(1)},\dots,q_1^{(N)}\right), \quad \widetilde{S}_1 = \left(s_1^{(1)},\dots,s_1^{(N)}\right),
$$

$$
\widetilde{q}_2 = \left(q_2^{(1)}, s_1^{(2)},\dots,s_1^{(N)}, s_1^{(1)}, q_2^{(2)},\dots,s_1^{(N)},\dots,s_1^{(1)}, s_1^{(2)},\dots,q_1^{(N)}\right),
$$

$$
\widetilde{S}_2 = \left(s_2^{(1)}, s_1^{(2)},\dots,s_1^{(N)}, s_1^{(1)}, s_2^{(2)},\dots,s_1^{(N)},\dots,s_1^{(1)}, s_1^{(2)},\dots,s_2^{(N)}\right)
$$

и т.д.

Перейдем, наконец, к доказательству 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть оператор A допускает цепочку глобальных $\widetilde{Q}$-преобразований до эллиптического оператора $\widetilde{A}_n = \widetilde{Q}_n \dots \widetilde{Q}_1 A$ порядка $(\widetilde{S}_n, t)$. Тогда, используя аналоги разложений (5) и (6), легко показать, что оператор A^0 приводим к эллиптическому в G оператору с помощью цепочки глобальных C-преобразований. В силу [2, теорема 1], он является приводимым в окрестности любой точки (x,ξ) из $T'(G)$ к локально эллиптическому оператору. Применяя лемму 1, получаем, что оператор A приводим к локально эллиптическому дифференциальному оператору. Что и требовалось.

Замечания; 1. Мы предполагаем, что коэффициенты оператора A заданы также вне области G, где он вообще не слабоэллиптичен. Из определения 1 легко убедиться, что оператор A сохраняет свойство слабой эллиптичности в некоторой окрестности области G.

2. В определении глобального Q-преобразования при $m > \ell$ мы несколько ослабили условие в) соответствующего определения в [1]. Если это сделать для C-преобразований, то лемме 3 нужно придать более слабую форму (см.ниже лемму 3а), формулировка теоремы 1 не изменится, но ее доказа-

тельство усложняется.

3. При доказательстве утверждения 3) $\Longrightarrow$ 2) теоремы 1 в [1] мы наложили дополнительное условие г) на цепочку глобальных C-преобразований. Тщательное изучение этого доказательства показало, что его можно усилить и доказать теорему 1 в формулировке, анонсированной в работе [2] .

В дополнении к этому параграфу мы приведем доказательство этой теоремы и тем самым обоснуем все предложения, которыми мы пользовались.

Дополнение. О псевдодифференциальных операторах

Определение глобального C-преобразования в [1] при $m > \ell$ можно ослабить, заменив условие в) -ранг матрицы $\sigma_1(C)$ больше нуля в $T'(X)$ - условием в$_0$) : максимум в $T'(X)$ ранга матрицы $\sigma_1(C)$ положителен [2] . Обозначим такие C-преобразования через $\tilde{C}$. Тогда справедлив следующий аналог леммы 3 в [1] :

Лемма 3а. <u>Оператор S нулевого порядка допускает глобальное $\tilde{C}$-преобразование тогда и только тогда, когда он допускает локальное $\tilde{C}$-преобразование в окрестности некоторой точки q из $T'(X)$</u> .

Действительно, если S допускает глобальное $\tilde{C}$-преобразование и ранг матрицы $\sigma_1(C)$ положителен в точке $q \in T'(X)$, то, так же, как при доказательстве леммы 3, строится квадратный оператор $\hat{C}$ первого порядка, осуществляющий локальное преобразование оператора S . Условие в$_0$) обеспечивает существование такой точки q .

Если ранг матрицы $\sigma_1(\tilde{C})$ равен нулю в точке q , то $\tilde{C}$ имеет в q нулевой порядок, а матрица $\sigma_0(\tilde{C})$ - максимальный ранг. Поэтому в $\tilde{C}$ можно выделить квадратный оператор $\hat{C}^o$ нулевого порядка, эллиптический в угловой окрестности точки q . Назовем его $\hat{C}^o$-преобразованием оператора S .

Обратно, пусть оператор S допускает локальное $\hat{C}$-преобразование в окрестности U_1 некоторой точки q_1 из $T'(X)$. Дополним U_1 окрестностями $U_2,\dots,U_N$, покрывающими многообразие $T'(X)$, выберем разбиение единицы $\sum \varphi_j = 1$, вписанное в покрытие $\{U_j\}$, и зададим произвольно квадратные эллиптические в U_j операторы C_j^o нулевого порядка для $j=2,\dots,N$ (например, $C_j^o = I_\ell$ в U_j) . Тогда оператор

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \hat{C}_1 \\ \varphi_2 C_2^o \\ \vdots \\ \varphi_N C_N^o \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям а) , б) и в$_0$), что и требовалось.

Формулировка теоремы 1 из [1] , если использовать $\tilde{C}$-преобразование вместо C , не изменяется. При этом упрощается доказательство утверждения

2) $\Longrightarrow$ 3), и оно переносится на доказательство соответствующего утверждения для дифференциальных операторов, что мы и сделали. Доказательство утверждения 3) $\Longrightarrow$ 2) этой теоремы несколько усложняется, так как требуется рассмотрение различных случаев.

Отметим, что формулировки теоремы 1 в [1] и в [2] отличаются тем, что в [1] мы дополнительно предполагаем, что цепочка $\mathcal{D}_p$ глобальных $\mathcal{C}$-преобразований удовлетворяет условию г). Однако доказательство, приведенное в [1], можно усилить и вывести утверждение 2) из 3) без этого условия. Мы приведем это рассуждение, тем самым полностью доказав теорему 1, анонсированную в [2]. Итак, докажем следующее

Предложение. Пусть квадратный оператор A^o нулевого порядка глобально приводим к эллиптическому на X прямоугольному оператору $A_p = \mathcal{D}_p A$ нулевого порядка с помощью цепочки $\mathcal{D}_p = \tilde{C}_p \ldots \tilde{C}_1$ глобальных $\tilde{C}$-преобразований. Тогда в окрестности любой точки q из $T'(X)$ оператор A^o приводим к локально эллиптическому квадратному оператору $\hat{A}_p$ нулевого порядка.

Доказательство. Зафиксируем точку $q_0 = (x_0, \xi_0)$ из $T'(X)$ и рассмотрим матрицу $\sigma_1(\tilde{C}_1)$ в точке q_0. Возможны два случая:

1) Если ранг этой матрицы положителен, то, в силу леммы 3а, в $\tilde{C}_1$ можно выделить квадратный оператор $\hat{C}_1$, осуществляющий локальное $\hat{C}'$-преобразование оператора A^o в окрестности $\mathcal{U}_0$ точки q_0. Если матрица $\hat{C}_1$ стоит в верхней части $\tilde{C}_1$, то $\tilde{C}_1 = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ C_1' \end{pmatrix}$. В противном случае такой вид имеет матрица $\Pi_1 \tilde{C}_1$, где Π_1 - невырожденная матрица, осуществляющая требуемую перестановку строк $\tilde{C}_1$. Отметим, что $\tilde{C}_2 \tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 \Pi_1^{-1} \cdot \Pi_1 \tilde{C}_1$ и умножение оператора $\tilde{C}_2$ на Π_1^{-1} не меняет его свойств. Далее, так же, как в [1],

$$\tilde{C}_1 = \Pi_1^{-1} \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ B_1 \hat{C}_1 + T \end{pmatrix} = \Pi_1^{-1} \begin{pmatrix} I_\ell & 0 \\ B_1 & I_{m_1 - \ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{T}_1, \tag{7}$$

где операторы $\hat{T}$ и $\hat{T}_1$ имеют в $\mathcal{U} \Subset \mathcal{U}_0$ порядок $-\infty$, а $B_1 = C_1' \hat{C}_1^L$ имеет в точке q_0 нулевой порядок, т.е. $\sigma_1(B_1)|_q = 0$, так как при построении $\hat{C}_1$ мы выбираем максимальное число линейно-независимых строк в матрице $\sigma_1(\tilde{C}_1)|_{q_0}$ (см. лемму 5 в [1]).

Если ранг $\sigma_1(\tilde{C}_1)$ постоянен в некоторой окрестности $\mathcal{U}' \Subset \mathcal{U}$ точки q_0, то порядок B_1 равен нулю в $\mathcal{U}'$.

2) Если ранг матрицы $\sigma_1(\tilde{C}_1)$ в точке q_0 равен нулю, то, согласно лемме 3а, в $\tilde{C}_1$ можно выделить квадратный оператор $\hat{C}_1^o$ нулевого порядка, эллиптический в $\mathcal{U}_0$. Следовательно, для $\tilde{C}_1$ можно написать аналогичное (7) представление с оператором $\hat{C}_1^o$ вместо $\hat{C}_1$ и с матрицей $B_1^o = C_1' \hat{C}_1^{oL}$

вместо B_1, причем B_1^0 имеет в точке q_0 нулевой порядок, так как $\sigma_1(C_1')\big|_{q_0} = 0$.

Итак, в обоих случаях оператор представим в виде (7) с матрицей B_1 нулевого порядка в точке q_0 и с операторами $\hat{C}_1$ первого $(|e_1|>0)$ или $\hat{C}_1^0$ — нулевого $(|e_1^0|=0)$ порядков в $\mathcal{U}$.

Применяя оператор A к обеим частям равенства (7), получаем

$$A_1^0 \equiv \tilde{C}_1 A^0 = \Pi_1^{-1}\begin{pmatrix} I_e & 0 \\ B_1 & I_{m_1-e}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{A}_1^0 \\ 0\end{pmatrix} + \hat{T}_1'. \tag{8}$$

Если оператор A^0 приводим к эллиптическому уже на первом шаге, т.е. если A_1^0 эллиптичен на X, то оператор $\hat{A}_1^0$ эллиптичен в $\mathcal{U}_1 \Subset \mathcal{U}$. Действительно, сравнивая символы операторов равенства (8) в $\mathcal{U}$ и учитывая формулы символа композиции операторов, имеем $\sigma_1(B)\sigma_0(\hat{A}_1) = 0$ и

$$\sigma_0(A_1^0) = \Pi_1^{-1}\begin{pmatrix} I_e & 0 \\ \sigma_0(B_1) + i\nabla_\xi \sigma_1(B_1)\nabla_x & I_{m_1-e}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_0(\hat{A}_1) \\ 0\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Очевидно, матричный дифференциальный оператор в (9) обратим, поэтому

$$\begin{pmatrix}\sigma_0(\hat{A}_1) \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_0(\hat{A}_1) \\ -(\sigma_0(B_1) + i\nabla_\xi\sigma_1(B_1)\nabla_x)\sigma_0(\hat{A}_1) + \sigma_0(A_1')\end{pmatrix}.$$

Последняя матрица так же, как и $\sigma_0(A_1)$, имеет максимальный ранг в некоторой окрестности точки q_0. Мы убедимся в этом, показав, что соответствующая ей система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора $Y(x,\xi)$ с нулевой правой частью имеет только тривиальное решение в точке q_0. Решая эту систему и учитывая, что

$$\nabla_x\sigma_0(\hat{A}_1)\cdot Y = \nabla_x(\sigma_0(\hat{A}_1)Y) + \sigma_0(\hat{A}_1)\nabla_x Y = \sigma_0(\hat{A}_1)\nabla_x Y,$$

$$\nabla_\xi\sigma_1(B_1)\cdot\sigma_0(\hat{A}_1) = 0 \quad \text{в} \quad q_0$$

и что матрица $\sigma_0(A_1)$ обратима слева легко получаем $Y(x_0,\xi_0) = 0$.

Следовательно, матрица $\sigma_0(\hat{A}_1)$ не вырождена в некоторой окрестности U_1 точки q_0, что и требовалось.

Отметим, что в случае $p=1$ на связном многообразии $T'(x)$ не сущест-

вует точек q_0, удовлетворяющих условию 2). Действительно, в окрестности такой точки степень σ слабоэллиптического оператора A равна нулю $(\sigma = -|\ell_1^0| = 0)$, тогда как в окрестности точки q_1, удовлетворяющей условию 1), она отрицательна $(\sigma = -|\ell_1| < 0)$, что невозможно. Существование точек q_1 обеспечивается условием в$_0$) оператора $\tilde{C}_1$, поэтому точек q_0 нет.

Пусть $p > 2$. Разбивая матрицу $\tilde{C}_2 \Pi_1^{-1}$ на две части (C_2', C_2''), из (7) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{C}_2 \tilde{C}_1 &= (C_2' + C_2'' B_1, C_2'') \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + T' = \\ &= (C_2, 0) \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + T', \end{aligned} \tag{10}$$

где $C_2 = C_2' + C_2'' B_1$. Так как $\tilde{C}_2 = J_{\tilde{\ell}_2} \tilde{C}_2^o$, то матрица C_2 представима в виде $J_{\tilde{\ell}_2} C_2^{o}$ с матрицей C_2^o нулевого порядка, эллиптической в точке q_0, т.е.

$$\sigma_1(C_2^o)|_{q_0} = 0, \quad \operatorname{rang} \sigma_0(C_2^o)|_{q_0} = \ell.$$

Действительно, вычисляя символы оператора $(C_2^o, \mathring{C}_2'') = (\mathring{C}_2' + \mathring{C}_2'' B_1, \mathring{C}_2'')$ первого и нулевого порядков, получаем $\sigma_1(C_2^o, \mathring{C}_2'') = (\sigma_0(\mathring{C}_2'')\sigma_1(B_1), 0)$,

$$\sigma_0(C_2^o, \mathring{C}_2'') = \left[\sigma_0(\mathring{C}_2') + \sigma_0(\mathring{C}_2'')\sigma_0(B_1) + i\nabla_\xi \sigma_0(\mathring{C}_2'')\nabla_x \sigma_1(B_1),\ \sigma_0(\mathring{C}_2'')\right].$$

Далее, $\sigma_1(C_2^o, \mathring{C}_2'') = 0$ в q_0, так как $\sigma_1(B_1) = 0$ в этой точке. Матрица, стоящая в квадратных скобках, является оператором вида (9), примененным к матрице $(\sigma_0(\mathring{C}_2'), \sigma_0(\mathring{C}_2'')) = \sigma_0(\mathring{C}_2', \mathring{C}_2'') = \sigma_0(\tilde{C}_2^o)\Pi_1^{-1}$, и, очевидно, имеет обратный. Поэтому она так же, как и $\sigma_0(\tilde{C}_2^o)$, имеет в q_0 максимальный ранг. Следовательно, ранг матрицы $\sigma_0(C_2^o)$ равен ℓ в точке q_0, что и требовалось.

Так как порядок оператора $C_2 \hat{A}_1$ равен нулю в окрестности U_1 точки q_0 то оператор C_2 является C-преобразованием оператора $\hat{A}_1$ в U_1. В силу леммы 3а, в C_2 можно выделить квадратный оператор $\hat{C}_2$ первого или нулевого порядков, осуществляющий локальное $\hat{C}_2$-преобразование в окрестности $U_2 \Subset U_1$ точки q_0 и для оператора $C_2 = \Pi_2^{-1}\begin{pmatrix} \hat{C}_2 \\ C_2' \end{pmatrix}$ написать аналог представления (7) с матрицей B_2 нулевого порядка в точке q_0. Подставляя его в формулу (10), имеем

$$\tilde{C}_2\tilde{C}_1 = \Pi_2^{-1}\begin{pmatrix} I_\ell & 0 \\ B_2 & I_{m_2-\ell}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{C}_2 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ 0\end{pmatrix} + \hat{T}_2. \tag{11}$$

Применяя в (11) оператор A , получаем представление

$$A_2 = \Pi_2^{-1}\begin{pmatrix} I_\ell & 0 \\ B_2 & I_{m_2-\ell}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{A}_2 \\ 0\end{pmatrix} + \hat{T}_2', \tag{12}$$

аналогичное представлению (8) оператора A_1 . Если $p=2$ и оператор $\hat{A}_2$ эллиптичен, то так же, как при $p=1$, доказывается, что оператор $\hat{A}_2$ эллиптичен в некоторой окрестности точки q_0 . Если же $p>2$, то, повторяя предыдущие рассуждения, получаем аналогичное (12) представление оператора $\hat{A}_p$, из которого вытекает эллиптичность квадратного оператора $\hat{A}_p$ в некоторой окрестности U_p точки q_0 .

Итак, оператор A^0 приводим в окрестности любой точки q_0 к локально эллиптическому оператору $\hat{A}_p = \hat{D}_p A^0$, где $\hat{D}_p = \hat{C}_p \ldots \hat{C}_1$.

В заключение отметим некоторые свойства операторов $D_p = C_p \ldots C_1$. Приведенное доказательство фактически указывает способ выделения из цепочки D_p глобальных C-преобразований цепочки $\hat{D}_p$ локальных $\hat{C}$-преобразований, приводящей оператор A к локально эллиптическому оператору $\hat{A}_p$ нулевого порядка. Так как цепочка $\hat{D}_p$ является слабоэллиптической в U_p , то она имеет в U_p инвариант

$$\alpha = \sum_{j=1}^{p} |\hat{e}_j| \; -$$

ее степень слабой эллиптичности. Нетрудно видеть, что $\alpha = -\sigma$, где σ - степень слабой эллиптичности оператора A . Поэтому любой цепочке $\hat{D}_p$, выделенной из D_p , соответствует на связной компоненте многообразия $T'(X)$ одинаковый инвариант α .

Вообще произвольной цепочке $D_p = C_p \ldots C_1$ эллиптических на X операторов C_j порядков $(e_j, 0)$ можно поставить в соответствие функцию α , если положить $\alpha(q_0) = \max \alpha(\hat{D}_p)$ по всем слабоэллиптическим в окрестности точки q_0 цепочкам $\hat{D}_p$, выделенным из D_p . Назовем ее индикатрисой цепочки D_p . Тогда предыдущее утверждение можно сформулировать так: если цепочка D_p приводит некоторый оператор A к эллиптическому на X оператору, то ее индикатриса постоянна на каждой связной компоненте многообразия

$T'(X)$.

Кроме того, оператор D_p эквивалентен оператору $\tilde{D}_p$ вида

$$\tilde{D}_p = \begin{pmatrix} \varphi_1 \hat{D}_p^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi_N \hat{D}_p^{(N)} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

который составляется из операторов $\hat{D}_p^{(j)}$, получаемых следующим образом. Из покрытия многообразия $T'(X)$ окрестностями U_p выбирается конечное подпокрытие $U_p^{(1)},\dots,U_p^{(N)}$, а из оператора D_p выделяются квадратные операторы $\hat{D}_p^{(j)}$, слабоэллиптические в $U_p^{(j)}$. Наконец, $\{\varphi_j\}$ - разбиение единицы на $T'(X)$, вписанное в покрытие $\{U_p^{(j)}\}$.

Эквивалентность операторов D_p и $\tilde{D}_p$ означает, что

$$\tilde{D}_p = \mathcal{E} D_p + T, \quad D_p = \tilde{\mathcal{E}}\tilde{D}_p + \tilde{T}, \tag{14}$$

где $\mathcal{E}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$ - операторы не выше нулевого порядка на X , а порядки T и $\tilde{T}$ равны $-\infty$.

Первое из соотношений (14) очевидно, так как согласно формулам (7) , (11) и их аналогу при $p>2$:

$$D_p = \Pi_p^{-1}\begin{pmatrix} I_\ell \\ B_p \end{pmatrix}\hat{D}_p + \hat{T}_p, \tag{15}$$

где Π_p - невырожденная матрица, осуществляющая перестановку строк в D_p , операторы $\hat{D}_p^{(j)}$ составляют ℓ строк в D_p , а порядок оператора $\varphi_j \hat{T}_p^{(j)}$ на X равен $-\infty$. Элементы матрицы $\mathcal{E}$ - либо нули, либо операторы φ_j , имеющие на X нулевой порядок.

Второе соотношение в (14) также следует из формулы (15) , так как

$$D_p = \sum_{j=1}^{N}\varphi_j D_p = \sum_{j=1}^{N}\varphi_j\left(\Pi_p^{-1}\begin{pmatrix} I_\ell \\ B_p^{(j)} \end{pmatrix}\hat{D}_p^{(j)} + \hat{T}_p^{(j)}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\Pi_p^{-1}\begin{pmatrix} I_\ell \\ \varphi_j B_p^{(j)} \ \hat{\varphi}_j^{\,4} \end{pmatrix}\varphi_j\hat{D}_p^{(j)} + \tilde{T},$$

причем $B_p^{(j)}$ - операторы не выше нулевого порядка в $U_p^{(j)}$, где квадратные операторы $\hat{A}_p^{(j)}$ эллиптичны. В этом легко убедиться, если в равенстве (15) применить оператор A и учесть, что порядки операторов A_p и $\hat{A}_p$ равны нулю. Тогда $\sigma_1(B_p)\sigma_0(\hat{A}_p) = 0$ и, в силу невырожденности $\sigma_0(\hat{A}_p)$, матрица $\sigma_1(B_p) \equiv 0$ в U_p , что и требовалось.

§ 2. Связь между классами систем, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу, и слабоэллиптических

Класс слабоэллиптических систем является естественным расширением класса систем, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу [5], и связан с ним следующим образом.

Известно, что эллиптичность системы по Дуглису-Ниренбергу связана с выбором порядка (s,t) системы, который, в свою очередь, связан с исходной гладкостью правых частей системы и набором пространств, в которых ищется решение системы.

Система может быть эллиптичной для порядков (s,t) и не быть таковой для других порядков (p,q). Так, оператор

$$A_1 = \begin{pmatrix} D_1^3 & D_2^2 \\ -D_2^2 & D_1 \end{pmatrix}$$

эллиптичен, если $(s;t) = (0,-1;\ 3,2)$, и не эллиптичен для $(p;q) = (0,0;3,3)$ или $(p,q) = (0,-1;\ 3,3)$. Отметим, что мы не различаем порядки (s,t) и $(s+k,\ t-k)$, если k - вектор с одинаковыми компонентами.

Имеет место следующая

Теорема 2а. Оператор A, эллиптический порядка (s,t) и не эллиптический при выборе порядка (p,q), является слабоэллиптическим для этого порядка. Оператор A - слабоэллиптический порядка (s,t) является слабоэллиптическим (возможно, эллиптическим) оператором любого другого порядка (p,q).

Доказательство этой теоремы так же, как для псевдодифференциальных операторов [1], легко получить из определения 1 и принципа локальности символа композиции псевдодифференциальных операторов.

Так, если оператор A порядка (s,t) эллиптичен в G, то он представим в виде $A = J_s A^0 J_t$, где A^0 - псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, эллиптический в G. Тогда оператор A имеет также представление

$$A = J_p \left(J_{s-p} A^0 J_{t-q} \right) J_q + T,$$

где T - оператор порядка $-\infty$ в G и, следовательно, является слабоэллиптическим.

Поэтому если объединить классы систем, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу, и слабоэллиптических в один класс обобщенно эллиптических систем,

то теорему 2а можно сформулировать так.

Теорема 2. Обобщенная эллиптичность оператора A не зависит от исходного выбора его векторного порядка (s,t) .

Целесообразность такого расширения класса эллиптических систем подтверждается также следующим. Известно [5] , что возможность выбора векторного порядка системы, для которого она эллиптична, зависит от специального вида, в котором записана система, и может нарушаться при эквивалентных (т.е. линейных невырожденных) преобразованиях строк или столбцов оператора. Так, оператор

$$B_1 = \begin{pmatrix} D_1^3 & D_2^2 \\ D_1^3 - D_2^2 & D_2^2 + D_1 \end{pmatrix}$$

не эллиптичен ни при каком выборе порядков (s,t) , тогда как после вычитания первой строки из второй эквивалентный ему оператор A_1 эллиптичен, как мы видели при $(s,t)=(0,-1;\ 3,2)$.

Поэтому А.Дуглис и Л.Ниренберг [5] при определении эллиптичности пишут, что "систему, собственно говоря, следует называть эллиптической, если только после соответствующих невырожденных преобразований уравнений и зависимых переменных она сводится к системе эллиптической в указанном выше смысле".

Это определение, очевидно, не является алгоритмическим.

Определение слабой эллиптичности оператора сводится, как мы видели, к решению системы (2) линейных алгебраических уравнений, зависящих от параметра (x,ξ) в окрестности заданной точки $(x_0,\ \xi_0)$.

Очевидно, что если система эллиптична по Дуглису-Ниренбергу и не эллиптична в заданном виде, то она является слабоэллиптичной.

Слабая эллиптичность не зависит от вида системы и не меняется при линейных невырожденных преобразованиях строк и столбцов оператора A . Это легко вытекает из определения 1.

Поэтому имеет место

Теорема 3. Класс обобщенно эллиптических систем инвариантен относительно эквивалентных преобразований оператора системы.

Из представления (1) легко выводится также следующая более общая

Теорема 4. Композиция AB обобщенно эллиптических операторов A,B является обобщенно эллиптическим оператором.

Оператор A^* , формально сопряженный к обобщенно эллиптическому оператору A , является обобщенно эллиптическим.

Другими словами, класс обобщенно эллиптических операторов инвариантен относительно операций композиции и формального сопряжения.

Отметим, что это свойство, присущее классу однородных эллиптических

систем, теряется для систем, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу.

Естественно возникает следующий вопрос. Пусть оператор A слабоэллиптичен для заданного порядка (s,t), но не является эллиптическим. Можно ли найти невырожденные в G преобразования $M(x)$ и $N(x)$ и векторы p и q такие, что эквивалентный A оператор $B=MAN$ имеет порядок (p,q) и эллиптичен в G ?

Так как матрицы M и N являются, очевидно, левым и правым глобальными G-преобразованиями оператора A, то первая часть задачи сводится к отысканию среди решений Q_0' системы (2) таких, которые бы не зависели от ξ. Что касается второй части вопроса, то она решается положительно в так называемом невырожденном случае [6], когда полином $\det A(x,\xi)$ является невырожденным, т.е. имеет по ξ максимально возможную (при вычислении $\det A$) степень. В этом случае Л.Р. Волевич [6] показал, что всегда можно выбрать векторы s и t так, чтобы определитель главной части $A_0^{s,t}(x,\xi)$ оператора A совпадал с главной частью определителя всей матрицы $A(x,\xi)$. Тем самым он в [7] дал другое определение эллиптичности оператора A, не зависимое от выбора его порядка (s,t): пусть

$r=\max\limits_{\Pi} r(\Pi)$, где $r(\Pi)=\alpha_{1i_1}+\ldots+\alpha_{l i_l}$, по всем перестановкам $\Pi=\begin{pmatrix}1\ldots l\\ i_1\ldots i_l\end{pmatrix}$; тогда оператор A эллиптичен в G, если

$$\sigma_r\left[\det A(x,\xi)\right]\neq 0, \quad \forall (x,\xi)\in T'(G). \tag{1}$$

Однако невырожденность системы также зависит от того вида, в котором она записана, и меняется при эквивалентных преобразованиях уравнений или неизвестных функций. В этом легко убедиться на приведенных примерах двух эквивалентных дифференциальных операторов A_1 и B_1, первый из которых не вырожден, а второй - вырожден. Следовательно, и это определение предполагает нахождение такого эквивалентного A оператора B, для которого полином $\det B(x,\xi)$ не вырожден. Это не всегда так, в чем можно убедиться на примере оператора $\mathrm{rot}+\lambda I_3$, слабоэллиптического при $\lambda\neq 0$, у которого определитель полного символа равен $\lambda(|\xi|^2+\lambda^2)$.

Для квадратных матричных операторов A с постоянными коэффициентами имеет место следующая

Теорема 5. Пусть $A(\partial/\partial x)$ - слабоэллиптический оператор с постоянными в области G коэффициентами. Тогда скалярный оператор $\det A(\partial/\partial x)$ является эллиптическим оператором порядка $k=\sigma$, где σ - степень слабой эллиптичности оператора A.

Действительно, оператор A порядка (s,t) является тогда приводимым в

угловой окрестности K_0 любого вектора $\xi_0 \in R^n \setminus 0$ и $x_0 \in G$, т.е. существует цепочка $Q_1, \dots, Q_p$ квадратных дифференциальных операторов такая, что оператор $A_p = Q_p \dots Q_1 A$ порядка (S_p, t) эллиптичен в K_0. Причем, как мы указывали, операторы Q_j могут быть выбраны с постоянными коэффициентами. Сравнивая между собой символы обеих частей последнего равенства и обозначая $\det A$ через $\|A\|$, имеем

$$\|A_p(\xi)\| = \|Q_p(\xi)\| \dots \|Q_1(\xi)\| \cdot \|A(\xi)\|, \quad \xi \in K_0. \tag{2}$$

Так как операторы A_p и Q_j имеют порядки (S_p, t) и $(q_j, -S_{j-1})$ соответственно $(S_0 = S)$ и эллиптичны в K_0', то из равенства (2) вытекает следующее равенство для главных символов операторов $\|A_p\|, \|Q_j\|$ и $\|A\|$:

$$\sigma_{|S_p|+|t|} \|A_p(\xi)\| =$$

$$= \sigma_{|q_p|-|S_{p-1}|} \|Q_p(\xi)\| \dots \sigma_{|q_1|-|S|} \|Q_1(\xi)\| \cdot \sigma_k \|A(\xi)\|. \tag{3}$$

Отсюда имеем, что $\sigma_k \|A(\xi)\| \neq 0$ в K_0 и $k = \omega$, где ω - инвариант оператора, приводимого к эллиптическому, равный, по теореме 1, степени σ слабой эллиптичности оператора A. В силу произвольности точки (x_0, ξ_0), оператор $\det A$ эллиптичен в G, что и требовалось доказать.

По-видимому, имеет место утверждение, обратное теореме 5, значительно более сложное доказательство которого автор предполагает изложить в следующей работе, посвященной операторам с постоянными коэффициентами.

Что касается операторов с переменными коэффициентами, то нетрудно убедиться, что в вырожденном случае главный символ оператора $\det A$ зависит от способа вычисления определителя матрицы A. Поэтому многочлен $\det A(x, \xi)$, вообще говоря, не характеризует оператора A. Для таких операторов утверждение, обратное теореме 5, уже не выполняется, как показывает следующий простой пример:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a(x)\Delta & 1 \\ -1 & b(x)\Delta \end{pmatrix} \tag{4}$$

оператора с гладкими в круге $|x| < 2$ коэффициентами $a(x), b(x)$ такими, что $a \cdot b \equiv 0$, но $a \neq 0$ при $|x| < 1$, а $b \neq 0$ при $1 < |x| < 2$. Этот оператор второго порядка на окружности $|x| = 1$ не допускает Q-преобразования и, следовательно, не является слабоэллиптическим в круге $|x| < 2$, хотя

при $(S;t) = (0,0;2,2)$ ранг символической матрицы

$$A_{2,0}(x,\xi) = \begin{pmatrix} a(x)|\xi|^2 & 0 \\ 0 & b(x)|\xi|^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

не превосходит единицы, а $\det A_2(x,\xi) \equiv 1$. Наконец, рассмотрим следующий пример из работы [22]:

$$A_3 \equiv \begin{pmatrix} a(x_1)\Delta(D_1^2+1) & \Delta(D_1^2+D_1+1) \\ a(x_1)\Delta D_1 & \Delta(D_1+1) \end{pmatrix} \tag{6}$$

оператора с аналитическим коэффициентом $a(x_1) \geq a_0 > 0$ при $|x_1| < R$; $\Delta = D_1^2 + D_2^2$, $D_j = \partial/\partial x_j$, $j=1,2$. Оператор (6) интересен тем, что

$$\det A(x,\xi) = a(x_1)|\xi|^4, \tag{7}$$

однако система $A_3 u = 0$ имеет неаналитические решения при переменном $a(x_1)$, тогда как при постоянном $a(x_1) = a^0$ все ее решения аналитичны. Это можно объяснить следующим образом. При постоянном a оператор A_3 является слабоэллиптическим и форма (7) характеризует его. При переменном $a(x_1)$ в силу вырожденности многочлена (7) форма $a|\xi|^4$ не характеризует A_3, так как не является главной частью оператора $\det A_3(x,D)$, если его вычислять как $a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}$. Его главной частью является оператор $-a'(x_1)\Delta^2 D_1^2$. Такая формула для $\det A_3$ получается при определении уравнения, которому удовлетворяет первая компонента решения системы $A_3 u = 0$. Отметим, что если вычислить в фиксированной точке $q_0 = (\mathring{x}, \mathring{\xi})$ полный символ каждого элемента матрицы A_3 (например, $\sigma(a(x_1)D_1^2)|_{q_0} = -a(\mathring{x}_1)\mathring{\xi}_1^2 - 2a'(\mathring{x}_1)\mathring{\xi}_1 + a''(\mathring{x}_1)$) и затем вычислить определитель полученной матрицы, то его главная часть имеет вид $-ia'(\mathring{x}_1)|\mathring{\xi}|^4\mathring{\xi}_1^2$.

§ 3. Гипоэллиптичность слабоэллиптического оператора

Докажем гипоэллиптичность слабоэллиптического оператора A порядка (S,t). Пусть $D_p = Q_p \dots Q_1$ - цепочка глобальных Q-преобразований оператора A, приводящая его к эллиптическому (вообще говоря, прямоугольному) в G дифференциальному оператору $A_p = D_p A$ порядка (S_p, t), причем компоненты вектора S_p неположительны.

Если вектор $S_p \neq 0$, то из операторов Лапласа и градиента легко

составить матричный эллиптический дифференциальный оператор S_p порядка $(0,-s_p)$ такой, что оператор $S_p A_p$ имеет порядок $(0,t)$ и эллиптичен в G. Другими словами, можно подравнять порядки строк системы $Au=f$, применив к ее строкам указанные выше эллиптические операторы.

Пусть $B_0^{(0,t)}$ - главная часть оператора $S_p A_p$, а B_0^* - формально сопряженный ему оператор. Тогда легко убедиться, что оператор $L=B_0^* S_p A_p$ является квадратным и эллиптическим в G оператором порядка (t,t).

Пусть u - обобщенная вектор-функция и $Au\in C^\infty(G_0)$, где G_0 - открытая часть области G, $\bar{G}_0=G$. Так как коэффициенты операторов цепочки D_p и B_0^* бесконечно дифференцируемы в G_0, вектор $Lu\in C^\infty(G_0)$. Следовательно, в силу гипоэллиптичности L - квадратного эллиптического оператора [8], вектор $u\in C^\infty(G_0)$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь коэффициенты слабоэллиптического оператора A аналитичны в области G_0. Тогда, как мы указывали, операторы Q_j цепочки D_p также могут быть выбраны с аналитическими в G_0 коэффициентами. Следовательно, коэффициенты оператора L аналитичны в G_0, и если u - обобщенная вектор-функция такая, что вектор-функция Lu аналитична в G_0, то в силу аналитической гипоэллиптичности квадратного эллиптического оператора L [9,10] u является аналитической в G_0 функцией.

Итак, в этом случае оператор A обладает свойством аналитической гипоэллиптичности.

Отметим, что если коэффициенты слабоэллиптического оператора A постоянны в области G, то цепочку операторов Q_j также можно выбрать с постоянными коэффициентами. Тогда эллиптичность квадратного оператора $(S_p D_p A)^*(S_p D_p A)$ влечет за собой эллиптичность операторов $\det A$ и $\det[(S_p D_p)^* S_p D_p]$. Действительно, обозначая определитель матрицы $A(\xi)$ через $|A|$, имеем

$$|(S_p D_p A)^* S_p D_p A| = |A^*(S_p D_p)^* S_p D_p A| =$$
$$= |A^*|\cdot|(S_p D_p)^* S_p D_p|\cdot|A| =$$
$$= \|A\|^2\, |(S_p D_p)^* S_p D_p|.$$

Следовательно, главные части полиномов, стоящих в этих равенствах, также совпадают между собой. Учитывая отличие от нуля при $\xi\in R^n\setminus 0$ первого из них, приходим к искомому утверждению, первая часть которого нами доказана по-другому в § 2.

Отметим, наконец, что слабоэллиптический в G оператор A, очевидно, допускает также локальные и глобальные Q'-преобразования справа, которые отличаются от левых Q-преобразований тем, что преобразуются не строки, а столбцы оператора A. Такой оператор является приводимым справа к оператору $A^{(P)} = AQ'_1 \dots Q'_p$ порядка (S, t_p) максимального ранга (т.е. ранг матрицы $\sigma_{(S,t_p)}(A^{(P)}) = \ell$ в $T'(G)$) с помощью цепочки $D'_{p,} = Q'_1 \dots Q'_p$ операторов Q'_j максимального ранга. Тогда если через S'_p обозначить соответствующий S_p оператор порядка $(-t_p, 0)$ максимального ранга и через $C_0^{(S,0)}$ - главную часть оператора $AD'_p S'_p$, то легко видеть, что квадратный оператор $K_p = AD'_p S'_p C_0^*$ имеет порядок $(S, -S)$ и эллиптичен.

Следовательно, для любого регулярного решения v эллиптической системы $K_p v = f$ вектор-функция $u = D'_p S'_p C_0^* v$ удовлетворяет слабоэллиптической системе $Au = f$.

§ 4. Краевые задачи для слабоэллиптических систем

В этом параграфе мы изложим наш подход к изучению краевых задач для слабоэллиптических систем. Случай операторов, приводимых к эллиптическим уже на первом шаге, был детально разобран в [3], общий случай будет рассмотрен в следующих работах автора.

Наш метод изучения краевых задач для слабоэллиптического дифференциального оператора A состоит в переходе от системы

$$A(x, \partial/\partial x)\, u(x) = f(x), \quad x \in G, \tag{1}$$

к эллиптической (вообще говоря, прямоугольной) системе

$$A_P(x, \partial/\partial x)\, u(x) = D_p f(x), \quad x \in G, \tag{2}$$

где $D_p = Q_p \dots Q_1$ - цепочка глобальных Q-преобразований оператора A.

Однако если ядро оператора D_p нетривиально, то системы (1) и (2) неэквивалентны. В этом случае мы добиваемся эквивалентности, накладывая дополнительные краевые условия $Cv\big|_\Gamma = 0$ на вектор-функцию $v = Au - f$. Важную роль при отыскании граничного оператора C играет эллиптичность операторов Q_j.

Имеет место следующая

Лемма 2. <u>Для любого эллиптического в G оператора Q порядка (q, S) можно подобрать систему краевых условий (т.е. оператор R_Γ порядка (τ, S)) такую, что ядро оператора $K = \begin{pmatrix} Q \\ R_\Gamma \end{pmatrix}$ тривиально, т.е. краевая задача $Qv = 0$ в G, $Rv\big|_\Gamma = 0$ имеет только тривиальное решение</u>

$v \equiv 0$.

Действительно, обозначим через $\mathfrak{M}^+(Q)$ линейное пространство решений на полупрямой $t \geqslant 0$ краевой задачи

$$Q_0^{(q,s)}(y, i\tau + \nu\, d/dt)\, v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$v(t) \longrightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

где $(y,\tau) \in T'(\Gamma)$, т.е. $y \in \Gamma$; τ - произвольный, не равный нулю касательный к Γ вектор в точке y ; ν - единичный вектор внутренней нормали к Γ в точке y .

Пространство $\mathfrak{M}^+(Q)$ является расслоением над $T'(\Gamma)$ (см. [12]). Если задача (3) имеет только тривиальное решение, то дополнительные краевые условия не нужны. Ядро оператора Q в этом случае конечномерно, и достаточно задать $v=0$ в конечном числе точек $x \in G$.

Если же размерность пространства $\mathfrak{M}^+(Q)$ положительна , то строим вначале локально, затем глобально (возможно, увеличивая число строк) оператор R_Γ порядка (τ, s) , который накрывает Q , т.е. задача (3) при условии

$$R_0^{(\tau,s)}(y, i\tau + \nu\, d/dt)\, v(0) = 0 \tag{4}$$

имеет только тривиальное решение для любых (y,τ) из $T'(\Gamma)$.

Отметим, что, в силу формулы Грина [13] , условия Коши накрывают оператор Q , но достаточно выбрать только часть из этих условий.

Тогда ядро оператора K конечномерно [14] . Наконец, добавив, если необходимо, еще одно краевое условие, получим искомый оператор.

Итак, в силу леммы 2 для каждого оператора Q_j цепочки $\mathcal{D}_p$ можно построить оператор

$$K_j = \begin{pmatrix} Q_j \\ R_{j\Gamma} \end{pmatrix},$$

...ющий тривиальное ядро.

Тогда система (1) эквивалентна системе (2) с дополнительными краевыми условиями

$$CAu\big|_\Gamma = Cf\big|_\Gamma , \tag{5}$$

причем оператор C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 Q_1 \\ \dots\dots\dots \\ R_p Q_{p-1} \dots Q_1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_A^+$ пространство решений задачи (3) , (4) для операторов $Q = A_p = D_p A$, $R = CA$, т.е.

$$\mathfrak{M}_A^+ = \mathfrak{M}^+ \begin{pmatrix} D_p A \\ (CA)_\Gamma \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующая

Лемма 3. Пространство $\mathfrak{M}_A^+$ слабоэллиптического оператора A не зависит от произвола в выборе операторов цепочки D_p и краевых условий C_Γ .

Если размерность $d(y,\tau)$ этого пространства положительна для всех $(y,\tau) \in T'(\Gamma)$, то систему (1) дополним краевыми условиями

$$B(x, \partial/\partial x) u(x)\big|_\Gamma = g(x'), \quad x' \in \Gamma, \tag{7}$$

где $B - (m \times \ell)$ - матричный дифференциальный оператор порядка (b,t) с коэффициентами класса $C^\infty(G)$, $m \geq d_0 = \sup_{(y,\tau)\in T'(\Gamma)} d(y,\tau)$.

Мы скажем, что граничный оператор B дополняет слабоэллиптический оператор A , если B накрывает оператор $\begin{pmatrix} D_p A \\ (CA)_\Gamma \end{pmatrix}$, т.е. если краевая задача (3) , (4) с операторами $R = \begin{pmatrix} B_\Gamma \\ (CA)_\Gamma \end{pmatrix}$ и $Q = D_p A$ имеет только тривиальное решение.

Лемма 3 обосновывает это определение.

Пусть k -целое число, а $t = (t_1, \dots, t_\ell)$ - вектор с целочисленными компонентами. Обозначим через $H^{k+t}(G)$ прямое произведение пространств Соболева

$$H^{k+t}(G) = W_2^{(k+t_1)}(G) \times \dots \times W_2^{(k+t_\ell)}(G).$$

Пусть даны вектор s_p и цепочка $D_p = Q_p \dots Q_1$ эллиптических в G дифференциальных операторов Q_j порядков $(q_j, -s_{j-1})$ таких, что компоненты векторов $q_j - s_j$ неотрицательны и $|q_j - s_j| > 0$.

Введем пространство $H_Q^{k-s}(G)$ обобщенных вектор-функций U таких, что

$D_p v \in H^{k-s_p}(G)$ с нормой

$$\|v\|_{H_Q^{k-s}(G)} \equiv \|D_p v\|_{H^{k-s_p}(G)} .$$

Это пространство определяется классом эквивалентных пар (s_p, D_p) векторов s_p и цепочек D_p. Пары (s_p, D_p) и (s_p', D_p') эквивалентны, если $D_p' = \mathcal{E} D_p + T$ и $D_p = \mathcal{E}' D_p' + T'$, где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ - псевдодифференциальные операторы порядков $(s_p', -s_p)$ и $(s_p, -s_p')$ соответственно, а порядки операторов T и T' равны $-\infty$ в G. Пространство H_Q^{k-s} не зависит от выбора конкретной пары (s_p, D_p), так как нормы, определяемые различными парами, эквивалентны.

Рассмотрим теперь слабоэллиптический в области G оператор A. Пусть D_p - цепочка, приводящая A к эллиптическому в G оператору A_p порядка (s_p, t), и H_Q^{k-s} -пространство, определяемое парой (s_p, D_p). Нетрудно показать, что это пространство не зависит от выбора пары (s_p, D_p), т.е. от выбора цепочки D_p, приводящей A к эллиптическому оператору.

В конечной области G задаче (1), (7) для слабоэллиптического оператора A соответствует ограниченный оператор $\mathfrak{A} = \binom{A}{B_\Gamma}$, действующий в пространствах

$$\mathfrak{A} : H^{k+t}(G) \longrightarrow H_Q^{k-s}(G) \times H^{k-b-1/2}(\Gamma), \tag{8}$$

где $k \geqslant k_0 = \max\limits_{ij} (b_i, c_j)$.

Имеет место

Теорема 6. Следующие утверждения эквивалентны:

а) Оператор A порядка (s,t) слабоэллиптичен в G, и граничный оператор B дополняет A;

б) оператор (8) имеет левый регуляризатор;

в) оператор (8) имеет конечномерное ядро и замкнутую область значений;

г) выполняется априорная оценка

$$\|u\|_{H^{k+t}(G)} \leqslant C \left(\|Au\|_{H_Q^{k-s}(G)} + \|Bu\|_{H^{k-b-1/2}(\Gamma)} + \sum_{t_j > 0} \|u_j\|_{L_2(G)} \right), \tag{9}$$

причем постоянная C не зависит от u.

Отметим, что при построении левого регуляризатора задачи существенно

используются результаты работы [14].

Что касается коядра оператора A, то оно заведомо не конечномерно, если $m > d_0$. В этом случае векторы f и g должны быть подчинены некоторым (вообще говоря, интегродифференциальным) условиям согласования. Для определения таких условий можно применять различные методы [3, 13-18]. Например, можно рассмотреть сопряженную [8] однородную задачу

$$A^* v = 0 \quad \text{в } G, \quad B^* v\big|_\Gamma = 0 . \tag{10}$$

Так как оператор A^* слабоэллиптичен, то коядро оператора (8) конечномерно, если оператор B_Γ^* дополняет оператор A^*. Отсюда следует

Теорема 7. Если граничный оператор B_Γ дополняет слабоэллиптический оператор A и сопряженный оператор B_Γ^* дополняет A^*, то задача (1), (7) нетерова в пространствах (8).

Другой метод изучения коядра оператора (8) состоит в построении правого регуляризатора задачи (1), (7). Как мы показали в конце § 3, можно построить квадратный эллиптический оператор K_p порядка $(s_1 - s)$ такой, что любому регулярному решению v системы $K_p v = f$ соответствует решение $u = D_p' S_p' C_0^* v$ системы (1). Подставляя это значение u в краевое условие, мы приходим к задаче

$$Kv = f \quad \text{в } G, \qquad BD_p' S_p' C_0^* v\big|_\Gamma = g, \tag{11}$$

разрешимость которой обеспечивает разрешимость задачи (1), (7). Эта задача вообще не удовлетворяет условию Лопатинского, но, как показывают примеры, может удовлетворять более общим условиям, полученным в [17, ч.II]. Поэтому, если задача (11) удовлетворяет одному из этих условий, коядро оператора (8) конечномерно.

Отметим еще, что в [17] общая краевая задача редуцируется к равномерно неэллиптической системе псевдодифференциальных уравнений на Γ, нетеровость которой обеспечивает нетеровость задачи. Условия слабой эллиптичности системы псевдодифференциальных уравнений в [1] необходимы и достаточны для ее нетеровости, а следовательно и для нетеровости краевой задачи в соответствующих пространствах.

Различные нетеровы краевые задачи для конкретных слабоэллиптических систем рассмотрены в работах автора [3,11,19-21,23]. Теоремы 6 и 7 позволяют указать нетеровы краевые задачи для систем уравнений математической физики таких, как системы Максвелла, кристаллооптики [24], акустики и другие, в стационарном случае. Предполагается, что описываемые процессы зависят от времени как $e^{i\omega t}$.

Литература

1. Сакс Р.С. Слабоэллиптические системы псевдодифференциальных уравнений на многообразии без края.- В кн.:Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л.Соболева) . Новосибирск, 1978, №2, с.103-126.
2. Сакс Р.С. Слабоэллиптические системы псевдодифференциальных уравнений на многообразии без края.- Докл. АН СССР, 1978, т.240, №4, с.786-789.
3. Сакс Р.С. О нетеровых краевых задачах для некоторых классов слабоэллиптических систем дифференциальных уравнений.- В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, Наука, 1978, с.237-253.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц.-М.: Наука, 1976.- 352 с.
5. Douglis A., Nirenberg L. Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations.- Comm.Pure Appl.Math., 1955, v. 8, № 4, p.503-538.
6. Волевич Л.Р. Об одной задаче линейного программирования, возникающей в дифференциальных уравнениях.- Успехи мат.наук, 1963, т.18, вып.3, с.155-162.
7. Волевич Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем.- Мат.сб.,1965, т.68, №3, с.373-416.
8. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными.- М.: Мир, 1965.- 380 с.
9. Петровский И.Г. Об аналитичности решений систем дифференциальных уравнений.- Мат.сб., 1939, т.5, №1, с.3-70.
10. Morrey C.B., Nirenberg L. On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations.- Comm.Pure Appl.Math., 1957, v. 10, № 2, p.271-290.
11. Сакс Р.С. Краевые задачи для слабоэллиптических систем дифференциальных уравнений.- Докл. АН СССР, 1977, т.236, № 6, с.1311-1314.
12. Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе.- М.: Мир, 1970.- 360 с.
13. Хермандер Л. Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи.- В кн.: Псевдодифференциальные операторы.-М.: Мир, 1967, с.166-296.
14. Солонников В.А. Переопределенные эллиптические задачи.-Записки на-

учных семинаров ЛОМИ, 1971, т.21, №5, с.112-158.

15. Гудович И.С., Крейн С.Г. Краевые задачи для переопределенных систем уравнений в частных производных.- В кн.: Труды семинара "Дифференциальные уравнения и их применения", Вильнюс, 1974, вып.9, 143 с.

16. Ниренберг Л., Кон Д.Д. Некоэрцитивные краевые задачи.- В кн.:Псевдодифференциальные операторы. М., Мир, 1967, с.88-165.

17. Вайнберг Б.Р., Грушин В.В. О равномерно неэллиптических задачах.- Мат.сб., 1967, ч.1, т.72, №4, с.602-636; ч.11, т.73, №1, с.126-154.

18. Солонников В.А. Об одном классе нетеровых переопределенных эллиптических краевых задач.- Записки научных семинаров ЛОМИ, 1974, т.47, № 5, с.138-154.

19. Сакс Р.С. О краевых задачах для системы $\mathrm{rot}\,u+\lambda u=h$.-Дифференц.уравнения, 1972, т.8, №1, с.126-133.

20. Сакс Р.С. Краевые задачи для некоторых уравнений, связанных с оператором внешнего дифференцирования.- Докл. АН СССР, 1974, т.218, №1, с.39-42.

21. Сакс Р.С. Краевые задачи для некоторых систем, приводимых к эллиптическим.- Дифференц. уравнения, 1974, т.10, №1, с 132-142.

22. Волевич Л.Р. О регулярности решений систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Успехи мат. наук, 1961, т.16, вып. 2, с.163-164.

23. Сакс Р.С. Краевые задачи для эллиптических и слабоэллиптических систем дифференциальных уравнений.- В кн.: Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики: Материалы $\underline{\text{V}}$ Советско-Чехословацкого совещания. Алма-Ата, сентябрь, 1976. Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1978, с.278-287.

24. Курант Р. Уравнения с частными производными.- М.: Мир, 1964.-830 с.