УДК 517.946

ЧАСТИЧНАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С.А.Аракчеев (Новосибирск)

Рассматривается вопрос о регулярности обобщенных решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка и дивергентного вида. Основной результат (теорема 1) представляет собой характеристику множества особых точек любого такого решения в терминах хаусдорфовой меры этого множества. Доказано (теорема 2) простое достаточное условие регулярности решения в окрестности точки.

Результаты о регулярности внутри области для уравнений рассматриваемого типа были впервые получены Ч.Морри [1] и впоследствии уточнены Э.Джусти [2,3]. Теорема 1 доказывается по схеме, предложенной в [2], с изменениями, связанными с учетом граничных условий Дирихле. Главная идея этого метода (доказательство от противного основной леммы), принадлежащая Ф.Альмгрену, использовалась ранее в [1].

Результаты данной работы были частично опубликованы в статье автора [4].

§1. Обозначения и основные результаты

Рассматривается обобщенное решение $u \in W^m_{2,loc}(G)$ (см. определения 1,2) задачи

$$\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\Big\{\sum_{k<|\beta|\le m}A_{\alpha\beta}(x,D^{\gamma}u)D^{\beta}u+\mathcal{F}_{\alpha}(x,D^{\gamma}u)\Big\}=0, \quad (1.1)$$

$0\le|\gamma|\le k<m$;

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial N^j}\right|_S=\omega_j(x), \quad j=0,1,\dots,m-1. \quad (1.2)$$

Здесь $G=\Omega\cup S$, где $\Omega=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\}$ - открытое множество в R^n, $n\ge 2$; S - $(n-1)$ - мерная поверхность, являющаяся частью границы $\partial\Omega$ области Ω. Предполагаем, что $S\in C^m$, точнее, считаем выполненным следующее

Условие на S. Для любой точки $x^0\in S$ найдутся такая область V_{x^0}, $x^0\in V_{x^0}$, и такой диффеоморфизм $g_{x^0}\in C^m$, отображающий V_{x^0} на куб $K=\{y\in R^n: |y_i|<1,\ i=1,2,\dots,n\}$, что

$$g_{x^0}(x^0)=0,\ g_{x^0}(V_{x^0}\cap\Omega)=\{y\in K,\ y_1>0\},\ g_{x^0}(V_{x^0}\cap S)=\{y\in K,\ y_1=0\}.$$

В уравнении (1.1) $m\geq 1$ - целое число, α, β, γ - мультииндексы, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, где $\alpha_i\geq 0$ - целые числа; $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$, $D^\alpha=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}$. В граничном условии (1.2) N-это внутренняя по отношению к Ω нормаль к поверхности S.

Коэффициенты $A_{\alpha\beta}$, $\mathcal{F}_\alpha$ уравнения (1.1) и функции ω_j, входящие в условие (1.2), подчиним следующим условиям:

а) коэффициенты $A_{\alpha\beta}(x,\eta)$, $0\leq|\alpha|\leq m$, $k<|\beta|\leq m$, - измеримые функции, определенные при всех $x\in G$, $\eta=\{\eta_\gamma\}\in R^M$ (M - число таких мультииндексов γ, что $0\leq|\gamma|\leq k$) и удовлетворяющие при любых $x\in G$, $\eta\in R^M$, $\xi=\{\xi_\alpha,\ |\alpha|=m\}$, неравенствам

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}A_{\alpha\beta}(x,\eta)\xi_\alpha\xi_\beta\geq\lambda\sum_{|\alpha|=m}\xi_\alpha^2,\quad \lambda=const>0,\tag{1.3}$$

$$\sum_{\substack{0\leq|\alpha|\leq m\\ k<|\beta|\leq m}}|A_{\alpha\beta}(x,\eta)|\leq\vartheta_1=const.\tag{1.4}$$

Кроме того, при $|\alpha|=|\beta|=m$ функции $A_{\alpha\beta}(x,\eta)$ непрерывны по всем переменным;

b) коэффициенты $\mathcal{F}_\alpha(x,\eta)$, $0\leq|\alpha|\leq m$, - измеримые функции, определенные при всех $x\in G$, $\eta\in R^M$ и удовлетворяющие при всех x, η неравенству

$$\sum_{|\alpha|\leq m}|\mathcal{F}_\alpha(x,\eta)|\leq\sigma(x)+\vartheta_2|\eta|,\tag{1.5}$$

где $\sigma(x)$ - непрерывная на G функция, $\vartheta_2=const>0$;

с) функции $\omega_j(x)$, $j=0,1,\dots,m-1$, определенные при $x=S$, принадлежат классам $C^{m-j}(S)$.

Примечание. Здесь и далее используются обычные обозначения: C^ℓ, C^ℓ_{loc}, C^∞ - пространства гладких функций; $C^{\ell,\zeta}$, $C^{\ell,\zeta}_{loc,\ell}$ - пространства Гёльдера; L_p - пространства суммируемых функций; W_p^ℓ - пространства Соболева (см., например, [14]).

Дадим следующее специальное

Определение 1. Считаем, что $u\in W^m_{2,loc}(G)$, если для любой точки $x^0\in G$ найдется такая ее окрестность V_{x^0}, что $u\in W_2^m(V_{x^0}\cap\Omega)$.

Для формулировки основных результатов требуются также следующие

Определение 2. Считаем, что функция $u(x)$ есть обобщенное решение задачи (1.1), (1.2), если:

1. $u \in W^m_{2,loc}(G)$;

2. для любой функции $\psi \in \overset{\circ}{C}^\infty(\Omega)$ выполняется равенство

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} \Big\{ \sum_{K<|\beta|\le m} A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma u) D^\beta u + \mathcal{F}_\alpha(x, D^\gamma u) \Big\} D^\alpha \psi \, dx = 0 \qquad (1.6)$$

(существование интеграла обеспечивается неравенствами (1.4), (1.5));

3. условия (1.2) выполняются в смысле L_2 (см [5]).

Определение 3. Если $X \subset R^n$ и $0 \le \tau \le n$, то величина

$$H_\tau(X) = \lim_{\varepsilon \to +0} \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} X_i)^\tau, \ X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \ \operatorname{diam} X_i < \varepsilon \Big\}$$

называется τ-мерной хаусдорфовой мерой множества X.

Теорема 1. Пусть $K \ge m - n/2$ и функция $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), причем выполнены условия a), b), c). Тогда существует такое замкнутое относительно G множество $\Gamma \subset G$, что

1) $H_{n-2(m-K)+\zeta}(\Gamma) = 0 \quad \forall \zeta > 0, \ H_{n-2(m-K)}(\Gamma \cap S) = 0$;

2) если $x^\circ \in G \setminus \Gamma$, то существует такая окрестность V точки x°, что $u \in C^{m-1, 1/2}(G \cap V)$.

Следующая теорема дает достаточное условие локальной регулярности обобщенного решения. Положим

$$K_\delta(x^\circ) = \{ x \in R^n : |x_i - x_i^\circ| < \delta, \ i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 $x^\circ \in \Omega$ и имеет место

$$\lim_{\delta \to +0} \delta^{-n+2(m-K)-\zeta} \int_{\Omega \cap K_\delta(x^\circ)} \sum_{|\alpha|\le m} |D^\alpha u(x)|^2 dx = 0 \qquad (1.7)$$

при некотором $\zeta > 0$

либо $x^\circ \in S$ и

$$\lim_{\delta \to +0} \delta^{-n+2(m-K)} \int_{\Omega \cap K_\delta(x^\circ)} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 dx = 0. \qquad (1.8)$$

Тогда $x^\circ \notin \Gamma$.

В.Г. Мазья [6] указал примеры уравнений вида (1.1) с аналитическими функциями $A_{\alpha\beta}$ и с $\mathcal{F}_\alpha = 0$, имеющих обобщенные решения, производные которых порядка K разрывны. Автором [7] приведены подобные примеры, показывающие, что в условиях теоремы 1 возможно $H_{n-2(m-K)-1}(\Gamma) > 0$. Там же показано, что в случае $K \le m - n/2$ гладкость обобщенных решений всюду в области Ω при естественных предположениях относительно функций $A_{\alpha\beta}$,

$\mathcal{F}_\alpha$, ω_j следует из теорем вложения Соболева и априорных оценок, выведенных в [8]. Случай регулярности вблизи границы при $k=m-n/2$ подробно рассмотрел И.Нечас [9,10].

Заметим, что дальнейшее повышение гладкости решения всюду на G при $k\leqslant m-n/2$ либо на $G\setminus\Gamma$ в условиях теоремы 1 определяется, как показано в [8], соответствующей гладкостью функций $A_{\alpha\beta}$, $\mathcal{F}_\alpha$, ω_j и поверхности S.

Для $k=m-1$, $n\geqslant 3$ и случая внутренней регулярности ($S=\emptyset$) в [2,3] доказано, что при любом $\varepsilon>0$ имеет место $H_{n-2+\varepsilon}(\Gamma)=0$. Теорему 1 при естественных изменениях в формулировке можно доказать и для случая систем уравнений вида (1.1), как это сделано Э.Джусти [2].

Теоремы 1,2 будут доказаны в § 6. В § 2-5 приводятся вспомогательные результаты. Достаточное условие регулярности (теорема 2) позволило получить и некоторые другие результаты о регулярности обобщенных решений, которые приведены в § 7.

В дальнейшем все константы, зависящие от $n, m, k, \lambda, \sigma, \theta_1$, θ_2, Ω, S, будем обозначать буквой C, а зависимость от других параметров указывать явно, например, $C(y^0, \delta)$. Будем использовать также следующие обозначения: $\overline{X}$ - замыкание множества X; если α,β - мультииндексы, $\xi\in R^n$, то

$$\alpha\pm\beta=(\alpha_1\pm\beta_1,\alpha_2\pm\beta_2,\dots,\alpha_n\pm\beta_n),\quad \alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_n!,$$

$$\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\dots\xi_n^{\alpha_n};$$

считаем $\beta>\alpha$, если $|\beta|>|\alpha|$ и $\beta_i\geqslant\alpha_i$, $i=1,2,\dots,n$.

§ 2. Критерий регулярности

В этом и двух следующих параграфах будем рассматривать задачу вида (1.1), (1.2) в n-мерных параллелепипедах $K_\tau^h(\bar{y})$. Для любых $y^0\in R^n$, $\delta>0$, $h\geqslant 0$ определим

$$K_\delta(y^0)=\{y\in R^n: |y_i-y_i^0|<\delta,\quad i=1,2,\dots,n\},$$

$$K_\delta^h(y^0)=\{y\in K_\delta(y^0): y_1>y_1^0-h\},$$

$$S_\delta^h(y^0)=\{y\in\overline{K_\delta(y^0)}: y_1=y_1^0-h, |y_i-y_i^0|<\delta,\ i=2,3,\dots,n\}.$$

Очевидно, $K_\delta^h(y^0)=K_\delta(y^0)$ при $h\geqslant\delta$ и $S_\delta^h(y^0)=\emptyset$ при $h>\delta$.

Зафиксируем $\bar{y}\in R^n$, $\tau\geqslant 0$, $h\geqslant 0$. Если не оговорено иное, всюду в § 2-4 будем считать, что функция $v(y) \in W_2^m(K_\tau^h(\bar{y}))$ является обобщенным решением в области $K_\tau^h(\bar{y})$ уравнения

$$\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left\{ \sum_{k<|\beta|\le m} \mathcal{B}_{\alpha\beta}(y, D^\gamma v) D^\beta v + \Phi_\alpha(y, D^\gamma v) \right\} = 0, \qquad (2.1)$$

$$0 \le |\gamma| \le k < m,$$

и (в смысле L_2) удовлетворяет условиям

$$\left.\frac{\partial^j v}{\partial y_1^j}\right|_{S_\tau^h(\bar{y})} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \qquad (2.2)$$

При этом предполагаем, что функции $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$, Φ_α удовлетворяют условиям a), b) из § 1 при $G = K_\tau^h(\bar{y}) \cup S_\tau^h(\bar{y})$, $\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \mathcal{B}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{F}_\alpha = \Phi_\alpha$.

Условие (2.2) (очевидно, нетривиальное лишь при $h \le \tau$) позволяет считать, что $v \in W_2^m(K_\tau(\bar{y}))$, если положить $v(y) = 0$ при $y \in K_\tau(\bar{y}) \setminus K_\tau^h(\bar{y})$.

В дальнейшем важную роль будут играть средние значения функций в областях вида $K_\delta(y^\circ)$: если $f(y) \in L_1(K_\delta(y^\circ))$, то, по определению,

$$[f]_{y^\circ,\delta} = (2\delta)^{-n} \int_{K_\delta(y^\circ)} f(y)\,dy,$$

иными словами, $[f]_{y^\circ,\delta}$ - такое число, что

$$\int_{K_\delta(y^\circ)} (f(y) - [f]_{y^\circ,\delta})\,dy = 0.$$

Сформулируем некоторые свойства средних значений. Первые два свойства известны, приведем их без доказательств.

Лемма 1 (неравенство Пуанкаре, см. [2]). Если $p \ge 1$ и $f(y) \in W_p^1(K_\delta(y^\circ))$, то

$$\int_{K_\delta(y^\circ)} |f(y) - [f]_{y^\circ,\delta}|^p\,dy \le C(p)\,\delta^2 \sum_{i=1}^n \int_{K_\delta(y^\circ)} \left|\frac{\partial f}{\partial y_i}\right|^p dy. \qquad (2.3)$$

Лемма 2 (минимальное свойство средних значений). Если $f(y) \in L_2(K_\delta(y^\circ))$, то

$$\int_{K_\delta(y^\circ)} |f(y) - [f]_{y^\circ,\delta}|^2\,dy = \min_{c \in R} \int_{K_\delta(y^\circ)} |f(y) - c|^2\,dy.$$

Лемма 3. Если $f \in L_1(K_\delta(y^\circ))$ и $\tau \in (0,1]$, то

$$[|f|]_{y^\circ,\tau\delta} \le |[f]_{y^\circ,\delta}| + [|f - [f]_{y^\circ,\delta}|]_{y^\circ,\tau\delta}. \qquad (2.4)$$

Доказательство. Для любой константы C будет $[C]_{y^\circ,\delta} = C$, поэтому

$$[\![f]\!]_{y^\circ;\tau\delta} - |[\![f]\!]_{y^\circ;\delta}| - [\![f]\!]_{y^\circ;\tau\delta} - [\![[f]_{y^\circ;\delta}]\!]_{y^\circ;\tau\delta} =$$

$$= [\![f| - |[f]_{y^\circ;\delta}]\!]_{y^\circ;\tau\delta} \le [\![f - [f]_{y^\circ;\delta}]\!]_{y^\circ;\tau\delta},$$

что и требовалось доказать.

Определение 4. Пару $y^\circ \in R^n$, $\delta > 0$, назовем допустимой, если $K_\delta(y^\circ) \subset K_\tau(\bar{y})$

Лемма 4. <u>Для любых допустимых</u> y°, δ <u>существует единственный многочлен степени</u> $m-1$ <u>от переменных</u> $y_1, y_2, \dots, y_n$ (<u>обозначаемый</u> $P_{y^\circ,\delta}(y)$) <u>такой, что</u>

$$\int\limits_{K_\delta(y^\circ)} D^\gamma(v - P_{y^\circ;\delta})\,dy = 0 \quad \forall \gamma, \quad 0 \le |\gamma| \le m-1. \tag{2.5}$$

Доказательство. Запишем

$$P_{y^\circ;\delta} = \sum_{0 \le |\gamma| \le m-1} c_\gamma (y - y^\circ)^\gamma$$

и покажем индукцией по $j = |\gamma|$ вниз от $j = m-1$ до $j = 0$, что условием (2.5) числа c_γ определены однозначно. При $j = |\gamma| = m-1$ это условие дает

$$\int\limits_{K_\delta(y^\circ)} (D^\gamma v - \gamma!\, c_\gamma)\,dy = 0,$$

откуда

$$c_\gamma = \frac{1}{\gamma!} [D^\gamma v]_{y^\circ;\delta} \quad \forall \gamma, \quad |\gamma| = m-1. \tag{2.6}$$

Пусть теперь $0 \le |\gamma| = j < m-1$ и все коэффициенты c_β для $j < |\beta| \le m-1$ вычислены. Равенство (2.5) можно переписать в виде

$$\int\limits_{K_\delta(y^\circ)} \Big\{ D^\gamma v - \gamma!\, c_\gamma - \sum_{\substack{\beta > \gamma \\ |\beta| \le m-1}} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} c_\beta (y - y^\circ)^{\beta-\gamma} \Big\} dy = 0,$$

откуда

$$c_\gamma = \frac{1}{\gamma!} \Big\{ [D^\gamma v]_{y^\circ;\delta} - \sum_{\substack{\beta > \gamma \\ |\beta| \le m-1}} c_\beta \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} \big[(y - y^\circ)^{\beta-\gamma} \big]_{y^\circ;\delta} \Big\}. \tag{2.7}$$

Лемма доказана.

Определим

$$\mathcal{P}_{y^\circ,\delta}(y) = \begin{cases} P_{y^\circ,\delta}(y) & \text{, если } S_\tau^h(\bar{y}) \cap \overline{K_\delta(y^\circ)} = \emptyset, \\ 0 & \text{, если } S_\tau^h(\bar{y}) \cap \overline{K_\delta(y^\circ)} \ne \emptyset. \end{cases}$$

Многочлены $\mathcal{P}_{y^\circ;\delta}(y)$ будем называть тейлоровскими многочленами для функции

$v(y)$ в областях $K_\delta(y^\circ)$. Отметим важное их свойство.

Лемма 5. Если $0 \le j \le m-1$, то

$$\int\limits_{K_\delta(y^\circ)} \sum_{|\gamma|=j} |D^\gamma(v-\mathcal{P}_{y^\circ,\delta})|^2 dy \le$$
$$\le C\delta^2 \int\limits_{K_\delta(y^\circ)} \sum_{|\beta|=j+1} |D^\beta(v-\mathcal{P}_{y^\circ,\delta})|^2 dy. \tag{2.8}$$

Доказательство. Если $S_r^h(\bar{y}) \cap K_\delta(y^\circ) = \emptyset$, то $\mathcal{P}_{y^\circ,\delta}(y) = P_{y^\circ,\delta}(y)$ и неравенство (2.8) совпадает с неравенствами (2.3), в котором $p=2$, $f = v - \mathcal{P}_{y^\circ,\delta}$ (заметим, что $[f]_{y^\circ,\delta} = 0$ в силу(2.5)).

Если $S_r^h(\bar{y}) \cap \overline{K_\delta(y^\circ)} \ne \emptyset$, то функции $D^\gamma v$ согласно (2.2) обращаются в нуль на множестве $S_r^h(\bar{y}) \cap \overline{K_\delta(y^\circ)}$ и справедлива оценка вблизи границы

$$\int\limits_{K_\delta(y^\circ)} \sum_{|\gamma|=j} |D^\gamma v|^2 dy \le C\delta^2 \int\limits_{K_\delta(y^\circ)} \sum_{|\beta|=j+1} |D^\beta v|^2 dy,$$

совпадающая с (2.8), поскольку в этом случае $\mathcal{P}_{y^\circ,\delta} \equiv 0$.

Для формулировки критерия регулярности функции v в окрестности точки y° введем следующие величины: для любых допустимых y°, δ

$$T^{(1)}_{y^\circ,\delta} = \sum_{0\le|\gamma|\le k} [[D^\gamma v]]_{y^\circ,\delta},$$

$$T^{(2)}_{y^\circ,\delta} = \sum_{k<|\gamma|\le m-1} \delta^{|\gamma|-k} [[D^\gamma v]]_{y^\circ,\delta},$$

$$T_{y^\circ,\delta} = T^{(1)}_{y^\circ,\delta} + T^{(2)}_{y^\circ,\delta},$$

$$\mathcal{J}_k(y^\circ,\delta) = \delta^{2(m-k-1)} \sum_{|\gamma|=m-1} \left[|D^\gamma(v-\mathcal{P}_{y^\circ,\delta})|^2 \right]_{y^\circ,\delta}, \tag{2.9}$$

$$U_k(y^\circ,\delta) = \delta^{2(m-k)} \sum_{|\gamma|=m} \left[|D^\gamma v|^2 \right]_{y^\circ,\delta}. \tag{2.10}$$

Теорема 3 (критерий регулярности). Функция $v(y)$ принадлежит $C^{m-1,\,1/2}$ в некоторой окрестности точки $y^\circ \in K^h_{r/2}(\bar{y})$ в том и только в том случае, если найдется такая последовательность $\delta_j > 0$, $j = 1,2,3,\ldots$, что при $j \to \infty$ справедливы

$$\delta_j \to 0, \tag{2.11}$$

$$\mathcal{J}_\kappa(y^\circ, \delta_j) \longrightarrow 0, \tag{2.12}$$

$$T^{(1)}_{y^\circ, \delta_j} < H = const, \tag{2.13}$$

$$T^{(2)}_{y^\circ, \delta_j} \longrightarrow 0. \tag{2.14}$$

Прямое утверждение теоремы очевидно. Действительно, если при некотором $R>0$ будет $\upsilon \in C^{m-1,1/2}(K_R(y^\circ))$, то

$$[|D^\gamma \upsilon|]_{y^\circ,\delta} \xrightarrow{\delta \to +0} |D^\gamma \upsilon(y^\circ)| \quad \forall \gamma,\ 0 \le |\gamma| \le m-1, \tag{2.15}$$

а при $|\gamma| = m-1$ имеет место

$$[|D^\gamma(\upsilon - \mathcal{P}_{y^\circ;\delta})|^2]_{y^\circ,\delta} = [|D^\gamma \upsilon - [D^\gamma \upsilon]_{y^\circ,\delta}|^2]_{y^\circ,\delta} \xrightarrow{\delta \to +0} 0. \tag{2.16}$$

Из (2.15) и (2.16) следует выполнение (2.12) - (2.14) для любой последовательности $\delta_j \longrightarrow 0$.

Обратное утверждение будет доказано в § 6.

Теорема 4 (достаточное условие регулярности). Если $y^\circ \in K^h_\tau(\bar{y})$ и

$$\lim_{\delta \to +0} \delta^{-\varkappa} U_\kappa(y^\circ, \delta) = 0 \tag{2.17}$$

при некотором $\varkappa > 0$

либо $y^\circ \in S^h_\tau(\bar{y})$

и

$$\lim_{\delta \to +0} U_\kappa(y^\circ, \delta) = 0, \tag{2.18}$$

то функция $\upsilon(y)$ принадлежит пространству $C^{m-1,1/2}$ в некоторой окрестности точки y°.

Доказательство. Пусть для некоторой точки y° выполняется условие (2.17)(можно считать, что в нем $\varkappa < 2$) или (2.18) (различие в доказательстве будем указывать по мере необходимости). Зафиксируем такое $\rho > 0$, что $K_\rho(y^\circ) \subset K_\tau(\bar{y})$. Рассмотрим последовательность $\rho_j = 2^{-j}\rho$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, и покажем, что для нее выполняется критерий регулярности, сформулированный в теореме 3.

Из неравенства Коши следует, что

$$[|D^\gamma \upsilon|]_{y^\circ,\rho_j} \le C\,[|D^\gamma \upsilon|^2]^{1/2}_{y^\circ,\rho_j}. \tag{2.19}$$

Лемма 5 при $j = m-1$ дает

$$\mathcal{J}_\kappa(y^\circ, \rho_j) \le C\,U(y^\circ, \rho_j);$$

отсюда и из условий (2.17), (2.18) следует выполнение (2.12)для последовательности ρ_j как при $y^\circ \in K^h_\tau(\bar{y})$, так и при $y^\circ \in S^h_\tau(\bar{y})$.

Та же лемма 5 для $y^\circ \in S^h_\tau(\bar{y})$ (напомним, что при этом все $\mathcal{P}_{y^\circ,\rho_j} = 0$)

позволяет, проитерировав неравенство (2.8), получить, что при $0 \le |\gamma| \le m-1$, $j=0,1,2,\ldots$ справедливо неравенство

$$[|D^\gamma v|^2]_{y^\circ,\rho_j} \le C\rho_j^{2(m-|\gamma|)} \sum_{|\beta|=m} [|D^\beta v|^2]_{y^\circ,\rho_j}.$$

Учитывая еще (2.19) и (2.10), получим:

$$[|D^\gamma v|]_{y^\circ,\rho_j} \le C\rho_j^{\kappa-|\gamma|}(U_\kappa(y^\circ,\rho_j))^{1/2},$$
$$0 \le |\gamma| \le m, \quad j=0,1,2,\ldots, \tag{2.20}$$

откуда

$$T_{y^\circ,\rho_j} \le C\,(U_\kappa\,(y^\circ,\rho_j))^{1/2}$$

и выполнение условий (2.13), (2.14) при $y^\circ \in S_\tau^h(\bar{y})$, $\delta_j = \rho_j$ следует из (2.18).

Для завершения доказательства теоремы необходимо еще установить, что при $y^\circ \in K_\tau^h(\bar{y})$, $\delta_j = \rho_j$ из (2.17) следует выполнение условий (2.13), (2.14).

По леммам 3 и 1 соответственно при $\tau = 1/2$, $\delta = \rho_j$ и при $p=1$ для всех γ, $0 \le |\gamma| \le m-1$, $j=0,1,2,\ldots$, имеем

$$[|D^\gamma v|]_{y^\circ,\rho_{j+1}} \le [|D^\gamma v|]_{y^\circ,\rho_j} + (2\rho_{j+1})^{-n} \int_{K_{\rho_j}(y^\circ)} |D^\gamma v - [D^\gamma v]_{y^\circ,\rho_j}|\,dy \le$$
$$\le [|\dot{D}^\gamma v|]_{y^\circ,\rho_j} + 2^n \rho_j \sum_{|\beta|=|\gamma|+1} [|D^\beta v|]_{y^\circ,\rho_j}.$$

Итерируя последнее неравенство, при любых γ, $0 \le |\gamma| \le m-1$, $j=0,1,2,\ldots$, $\ell = 1,2,\ldots$ получаем

$$[|D^\gamma v|]_{y^\circ,\rho_{j+\ell}} \le [|D^\gamma v|]_{y^\circ,\rho_j} +$$
$$+ 2^n \rho_j \sum_{q=0}^{\ell-1} 2^{-q} \sum_{|\beta|=|\gamma|+1} [|D^\beta v|]_{y^\circ,\rho_{j+\ell}}. \tag{2.21}$$

Опираясь на неравенство (2.21), докажем индукцией по $s=|\gamma|$ вниз от $s=m$ до $s=0$ неравенства

$$\rho_{j+\ell}^{s-\kappa} \sum_{|\gamma|=s} [|D^\gamma v|]_{y^\circ,\rho_{j+\ell}} \le$$
$$\le C(v,j)\,\rho_{j+\ell}^{s-\kappa} + C(\tau)\rho_{j+\ell}^{\tau/2}\,(U(y))^{1/2}, \tag{2.22}$$
$$\kappa < s \le m, \quad j=0,1,2,\ldots, \quad \ell=1,2,\ldots,$$

где

$$U(j) = \sup_{0<\delta\leq\rho_j} \delta^{-\zeta} U_\kappa(y^\circ,\delta),$$

и
$$\sum_{|\gamma|=s} [|D^\gamma v|]_{y^\circ,\rho_{j+\ell}} \leq C(v,j,\zeta), \tag{2.23}$$

$$0\leq s\leq \kappa, \quad j=0,1,2,\dots, \quad \ell=1,2,\dots$$

Действительно, при $s=m$ неравенство (2.22) следует из (2.20). Пусть оно доказано для некоторого s, $\kappa<s\leq m$. Тогда из (2.21) следует, что

$$\sum_{|\gamma|=s-1} [|D^\gamma v|]_{y^\circ,\rho_{j+\ell}} \leq C(v,j) +$$
$$+ 2^n \rho_j \sum_{q=0}^{\ell-1} 2^{-q} \left\{ C(v,j) + C(\zeta)\rho_{j+q}^{\kappa-s+\zeta/2} (U(j))^{1/2} \right\};$$

учитывая, что

$$\rho_j \sum_{q=0}^{\ell-1} 2^{-q} \rho_{j+q}^{\kappa-s+\zeta/2} = \rho_j \sum_{q=0}^{\ell-1} \left(\frac{\rho_j}{2^q}\right)^{\kappa-s+\zeta/2} = \rho_j^{\kappa-s+1+\zeta/2} \sum_{q=0}^{\ell-1} 2^{q(s-\kappa-1-\zeta/2)} =$$

$$= \rho_j^{\kappa-s+1+\zeta/2} \frac{2^{\ell(s-\kappa-1-\zeta/2)}-1}{2^{s-\kappa-1-\zeta/2}-1} \leq \begin{cases} C(\zeta)\rho_{j+\ell}^{\kappa-(s-1)+\zeta/2}, & \text{если } s\geq \kappa+2, \\ C(\zeta), & \text{если } s=\kappa+1, \end{cases}$$

получаем неравенство

$$\sum_{|\gamma|=s-1} [|D^\gamma v|]_{y^\circ,\rho_{j+\ell}} \leq C(v,j) + C(\zeta)\rho_{j+\ell}^{\kappa-(s-1)+\zeta/2} (U(j))^{1/2}, \quad s\geq \kappa+2,$$

совпадающее с (2.22), записанным для $s-1$. Одновременно получим неравенство (2.23) для $s=\kappa$. Наконец, пусть (2.23) доказано при некотором s, $0<s\leq\kappa$. Тогда из неравенства (2.21) имеем

$$\sum_{|\gamma|=s-1} [|D^\gamma v|]_{y^\circ,\rho_{j+\ell}} \leq C(v,j,\zeta)\Big(1+2^n\rho_j \sum_{q=0}^{\ell-1} 2^{-q}\Big) \leq C(v,j,\zeta),$$

что завершает индукцию. Неравенства (2.22), (2.23) доказаны. Из них следует, что при $j=0,1,2,\dots$, $\ell=1,2,\dots$ справедливы

$$T^{(1)}_{y^{(0)},\rho_{j+\ell}} \leq C(v,j,\zeta), \tag{2.24}$$

$$T^{(2)}_{y^{(0)},\rho_{j+l}} \le C(\upsilon,j)(\rho_{j+l}+\rho_{j+l}^{m-\kappa})+C(\zeta)(U(y))^{1/2}. \qquad (2.25)$$

Из неравенства (2.24), если в нем зафиксировать $j=0$ и устремить $l\to\infty$, следует (2.13) при $\delta_j=\rho_j$.

Наконец, для доказательства выполнения (2.14) зададимся произвольным $\varepsilon>0$. Найдется такое число j_0, что второе слагаемое в правой части (2.25) не превосходит $\varepsilon/2$. Зафиксировав это j_0 и учитывая, что $\rho_{j_0+l}\to 0$ при $l\to\infty$, найдем такое l_0, что при $l>l_0$ первое слагаемое в правой части (2.25) не превосходит $\varepsilon/2$. Тогда при всех $j>j_0+l_0$ будет $T^{(2)}_{y^\circ,\rho_j}<\varepsilon$.

Теорема 4 доказана.

§ 3. Предварительные леммы

Здесь будут доказаны некоторые неравенства, необходимые для доказательства теорем 1-3. Для любых допустимых y°,δ определим

$$\tilde T^{(2)}_{y^\circ,\delta} = \sum_{\kappa<|\gamma|\le m-1}\left[|D^\gamma\upsilon|\right]_{y^\circ,\delta}, \qquad (3.1)$$

$$\tilde T_{y^\circ,\delta} = T^{(1)}_{y^\circ,\delta}+\tilde T^{(2)}_{y^\circ,\delta}, \qquad (3.2)$$

$$\Phi_\kappa(y^\circ,\delta)=\delta^{2(m-\kappa)-n}\sum_{|\alpha|\le m}\delta^{2(m-|\alpha|)}\int_{K^h_\tau(\bar y)\cap K_\delta(y^\circ)}\{\Phi'_\alpha(y,D^\gamma\upsilon)\}^2dy, \qquad (3.3)$$

где для любого α, $0\le|\alpha|\le m$,

$$\Phi'_\alpha(y,D^\gamma\upsilon)=\sum_{\kappa<|\beta|\le m-1}\mathcal{B}_{\alpha\beta}(y,D^\mu\upsilon)D^\beta\upsilon+\Phi_\alpha(y,D^\mu\upsilon),$$
$$0\le|\gamma|\le m-1,\quad 0\le|\mu|\le\kappa$$

(см. уравнение (2.1)).

Лемма 6. <u>Для любых допустимых</u> y°,δ <u>справедливы следующие неравенства:</u>

$$\sup_{y\in K_\delta(y^\circ)}\sum_{|\gamma|\le\kappa}|D^\gamma\rho_{y^\circ,\delta}(y)|\le C\,T_{y^\circ,\delta}, \qquad (3.4)$$

$$\sup_{y\in K_\delta(y^\circ)}\sum_{|\gamma|\le m-1}|D^\gamma\rho_{y^\circ,\delta}(y)|\le C\tilde T_{y^\circ,\delta}, \qquad (3.5)$$

$$\sup_{y\in K_\delta(y^\circ)} \sum_{|\gamma|<\kappa} |D^\gamma P_{y^\circ,\delta}(y) - D^\gamma P_{y^\circ,\delta}(y^\circ)| \leq C\delta T_{y^\circ,\delta}, \tag{3.6}$$

$$\sup_{y\in K_\delta(y^\circ)} \sum_{|\gamma|=\kappa} |D^\gamma P_{y^\circ,\delta}(y) - D^\gamma P_{y^\circ,\delta}(y^\circ)| \leq C T^{(2)}_{y^\circ,\delta}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 4, запишем

$$P_{y^\circ,\delta}(y) = \sum_{0\leq|\gamma|\leq m-1} c_\gamma (y-y_0)^\gamma.$$

Используя равенства (2.7), (2.8), можно показать индукцией по $j=|\gamma|$ вниз от $j=m-1$ до $j=0$ следующие неравенства:

$$|c_\gamma| \leq C\delta^{\kappa-|\gamma|} T^{(2)}_{y^\circ,\delta}, \quad |c_\gamma| \leq C\widetilde{T}^{(2)}_{y^\circ,\delta}, \quad \kappa<|\gamma|\leq m-1, \tag{3.8}$$

$$|c_\gamma| \leq C(T^{(1)}_{y^\circ,\delta} + \delta^{\kappa-|\gamma|} T^{(2)}_{y^\circ,\delta}), \quad 0\leq|\gamma|\leq\kappa. \tag{3.9}$$

Из них легко получить оценки (3.4) - (3.7), используя равенства

$$D^\gamma P_{y^\circ,\delta}(y) = \gamma!\, c_\gamma + \sum_{\substack{\beta>\gamma\\ |\beta|\leq m-1}} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} c_\beta (y-y^\circ)^{\beta-\gamma}, \tag{3.10}$$

$$D^\gamma P_{y^\circ,\delta}(y^\circ) = \gamma!\, c_\gamma.$$

Лемма 7. <u>Для любых допустимых</u> y°, δ <u>имеет место</u>

$$\Phi_\kappa(y^\circ,\delta) \leq C\left\{\delta^{2(m-\kappa)}(1+(\widetilde{T}^{(2)}_{y^\circ,\delta})^2) + \delta^2 \mathcal{J}_\kappa(y^\circ,\delta)\right\}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Из (3.3), условия b) § 1 и определения (2.9) получим

$$\Phi_\kappa(y^\circ,\delta) \leq C\delta^{2(m-\kappa)}\Big[1+\sum_{0\leq|\gamma|\leq m-1} |D^\gamma\sigma|^2\Big]_{y^\circ,\delta} \leq$$

$$\leq C\delta^{2(m-\kappa)}\Big\{1+\delta^{-2(m-\kappa-1)}\mathcal{J}_\kappa(y^\circ,\delta) + \sum_{0\leq|\gamma|\leq m-1} \big[|D^\gamma \mathcal{P}_{y^\circ,\delta}|^2\big]_{y^\circ,\delta}\Big\}.$$

Если $\mathcal{P}_{y^\circ,\delta}(y)=0$, то лемма доказана. В противном случае $\mathcal{P}_{y^\circ,\delta}(y) = P_{y^\circ,\delta}(y)$; учитывая (3.5), получим (3.11).

Лемма 8. <u>Для любых допустимых</u> y°, δ, <u>любых</u> $\tau\in(0,1]$, $s=1,2,\ldots$ <u>справедливы неравенства:</u>

$$[\![D^\gamma\sigma]\!]_{y^\circ,\tau^s\delta} \leq [\![D^\gamma\sigma]\!]_{y^\circ,\delta} +$$

$$+C\tau^{-n/2}\delta^{-m+1+k}\sum_{j=1}^{s-1}\tau^{j(-m+n+k)}\left(J_k(y^\circ,\tau^j\delta)\right)^{1/2}, \quad |\gamma|=m-1, \tag{3.12}$$

$$\left[|D^\gamma v|\right]_{y^\circ,\tau^s\delta}\le\left[|D^\gamma v|\right]_{y^\circ;\delta}+C\delta\sum_{j=1}^{s}\tau^j\sum_{|\beta|=|\gamma|+1}\left[|D^\beta v|\right]_{y^\circ,\tau^j\delta}, \tag{3.13}$$

$$0\le|\gamma|<m-1.$$

Доказательство. В неравенство(2.4) подставим $f=D^\gamma v$. Если $0\le|\gamma|<m-1$, то неравенство (2.3) при $p=1$ дает

$$\left[|D^\gamma v-[D^\gamma v]_{y^\circ;\delta}|\right]_{y^\circ;\delta}\le C\delta\sum_{|\beta|=|\gamma|+1}\left[|D^\beta v|\right]_{y^\circ;\tau\delta}$$

и (3.13) при $s=1$ доказано. Если $|\gamma|=m-1$, то,в силу (2.5), $[D^\gamma v]_{y^\circ,\delta}=D^\gamma P_{y^\circ;\delta}=const$. Применяя неравенство Коши

$$\left[|D^\gamma(v-P_{y^\circ;\delta})|\right]_{y^\circ,\delta}\le C\delta^{n/2}\left[|D^\gamma(v-P_{y^\circ;\delta})|^2\right]_{y^\circ;\delta},$$

а затем лемму 2 при $c=D^\gamma P_{y^\circ;\delta}$, получаем неравенство (3.12) для $s=1$.

При $s=2,3,\ldots$ неравенства (3.12), (3.13) получим, итерируя те же неравенства для $s=1$.

Наконец, докажем две леммы, касающиеся оценок для линейных задач вида (2.1), (2.2). Условия, при которых устанавливаются эти оценки, отличаются от условий лемм 1,2 работы [2] наличием граничных условий (2.2).

Введем следующие сокращенные обозначения:

$$K_\tau=K_\tau(0),\ K=K_1,\ K_\tau^h=K_\tau^h(0),\ K^h=K_1^h,\ S_\tau^h=S_\tau^h(0),\ S^h=S_1^h.$$

Лемма 9. Пусть функция $w(z)\in W_2^m(K^h)$ является решением в K^h уравнения

$$\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\left\{\sum_{|\beta|=m}b_{\alpha\beta}(z)D^\beta w+\varphi_\alpha(z)\right\}=0, \tag{3.14}$$

в котором $\varphi_\alpha(z)\in L_2(K^h)$, а коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ удовлетворяют при любых $z\in K^h$, $\xi=\{\xi_\alpha,|\alpha|=m\}$ неравенствам:

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}b_{\alpha\beta}(z)\xi_\alpha\xi_\beta\ge\lambda\sum_{|\alpha|=m}\xi_\alpha^2,\quad \lambda=const>0, \tag{3.15}$$

$$\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\|\beta|=m}}|b_{\alpha\beta}(z)|\le\theta_1=const. \tag{3.16}$$

Пусть, кроме того, в смысле L_2 выполняются условия:

$$\left.\frac{\partial^j w}{\partial z_1^j}\right|_{S^h}=0,\quad j=0,1,\ldots,m-1. \tag{3.17}$$

Тогда для любого $\rho\in(0,1)$ справедливо

$$\sum_{|\alpha|\le m}\int_{K_\rho}|D^\alpha w|^2dz\le C(\rho)\Big\{\sum_{|\gamma|\le m-1}\int_K|D^\gamma w|^2dz+\varphi\Big\}, \tag{3.18}$$

где, по аналогии с (3.3) ,

$$\varphi=\int_{K^h}\sum_{|\alpha|\le m}|\varphi_\alpha(z)|^2dz. \tag{3.19}$$

Доказательство. Доопределим, как ранее, $w(z)=0$, если $z\in K\setminus K^h$. Пусть $\zeta(z)\in \overset{\circ}{C}{}^\infty(K)$, $\zeta(z)\equiv 1$ при $z\in K_\rho$. Тогда функцию $\psi(z)=\zeta^{2m}w(z)\in \overset{\circ}{W}{}_2^m(K^h)$ можно подставить в интегральное тождество (1.6), написанное для уравнения (3.14) . Дальнейший ход доказательства не отличается от доказательства леммы 1 из работы [2] .

Лемма 10. Пусть в условиях леммы 9 коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ постоянные, $b_{\alpha\beta}=0$ при $|\alpha|<m$ и, кроме того, известно, что тейлоровский многочлен $\mathcal{P}_{0,1}(z)$ для функции $w(z)$ в области K обращается в нуль. Тогда найдется такая константа $\Lambda(n,m,\kappa,\lambda,\theta_1)$, что при любом $\rho\in(0,1/2]$ справедливо неравенство

$$J_\kappa(0,\rho)\le\frac{\Lambda}{4}\rho^{2(m-\kappa)}\left\{J_\kappa(0,1)+\rho^{-n}\varphi\right\}, \tag{3.20}$$

где величины J_κ определены в (2.9) (с заменой y на z, v на w), величина φ определена в (3.19) .

Доказательство. Представим функцию $w(z)$ как сумму двух функций w_1 и w_2 , где $w_1\in \overset{\circ}{W}{}_2^m(K^h)$ - решение в K^h уравнения (3.14) и, следовательно,

$$\sum_{|\alpha|=m}\int_{K^h}|D^\alpha w_1|^2dz\le C\varphi. \tag{3.21}$$

Тогда функция w_2 принадлежит $W_2^m(K^h)$, удовлетворяет в K^h уравнению с постоянными коэффициентами

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(b_{\alpha\beta}D^\beta w_2)=0,$$

а на S^h - условию

$$\left.\frac{\partial^j w_2}{\partial z_1^j}\right|_{S^h}=0,\quad j=0,1,\dots,m-1.$$

Из оценок вблизи границы для уравнений с постоянными коэффициентами (см. [8]) следует, что $w_2\in C^\infty(K^h_{1/2})$ и справедлива оценка

$$\sup_{z\in K^h_{1/2}}\sum_{|\alpha|\le m}|D^\alpha w_2(z)|^2\le C\int_{K^h}\sum_{|\alpha|=m-1}|D^\alpha w_2(z)|^2dz. \tag{3.22}$$

Применяя неравенство (2.8) , а затем (3.21) и (3.22) , а также учитывая условие $\mathcal{P}_{0,1}(z)=0$, получаем:

$$\int_{K_\rho}\sum_{|\alpha|=m-1}|D^\alpha(w-\mathcal{P}_{0,\rho})|^2dz\le C\rho^2\int_{K_\rho}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w|^2dz\le$$

$$\le C\rho^2\sum_{|\alpha|=m}\int_{K_\rho}(|D^\alpha w_1|^2+|D^\alpha w_2|^2)dz\le$$

$$\le C\rho^2(\varphi+\rho^n\int_{K^h}\sum_{|\alpha|=m-1}|D^\alpha w_2|^2)dz\le$$

$$\le C\rho^2\{\varphi+\rho^n\int_{K^h}\sum_{|\alpha|=m-1}(|D^\alpha w|^2+|D^\alpha w_1|^2)\}dz\le$$

$$\le C\rho^2\{\varphi+\rho^n(\mathcal{J}_K(0,1)+\varphi)\}\le C\rho^2(\rho^n\mathcal{J}_K(a,1)+\varphi).$$

Домножив на $\rho^{2(m-\kappa-1)-n}$, получим (3.20) .

§ 4. Основная лемма

Лемма 11. Пусть функция $v(y)\in W_2^m(K_\tau^h(\bar y))$ является решением задачи (2.1) , (2.2) в области $K_\tau^h(\bar y)$. Для любых чисел $H>0$, $\tau\in(0,1/2]$ найдутся такие константы $\varepsilon_0>0$, $\delta_0\in(0,\tau/2]$, что, как только для некоторых $y^0\in K^h_{\tau/2}(\bar y)$, $\delta\in(0,\delta_0]$ выполнены неравенства

$$T^{(1)}_{y^0,\delta}\le H, \tag{4.1}$$

$$T^{(2)}_{y^0,\delta}\le\varepsilon_0, \tag{4.2}$$

$$\mathcal{J}_\kappa(y^0,\delta)\le\varepsilon_0^2, \tag{4.3}$$

$$\Phi_\kappa(y^0,\delta)\le\varepsilon_0^2, \tag{4.4}$$

то

$$\mathcal{J}_\kappa(y^0,\tau\delta)\le\Lambda\tau^{2(m-\kappa)}\{\mathcal{J}_\kappa(y^0,\delta)+\tau^{-n}\Phi_\kappa(y^0,\delta)\} \tag{4.5}$$

(константа Λ определена в лемме 10) .

Доказательство проведем от противного. Пусть найдутся такие числа $H>0$, $\tau\in(0,1/2]$ и последовательности

$y^\nu\in K^h_{\tau/2}(\bar y)$, $\varepsilon_\nu\downarrow 0$, $\delta_\nu\downarrow 0$ $(\delta_1\le\tau/2)$, что

$$T^{(1)}_{y^\nu,\delta_\nu}\le H, \tag{4.6}$$

$$T^{(2)}_{y^\nu,\delta_\nu}\longrightarrow 0 \quad ,\text{если } \nu\longrightarrow\infty, \tag{4.7}$$

$$\max\{J_\kappa(y^\nu,\delta_\nu),\ \Phi_\kappa(y^\nu,\delta_\nu)\}=\varepsilon_\nu^2, \tag{4.8}$$

но

$$J_\kappa(y^\nu,\tau\delta_\nu)>\Lambda\tau^{2(m-\kappa)}\{J_\kappa(y^\nu,\delta_\nu)+\tau^{-n}\Phi_\kappa(y^\nu,\delta_\nu)\}. \tag{4.9}$$

Для каждого значения ν уравнение (2.1) выполняется в области $K_{\delta_\nu}^{y_1^\nu+h}(y^\nu)$. Перенесем уравнение на области

$$K^{(\nu)}=K^{h_\nu},\quad h_\nu=\frac{y_1^\nu+h}{\delta_\nu}$$

(напомним: $K^h=K_1^h(0)$, $S^h=S_1^h(0)$) путем преобразования координат

$$z=\frac{y-y_\nu}{\delta_\nu}.$$

При этом множества $S_{\delta_\nu}^{y_1^\nu+h}(y^\nu)$ перейдут в множества

$$S^{(\nu)}=\begin{cases}\emptyset, & \text{если } h_\nu>1,\\ S^{h_\nu}, & \text{если } h_\nu\le 1.\end{cases}$$

На множестве K определена последовательность функций

$$w_\nu(z)=\varepsilon_\nu^{-1}\delta_\nu^{-\kappa}\{v(y^\nu+\delta_\nu z)-\mathcal{P}_{y^\nu,\delta_\nu}(y^\nu+\delta_\nu z)\}. \tag{4.10}$$

Тогда для любого мультииндекса γ, $0\le|\gamma|\le m$, будет

$$D_y^\gamma v(y^\nu+\delta_\nu z)=\varepsilon_\nu\delta_\nu^{\kappa-|\gamma|}D_z^\gamma w_\nu(z)+D_y^\gamma\mathcal{P}_{y^\nu,\delta_\nu}(y^\nu+\delta_\nu z)\equiv\chi_\nu^\gamma(z), \tag{4.11}$$

в частности,

$$D_y^\beta v(y^\nu+\delta_\nu z)=\varepsilon_\nu\delta_\nu^{\kappa-m}D_z w_\nu(z),\quad |\beta|=m. \tag{4.12}$$

Если определить, кроме того,

$$b_{\alpha\beta}^\nu(z)=\delta_\nu^{m-|\alpha|}\mathcal{B}_{\alpha\beta}(y^\nu+\delta_\nu z,\ \chi_\nu^\gamma(z)),\ |\alpha|\le m,\ |\beta|=m, \tag{4.13}$$

$$\varphi_\alpha^\nu(z)=\varepsilon_\nu^{-1}\delta_\nu^{2m-\kappa-|\alpha|}\Phi'_\alpha(y^\nu+\delta_\nu z,\ \chi_\nu^\gamma(z)),\ |\alpha|\le m, \tag{4.14}$$

то функция $w_\nu(z)$ удовлетворяет в области $K^{(\nu)}$ уравнению

$$\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\Big\{\sum_{|\beta|=m}b_{\alpha\beta}^\nu(z)D_z^\beta w_\nu+\varphi_\alpha^\nu(z)\Big\}=0, \tag{4.15}$$

а также (в смысле L_2) граничному условию

$$\left.\frac{\partial^j w_\nu}{\partial z_1^j}\right|_{S^{(\nu)}}=0,\quad j=0,1,\dots,m-1, \tag{4.16}$$

которое нетривиально, конечно, лишь при $S^{(\nu)}\neq\emptyset$. Соотношения (4.8) и

(4.9) переходят соответственно в

$$\max\left\{I_\nu(1),\ \varphi^\nu\right\}=1 \tag{4.17}$$

и

$$I_\nu(\tau)>\Lambda\tau^{2(m-k)}\left\{I_\nu(1)+\tau^{-n}\varphi^\nu\right\}\geqslant\Lambda\tau^{2(m-k)}, \tag{4.18}$$

где, по определению,

$$\varphi^\nu=\int_{K^{(\nu)}}\sum_{|\alpha|\le m}|\varphi^\nu_\alpha(z)|^2dz, \tag{4.19}$$

$$\bar I_\nu(\rho)=\rho^{2(m-1-k)}\left[\sum_{|\gamma|=m-1}|D^\gamma(w_\nu-Q_{\nu,\rho})|^2\right]_{0,\rho}\quad\forall\rho\in(0,1]. \tag{4.20}$$

В последней формуле $Q_{\nu,\rho}(z)$ суть тейлоровские многочлены для функции w_ν в области K_ρ (напомним:

$$Q_{\nu,\rho}(z)=\begin{cases}0 & \text{, если } \bar K_\rho\cap S^{(\nu)}\neq\emptyset,\\ q_{\nu,\rho}(z) & \text{, если } \bar K_\rho\cap S^{(\nu)}=\emptyset,\end{cases}$$

а многочлены $q_{\nu,\rho}(z)$ степени $m-1$ определяются равенствами

$$\int_{K_\rho}D^\gamma(w_\nu-q_{\nu,\rho})dz=0\quad\forall\gamma,\ 0\le|\gamma|\le m-1 \tag{4.21}$$

(см. лемму 4)). Легко видеть, что всегда

$$Q_{\nu,\rho}(z)=\varepsilon_\nu^{-1}\delta_\nu^{-k}\left\{\mathcal{P}_{y^\nu,\rho\delta_\nu}(y^\nu+\delta_\nu z)-\mathcal{P}_{y^\nu,\delta_\nu}(y^\nu+\delta_\nu z)\right\}, \tag{4.22}$$

в частности,

$$Q_{\nu,1}(z)\equiv 0. \tag{4.23}$$

Устремим ν к бесконечности. Переходя при необходимости к подпоследовательностям, устанавливаем:

1) $y^\nu\longrightarrow y^0\in\overline{K^h_{\tau/2}(\bar y)}$.

2) Возможны два случая:

а) существует бесконечно много номеров ν, для которых $S^{(\nu)}=\emptyset$. Отбросив все остальные значения ν, считаем, что все уравнения (4.15) выполняются в области $K=K^{h_0}$, $h_0=2$;

б) для всех ν, начиная с некоторого, будет $S^{(\nu)}\neq\emptyset$, т.е. все $h_\nu\in[0,1]$; можно считать, что $h_\nu\longrightarrow h_0\in[0,1]$, все $\mathcal{P}_{y^\nu,\delta_\nu}\equiv 0$, области $K^{(\nu)}$ стабилизируются к K^{h_0}, поверхности $S^{(\nu)}$ - к S^{h_0}.

Разницу в доказательстве случаев а) и б) будем указывать по мере необходимости.

3) Покажем, что

$$D^\gamma_y\mathcal{P}_{y^\nu,\delta_\nu}(y^\nu+\delta_\nu z)\longrightarrow\rho^{(\gamma)}=const \tag{4.24}$$

равномерно на K при любом γ, $0\le|\gamma|\le K$.

Действительно, в случае 2, б) все $\mathscr{P}_{y^\nu,\delta_\nu}\equiv 0$, а в случае 2, а) неравенства (3.6), (3.7) вместе с (4.6), (4.7) дают:

$$\max_{y\in K_{\delta_\nu}(y^\nu)}|D^\gamma\mathscr{P}_{y^\nu,\delta_\nu}(y)-D^\gamma\mathscr{P}_{y^\nu,\delta_\nu}(y^\nu)|=o(1),\quad \nu\to\infty,$$

константы же $D^\gamma\mathscr{P}_{y^\nu,\delta_\nu}(y^\nu)=\gamma!\,c_\gamma$ стабилизируются к $\rho^{(\gamma)}$ в силу их ограниченности, которая вытекает из (3.9), (4.6), (4.7).

4) Из (4.17), (4.20) и (4.23) следует, что (в случаях 2, а) и 2, б))

$$\|w_\nu\|_{W_2^{m-1}(K)}\le C; \tag{4.25}$$

значит, существует такая функция $w\in W_2^{m-1}(K)$, что $D^\gamma w_\nu\to D^\gamma w$ слабо в $L_2(K)$ при любом γ, $0\le|\gamma|\le m-1$.

5) Из (4.25) следует, что $\varepsilon_\nu D^\gamma w_\nu\to 0$ почти всюду в K при любом γ, $0\le|\gamma|\le m-1$.

6) Из (4.11) в силу 3), 5) вытекает, что при любом γ, $0\le|\gamma|\le K$, будет $\chi_\nu^\gamma(z)\to\rho^{(\gamma)}$ почти всюду в K.

7) Доопределим функции $b_{\alpha\beta}^\nu(z)$ при $z\in K^{h_0}\setminus K^{(\nu)}$ следующим образом:

$$b_{\alpha\beta}^\nu(z)=b_{\alpha\beta}=\mathscr{B}_{\alpha\beta}(y^0,\rho^{(\gamma)}),\ |\alpha|=|\beta|=m,\quad b_{\alpha\beta}^\nu(z)=0,\ |\alpha|<m,\ |\beta|=m.$$

Тогда, учитывая непрерывность и ограниченность функций $\mathscr{B}_{\alpha\beta}(y,\eta)$ при $y\in K_{1/2}^h$, любых значениях η_γ, из (4.13), 1), 6) получим, что

$$b_{\alpha\beta}^\nu(z)\to b_{\alpha\beta}=\mathrm{const}$$

почти всюду в K^{h_0} при $|\alpha|=|\beta|=m$,

$$b_{\alpha\beta}^\nu(z)\to 0$$

равномерно в K^{h_0} при $|\alpha|<m$, $|\beta|=m$.

Поскольку коэффициенты $\mathscr{B}_{\alpha\beta}(y,\eta)$ удовлетворяли условию а) из п.1, то для $b_{\alpha\beta}^\nu(z)$ (следовательно, и для $b_{\alpha\beta}$) справедливы неравенства (3.15), (3.16).

8) Доопределим $\varphi_\alpha^\nu(z)=0$ при $z\in K^{h_0}\setminus K^{(\nu)}$. Из (4.17), (4.19) тогда следует, что $\|\varphi_\alpha^\nu(z)\|_{L_2(K^{h_0})}\le C$, т.е. $\varphi_\alpha^\nu(z)\to\varphi_\alpha(z)$ слабо в $L_2(K^{h_0})$ $\forall\alpha$, $0\le|\alpha|\le m$.

9) Применяя лемму 9 к функциям w_ν (поскольку они являются решениями задач (4.15), (4.16), а функции $b_{\alpha\beta}^\nu(z)$, как указано в 7), удовлетворяют в $K^{(\nu)}$ условиям (3.15), (3.16), получим: для любого $\rho\in(0,1)$

$$\sum_{|\beta|=m}\int_{K_\rho}|D^\beta w_\nu(z)|^2dz\le C(\rho)\Big\{\sum_{|\gamma|\le m-1}\int_K|D^\gamma w_\nu(z)|^2dz+\varphi^\nu\Big\};$$

из этого неравенства в силу (4.17) и (4.25) следует, что $D^\beta w_\nu\to D^\beta w$ слабо в $L_2(K_\rho)$ $\forall\beta$, $|\beta|=m$ $\forall\rho\in(0,1)$.

10) Производные порядка $m-1$ функций w_ν ограничены в $L_2(K)$ (см. (4.25)), а производные порядка m, как указано в 9), ограничены в $L_2(K_\rho)$ $\forall \rho\in(0,1)$; как известно (см., например, [5]), отсюда следует, что

$$D^\gamma w_\nu \to D^\gamma w \quad \text{в } L_2(K_\rho) \quad \forall\gamma \quad |\gamma|\le m-1 \quad \forall\rho\in(0,1).$$

11, б) (только для случая 2, б)).

Функция w в смысле L_2 удовлетворяет условию

$$\left.\frac{\partial^j w}{\partial z_1^j}\right|_{S^{h_0}} = 0, \quad j=0,1,\dots,m-1. \tag{4.26}$$

Действительно, функции w_ν обращаются в нуль в областях. Из 9), 10) и того факта, что $h_\nu \to h_0$, следует, что $w(z)=0$ почти всюду в $K\setminus K^{h_0}$, что и требовалось.

12) В силу 7) - 9) можно перейти к пределу в интегральном равенстве (1.6), написанном для уравнения (4.15) (при этом ψ - любая функция из $\overset{\circ}{C}{}^\infty(K^{h_0})$; для достаточно больших ν будет $\psi\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(K^{(\nu)})$). Тогда в области K^{h_0} выполняется уравнение

$$\sum_{|\alpha|=m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\Big(\sum_{|\beta|=m} b_{\alpha\beta}D^\beta w\Big)+\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi_\alpha=0. \tag{4.27}$$

13) (Предельный переход в (4.18).)

Для функции $w(z)$ в областях K_ρ, $0<\rho\le 1$, определены тейлоровские многочлены

$$Q_\rho(z)=\begin{cases}0 & \text{,если } \rho\ge h_0;\\ q_\rho(z) & \text{,если } \rho<h_0,\end{cases}$$

где многочлены $q_\rho(z)$ степени $m-1$ определены равенствами

$$\int_{K_\rho} D^\gamma(w-q_\rho)\,dz=0 \quad \forall\gamma,\ 0\le|\gamma|\le m-1 \tag{4.28}$$

(см. лемму 4)$^\rho$. По аналогии с (4.19), (4.20) определим величины φ, $I(\rho)$ через функции $\varphi_\alpha(z)$, $w(z)$, $Q_\rho(z)$. Из (4.28) и леммы 2 вытекают неравенства

$$I_\nu(\rho)\le 2^{-n}\rho^{2(m-k-1)-n}\sum_{|\gamma|=m-1}\int_{K_\rho}|D^\gamma w_\nu|^2\,dz,\quad \nu=1,2,3,\dots, \tag{4.29}$$

$$I(\rho)\le 2^{-n}\rho^{2(m-k-1)-n}\sum_{|\gamma|=m-1}\int_{K_\rho}|D^\gamma w|^2\,dz. \tag{4.30}$$

При $\rho=1$ неравенства (4.29) переходят в равенства в силу (4.23). Учитывая еще, что вследствие 4) выполняется

$$\int\limits_K |D^\gamma w|^2 dz \leq \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \int\limits_K |D^\gamma w_\nu|^2 dz,$$

получаем из (4.30)

$$I(1) \leq \overline{\lim_{\nu\to\infty}} I_\nu (1). \tag{4.31}$$

Аналогичным образом из (4.19) и 8) следует, что

$$\varphi \leq \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \varphi^\nu. \tag{4.32}$$

Покажем еще, что

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} I_\nu (\tau) \leq I (\tau). \tag{4.33}$$

Необходимо рассмотреть две возможности:

а) Если $\tau < h_0$ (т.е. $Q_\tau = q_\tau$), то при достаточно больших ν будет $\tau < h_\nu$ и $Q_{\nu,\tau} = q_{\nu,\tau}$. Из 10), (4.21) и (4.28) следует, что при любом γ, $|\gamma| = m-1$, имеет место

$$[D^\gamma w_\nu]_{0,\tau} = D^\gamma q_{\nu,\tau} \to D^\gamma q_\tau = [D^\gamma w]_{0,\tau}$$

и (4.33) обращается в равенство.

б) Если $\tau > h_0$, то $Q_\tau \equiv 0$, следовательно,

$$I(\tau) = 2^{-n} \tau^{2(m-1-\kappa)-n} \sum_{|\gamma|=m-1} \int\limits_{K_\tau} |D^\gamma w|^2 dz =$$

$$= 2^{-n} \tau^{2(m-1-\kappa)-n} \lim_{\nu\to\infty} \sum_{|\gamma|=m-1} \int\limits_{K_\tau} |D^\gamma w_\nu|^2 dz$$

(использовано 10)). Учитывая еще (4.30), получаем (4.33).

Используя (4.31), (4.32) и (4.33), а также неравенство

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} a_\nu + \overline{\lim_{\nu\to\infty}} b_\nu \leq 2 \overline{\lim_{\nu\to\infty}} (a_\nu + b_\nu),$$

справедливое при $a_\nu \geq 0$, $b_\nu \geq 0$, получаем из (4.18):

$$I(\tau) > \frac{\Lambda}{2} \tau^{2(m-\kappa)} \{ I(1) + \tau^{-n} \varphi \}.$$

Кроме того, из неравенств (4.18) и (4.33) имеем

$$I(\tau) \geq \Lambda \tau^{2(m-\kappa)} > 0.$$

Последние два неравенства противоречат лемме 10, примененной к функции $w(z) - Q_1(z)$, поскольку она является решением задачи (4.27), (4.26). Противоречие доказывает лемму 11.

§ 5. Выпрямление границы

В этом и следующем параграфах будут доказаны теоремы 1,2.

Цель данного параграфа - переход от задачи (1.1), (1.2) в области G

к задаче вида (2.1), (2.2) в области $K_{\tau}^{h}(\bar{y}) \cup S_{\tau}^{h}(\bar{y})$ и тем самым сведение доказательства теорем 1, 2 к доказательству обратного утверждения теоремы 3.

Если $\bar{x} \in \Omega$, то при некотором $\tau > 0$ будет $K_{\tau}(\bar{x}) \subset \Omega$. В этом случае достаточно переобозначить $x = y$, $\bar{x} = \bar{y}$, $K_{\tau}(\bar{x}) = K_{\tau}^{h}(\bar{y})$, где $h = 2\tau$, $u(x) = v(y)$, $\mathcal{A}_{\alpha\beta}(x, D^{\gamma}u) = \mathcal{B}_{\alpha\beta}(y, D^{\gamma}v)$, $\mathcal{F}_{\alpha}(x, D^{\gamma}u) = \Phi_{\alpha}(y, D^{\gamma}v)$, чтобы перейти к задаче (2.1), (2.2).

Пусть теперь $\bar{x} \in S$. Согласно условию на S (см. § 1), найдется такая область $V = V_{\bar{x}}$, $\bar{x} \in V$, и такой диффеоморфизм (класса C^m) $g = g_{\bar{x}}$: $V = \{x\} \to K = \{y\}$, что $g(\bar{x}) = 0$, $g(V \cap \Omega) = K^{o}$, $g(V \cap S) = S^{o}$. Положим $\bar{y} = 0$, $\tau = 1$, $h = 0$, тогда $K^{o} = K_{\tau}^{h}(\bar{y})$, $S^{o} = S_{\tau}^{h}(\bar{y})$. Найдется функция $u_0(x) \in C^m(G \cap \bar{V})$, удовлетворяющая на $S \cap V$ граничным условиям (1.2), тогда функция $u - u_0$ удовлетворяет таким же условиям при $\omega_j = 0$, и, значит, если положить $v_0(y) = u_0(g^{-1}(y)) \in C^m(K^{o})$, то функция

$$v(y) = u(g^{-1}(y)) - v_0(y) \in W_2^m(K^{o}) \tag{5.1}$$

удовлетворяет на S^{o} нулевым граничным условиям (2.2). Можно также убедиться, что при замене $x \to y = g(x)$, $u(x) \to v(y)$ уравнение (1.1) переходит в уравнение (2.1) в области K^{o}, для которого выполнены условия а), б) § 1 (возможно, с новыми λ, θ_1, θ_2, σ).

§ 6. Доказательство теорем 1 - 3

Пусть выполнены условия теоремы 1. Определим множество $\Gamma \subset G$ как совокупность тех точек $x^{o} \in \Omega$, для которых не выполняется условие (1.7) ни при каком $\zeta > 0$, тех точек $x^{o} \in S$, для которых не выполняется условие (1.8). Согласно теореме 1 из [11],

$$H_{n-2(m-k)+\zeta}(\Gamma) = 0 \quad \forall \zeta > 0, \quad H_{n-2(m-k)}(\Gamma \cap S) = 0.$$

Пусть $\bar{x} \in G \setminus \Gamma$. Для доказательства теорем 1,2 достаточно установить, что в некоторой окрестности точки $\bar{x}$ функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^{m-1,1/2}$.

Как отмечено в предыдущем параграфе, перейдем от задачи (1.1), (1.2) в окрестности точки $\bar{x}$ к задаче вида (2.1), (2.2) в области $K_{\tau}^{h}(\bar{y})$. Заметим, что из выполнения условий (1.7) или (1.8) при $x^{o} = \bar{x}$ следует выполнение соответственно условий (2.17) или (2.18) при $y^{o} = \bar{y}$. Действительно, при $\bar{x} \in \Omega$ будет $u(x) \equiv v(y)$ в окрестности точки $\bar{x} = \bar{y}$, а при $\bar{x} \in S$ (2.18) следует из (1.8) в силу определения (5.1) и того факта, что $v_0(y), g^{-1}(y) \in C^m(\bar{K}^{o})$.

Аналогичным рассуждением устанавливаем, что функции $u(x)$ и $v(y)$

принадлежат пространствам $C^{m-1,1/2}$ в окрестностях точек $\bar{x}$ и $\bar{y}$ одновременно.

Таким образом, доказательство теорем 1 и 2 сведено к доказательству теоремы 4, которое, в свою очередь, в п.2 сведено к доказательству обратного утверждения теоремы 3. Проведем это рассуждение.

Оно основано на леммах 7, 8, 11. Удобно считать, что в правых частях неравенств (3.11) - (3.13) стоит одна и та же константа C_0. Зафиксируем с этого момента

$$\tau = \min\left(\frac{1}{2\Lambda}, \frac{1}{2}\right) \tag{6.1}$$

(величина Λ - та же, что в неравенстве (4.5)).

Пусть для некоторой точки $y^0 \in K^h_{\tau/2}(\bar{y})$ существует такая последовательность δ_j, $j=1,2,3,\ldots$, что выполнены соотношения (2.11) - (2.14). В частности, найдется такое число $H>0$, что

$$T^{(1)}_{y^0;\delta_j} \leq \frac{H}{2B}, \quad j=1,2,\ldots, \tag{6.2}$$

где

$$\mathcal{B} = \left(1 + C_0\frac{\tau^{-n/2}}{1-\tau^{1/2}}\right)\left(1+\frac{C_0\tau}{1-\tau}\right)^{m-1} M_1, \tag{6.3}$$

а M_1 - число мультииндексов α, для которых $0 \leq |\alpha| \leq m-1$. Зная H, τ и область $K^h_\tau(\bar{y})$, можно из леммы 11 получить числа $\varepsilon_0>0$, $\delta_0 \in (0,\tau/2]$. Если необходимо, уменьшим ε_0 так, чтобы

$$\varepsilon_0 \leq \frac{H}{\mathcal{B}}. \tag{6.4}$$

Аналогично, уменьшив при необходимости δ_0, считаем, что

$$C_0^2\delta_0^2\left(1+\varepsilon_0^2+\frac{\varepsilon_0^2}{\mathcal{B}^2}\right) \leq \tau^n \frac{\varepsilon_0^2}{\mathcal{B}^2}. \tag{6.5}$$

Из (6.2), (2.11), (2.12), (2.14) следует, что найдется такое δ из последовательности δ_j, что

$$\delta \leq \delta_0, \tag{6.6}$$

$$T^{(1)}_{y^0;\delta} \leq \frac{H}{2\mathcal{B}}, \tag{6.7}$$

$$\mathcal{J}_k(y^0;\delta) < \frac{\varepsilon_0^2}{2\mathcal{B}^2}, \tag{6.8}$$

$$T^{(2)}_{y^0;\delta} \leq \frac{\varepsilon_0}{2\mathcal{B}}. \tag{6.9}$$

Кроме того, если $y^0 \notin S^h_\tau(\bar{y})$, то потребуем, чтобы $\delta < y^0_1 + h$. Тогда величина $\mathcal{J}_k(y,\delta)$ непрерывна по y в точке y^0 как при $y^0 \in K^h_{\tau/2}(\bar{y})$, так и при $y^0 \in S^h_{\tau/2}(\bar{y})$. То же относится и к величинам $T^{(1)}_{y,\delta}$, $T^{(2)}_{y,\delta}$. Поэтому найдется такое число $\tau_0 \in (0, \tau/2]$, что для всех точек $y \in K_{\tau_0}(y^0) \cap K^h_{\tau/2}(\bar y)$ имеют место

$$T^{(1)}_{y,\delta} \le \frac{H}{\mathcal{B}}, \qquad (6.10)$$

$$T^{(2)}_{y,\delta} \le \frac{\varepsilon_0}{\mathcal{B}}, \qquad (6.11)$$

$$\mathcal{J}_\kappa(y,\delta) \le \frac{\varepsilon_0^2}{\mathcal{B}^2}. \qquad (6.12)$$

Покажем индукцией по j , что для таких y справедливо

$$\mathcal{J}_\kappa(y, \tau^j\delta) \le \tau^{[2(m-\kappa)-1]j}\,\frac{\varepsilon_0^2}{\mathcal{B}^2}, \quad j=0,1,2,\ldots \qquad (6.13)$$

При $j=0$ (6.13) совпадает с (6.12) . Пусть неравенство (6.13) установлено при $j=0,1,2,\ldots,S-1$. Используя лемму 8, неравенства (6.10) , (6.11) и предположение индукции, получаем последовательно:

при $|\gamma| = m-1$

$$[\![D^\gamma v]\!]_{y,\tau^s\delta} \le \delta^{\kappa-m+1}\,\frac{\varepsilon_0}{\mathcal{B}} + C_0\tau^{-n/2}\delta^{\kappa-m+1}\frac{\varepsilon_0}{\mathcal{B}}\sum_{j=0}^{s-1}\tau^{j/2} \le$$

$$\le \delta^{\kappa-m+1}\,\frac{\varepsilon_0}{\mathcal{B}}\left(1 + C_0\frac{\tau^{-n/2}}{1-\tau^{1/2}}\right);$$

при $\kappa \le |\gamma| = m-2$

$$[\![D^\gamma v]\!]_{y,\tau^s\delta} \le \delta^{\kappa-|\gamma|}\,\frac{\varepsilon_0}{\mathcal{B}} + C_0\delta n\delta^{\kappa-|\gamma|-1}\sum_{j=0}^{s-1}\tau^j\frac{\varepsilon_0}{\mathcal{B}}\left(1+C_0\frac{\tau^{-n/2}}{1-\tau^{1/2}}\right) \le$$

$$\le \delta^{\kappa-|\gamma|}\,\frac{\varepsilon_0}{\mathcal{B}}\left(1+C_0\,\frac{\tau^{-n/2}}{1-\tau^{1/2}}\right)\left(1+C_0\,\frac{n}{1-\tau}\right)$$

и вообще при $\kappa \le |\gamma| \le m-1$

$$[\![D^\gamma v]\!]_{y,\tau^s\delta} \le \delta^{\kappa-|\gamma|}\,\frac{\varepsilon_0}{\mathcal{B}}\left(1+C_0\,\frac{\tau^{-n/2}}{1-\tau^{1/2}}\right)\left(1+\frac{C_0 n}{1-\tau}\right)^{m-1-|\gamma|}. \qquad (6.14)$$

Домножая (6.14) на $(\tau^s\delta)^{|\gamma|-\kappa}$ и суммируя по γ, $\kappa < |\gamma| \le m-1$, получаем, вследствие (6.3) ,

$$T^{(2)}_{y,\tau^s\delta} \le \varepsilon_0. \qquad (6.15)$$

Далее, учитывая (6.10) , (6.4) , (3.13) и неравенство (6.15) , справедливое, по предположению индукции, не только для $j=S$, но и для меньших значений j , получаем последовательно:

при $0 \le |\gamma| = \kappa-1$

$$[\![D^\gamma v]\!]_{y,\tau^s\delta} \le \frac{H}{\mathcal{B}} + C_0\delta n\varepsilon_0\sum_{j=0}^{s-1}\tau^j \le$$

$$\le \frac{H}{\mathcal{B}}\left(1+\frac{C_0 n}{1-\tau}\right);$$

при $0 \le |\gamma| = \kappa - 2$

$$[\![D^\gamma v]\!]_{y,\tau^s\delta} \le \frac{H}{\mathcal{B}} + C_0\delta n\frac{H}{\mathcal{B}}\left(1+\frac{C_0 n}{1-\tau}\right)\cdot\frac{1}{1-\tau} \le$$

$$\le \frac{H}{\mathcal{B}}\left(1+\frac{C_0 n}{1-\tau}\right)^2$$

и вообще при $0 \le |\gamma| < \kappa$

$$[\![D^\gamma v]\!]_{y,\tau^s\delta} \le \frac{H}{\mathcal{B}}\left(1+\frac{C_0 n}{1-\tau}\right)^{\kappa-|\gamma|}. \tag{6.16}$$

Просуммировав неравенства (6.16) по γ, $0 \le |\gamma| < \kappa$, и (6.14) при $|\gamma| = \kappa$, а также учитывая (6.3), получаем:

$$T^{(1)}_{y,\tau^s\delta} \le H. \tag{6.17}$$

Неравенство (6.17) выполняется не только для $j = s$, но и для всех меньших значений j. Из (6.14), (3.1) и (6.3) следует, что

$$\tilde{T}^{(2)}_{y,\tau^j\delta} \le \delta^{\kappa-m+1}\varepsilon_0, \quad j = 0,1,2,\ldots,s-1, \tag{6.18}$$

а из леммы 7 - что при $j = 0,1,2,\ldots,s-1$ имеет место

$$\Phi_\kappa(y,\tau^j\delta) \le C_0\Big\{(\tau^j\delta)^{2(m-\kappa)}\left(1+\varepsilon_0^2\delta^{2(\kappa-m+1)}\right) +$$

$$+ (\tau^j\delta)^2\tau^{j[2(m-\kappa)-1]}\frac{\varepsilon_0^2}{\mathcal{B}^2}\Big\} \le$$

$$\le C_0\delta^2\tau^{2j(m-\kappa)}\left(1+\varepsilon_0^2+\frac{\varepsilon_0^2}{\mathcal{B}^2}\right) \le \tau^{n+2j(m-\kappa)}\frac{\varepsilon_0^2}{2\mathcal{B}^2}$$

(см. (6.5)) . Последнее неравенство вместе с (6.15) , (6.17) и предположением индукции позволяют применить лемму 11 в форме

$$\mathcal{J}_\kappa(y,\tau^s\delta) \le \frac{1}{2}\tau^{2(m-\kappa)-1}\left\{\mathcal{J}_\kappa(y,\tau^{s-1}\delta) + \tau^{-n}\Phi_\kappa(y,\tau^{s-1}\delta)\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\tau^{2(m-\kappa)-1}\left\{\tau^{[2(m-\kappa)-1](s-1)}\frac{\varepsilon_0^2}{\mathcal{B}^2} + \tau^{2(s-1)(m-\kappa)}\frac{\varepsilon_0^2}{\mathcal{B}^2}\right\} \le$$

$$\leqslant \tau^{[2(m-\kappa)-1]s}\ \frac{\varepsilon_0^2}{\mathcal{B}^2},$$

чем и завершается доказательство неравенства (6.13). Из него, используя следующую лемму, получим требуемый результат. В измененной форме эта лемма доказана С. Кампанато [12].

Лемма 12. Пусть $f(y)\in L_2(K_\tau(\bar{y}))$ и существуют такие точка $y^0\in K_{\tau/2}(\bar{y})$, окрестность V_0 точки y^0 и число $\rho_0>0$, что для любых $y\in V_0$, $\rho\in(0,\rho_0]$ найдется такое число $\tilde{f}_{y,\rho}$, что

$$[\,|f-\tilde{f}_{y,\rho}|^2]_{y,\rho}\leqslant C\rho \tag{6.19}$$

(константа C не зависит от y,ρ). Тогда существует такая окрестность V_1 точки y^0, что $f(y)\in C^{0,1/2}(V_1)$.

Неравенство (6.13) в соответствии с (2.9) означает, что неравенство (6.19) выполняется для $f=\mathcal{D}^\gamma v$, $|\gamma|=m-1$,

$$y\in K_{\tau_0}(y^0)\cap K^h_{\tau/2}(\bar{y}),\ \rho=\tau^j\delta,\quad j=0,1,2,\ldots,\ \tilde{f}_{y,\rho}=\mathcal{D}^\gamma\mathcal{P}_{y,\rho}.$$

Распространим его на все $y\in K_{\tau_0}(y^0)\setminus K^h_{\tau/2}(\bar{y})$ (в случае $y^0\in S^h_\tau(\bar{y})$) и все $\rho\in(0,\delta)$.

Пусть $y\in K_{\tau_0}(y^0)\setminus K^h_{\tau/2}(\bar{y})$ и y^*- ближайшая к y точка $S^h_\tau(\bar{y})$; тогда $\mathcal{P}_{y^*,\tau^j\delta}\equiv 0$, $j=0,1,2,\ldots$, и функция v обращается в нуль в области $K_{\tau^j\delta}(y)\setminus K_{\tau^j\delta}(y^*)$. Поэтому

$$[\,|\mathcal{D}^\gamma(v-\mathcal{P}_{y,\tau^j\delta})|^2]_{y,\tau^j\delta}\leqslant[\,|\mathcal{D}^\gamma(v-\mathcal{P}_{y^*,\tau^j\delta})|^2]_{y^*,\tau^j\delta}\leqslant C\tau^j\delta.$$

Наконец, пусть даны любые $y\in K_{\tau_0}(y^0)$, $\rho\in(0,\delta]$. Найдется такое $j\geqslant 0$, что $\tau^{j+1}\delta<\rho\leqslant\tau^j\delta$. Тогда

$$[\,|\mathcal{D}^\gamma(v-\mathcal{P}_{y,\tau^j\delta})|^2]_{y,\rho}\leqslant\tau^{-n}[\,|\mathcal{D}^\gamma(v-\mathcal{P}_{y,\tau^j\delta})|^2]_{y,\tau^j\delta}\leqslant$$
$$\leqslant\tau^{-n}\cdot C\tau^j\delta\leqslant C\tau^{-n-1}\rho.$$

Таким образом, применив лемму 12 (с $V_0=K_{\tau_0}(y^0)$) получим

$$\mathcal{D}^\gamma v\in C^{0,1/2}(V_1)\quad\forall\gamma,\ |\gamma|=m-1$$

(здесь V_1- некоторая окрестность точки y^0).

Теорема 3, а с ней теоремы 1,2 доказаны полностью.

§ 7. Другие теоремы о регулярности

Достаточное условие (1.7), (1.8) гладкости решения задачи (1.1), (1.2) в окрестности точки $x^0\in G$ позволяет доказать некоторые другие теоремы о частичной регулярности таких решений, а также об их гладкости вблизи границы.

Теорема 5. Если в условиях теоремы 1 имеет место $\kappa = m - n/2$, то $u \in C^{m-1,1/2}_{loc}(S)$, т.е. для любой точки $x^0 \in S$ найдется такая ее окрестность V, что $u \in C^{m-1,1/2}(V \cap G)$.

Действительно, в этом случае (1.8) переходит в условие

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{\Omega \cap K_\delta(x^0)} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 dx = 0,$$

которое выполняется для любой точки $x^0 \in S$.

Как следствие теоремы 5 получим результат о гладкости вблизи границы всех решений задачи (1.1), (1.2) на плоскости (если $n=2$, то при $\kappa = m-1$ будет $u \in C^{m-1,1/2}_{loc}(S)$). В отличие от работ И.Нечаса [9,10] и автора [7] этот результат получен без предположения равенства или близости коэффициентов $A_{\alpha\beta}$ и $A_{\beta\alpha}$ при $|\alpha|=|\beta|=m$, но при дополнительном условии их непрерывности (условие а) из § 1).

Сформулируем еще некоторые результаты об уменьшении максимальной размерности множества Γ в зависимости от повышения априорной гладкости решения. Результаты такого рода приводятся в работах И.В. Скрыпника [13 и др.].

Теорема 6. Пусть в условиях теоремы 1 имеет место $u \in W^m_{p,loc}(G)$, где $p \geq 2$, $\kappa > m - n/p$. Тогда

$$H_{n-p(m-\kappa)+\xi}(\Gamma) = 0 \quad \forall \xi > 0, \; H_{n-p(m-\kappa)}(\Gamma \cap S) = 0. \qquad (7.1)$$

Для доказательства достаточно применить неравенство Гёльдера к интегралу в (1.7), (1.8): при любом $\xi \geq 0$ имеем

$$\delta^{-n+2(m-\kappa)-\xi} \int_{\Omega \cap K_\delta(x^0)} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 dx \leq$$

$$\leq C\delta^{-n+2(m-\kappa)-\xi} (\delta^n)^{\frac{p-2}{p}} \Big(\int_{\Omega \cap K_\delta(x^0)} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p dx \Big)^{2/p} =$$

$$= C\Big(\delta^{-n+p(m-\kappa)-p\xi/2} \int_{\Omega \cap K_\delta(x^0)} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p dx \Big)^{2/p},$$

и (7.1) следует из теоремы 2 настоящей работы и теоремы 1 из [11].

Если $\kappa = m - n/p$, то (1.8) перейдет в условие

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{\Omega \cap K_\delta(x^0)} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p dx = 0,$$

которое выполняется для любой точки $x^0 \in S$. Полученный результат сформулируем в виде отдельного утверждения, обобщающего теорему 5.

Теорема 7. Если в условиях теоремы 1 выполняется $u \in W^m_{p,loc}(G)$, где $p \geq 2$, $\kappa = m - n/p$, то $u \in C^{m-1,1/2}_{loc}(S)$.

Теорема 6 допускает следующее обобщение.

Теорема 8. Если в условиях теоремы 1 имеет место $u \in W^{m+\ell}_{p,\ell oc}(G)$, где $\ell \geq 0$, $p \geq 2$, $\kappa \geq m+\ell - n/p$, то

$$H_{n-\frac{np}{n-\ell p}(m-\kappa)+\zeta}(\Gamma) = 0 \quad \forall \zeta > 0, \quad H_{n-\frac{np}{n-\ell p}(m-\kappa)}(\Gamma \cap S) = 0.$$

Для доказательства достаточно заметить, что в этом случае, в силу теорем вложения Соболева (см. [5]),

$$u \in W^{m}_{\frac{np}{n-\ell p},\ell oc}(G),$$

а затем применить (7.1), заменив p на $np/(n-\ell p)$.

Аналогом теоремы 7 в этом случае является следующая

Теорема 9. Если в условиях теоремы 1 справедливо $u \in W^{m+\ell}_{p,\ell oc}(G)$, где $\ell \geq 0$, $p \geq 2$, $\kappa = m+\ell - n/p$, то $u \in C^{m-1,1/2}_{\ell oc}(S)$.

Заметим, что если в условиях теорем 5,7,9 соответственно будут $\kappa < m - n/2$, $\kappa < m - n/p$, $\kappa < m+\ell - n/p$, то утверждение о регулярности произвольного решения всюду на множестве G вытекает из теорем вложения.

Литература

1. Morrey C.B. Partial riqularity results for nonlinear elliptic systems.- J.Math. and Mech., 1968, v. 17, № 7, p. 649-670.
2. Giusti E. Regolarita parziale delle soluzioni di sistemi ellittici quasilineari di ordine arbitrario.- Ann.Scuola norm.super. Pisa, Ser. 3, 1969, v. 23, № 1, p. 115-141.
3. Giusti E. Un'aggiunta alla mia nota: Regolarità parziale delle soluzioni di sistemi ellittici quasilineari di ordine arbitrario.- Ann.Scuola norm.super. Pisa, Ser. 3, 1973, v. 27, № 1, p. 161-166.
4. Аракчеев С.А. Некоторые вопросы регулярности и разрешимости для эллиптических и параболических уравнений.- Динамика сплошной среды, 1976, вып.27, с.16-22.
5. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.- Л.: изд-во ЛГУ, 1950.- 255 с.
6. Мазья В.Г. Примеры нерегулярных решений квазилинейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами.- Функц. анализ и его применения, 1968, т.2, №3, с.53-57.
7. Аракчеев С.А. О гладкости обобщенных решений некоторого класса квазилинейных эллиптических уравнений.- Вестник МГУ. Математика, механика, 1975, №1, с.49-57.

8. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях.- М.: ИЛ, 1962.- 205 с.

9. Nečas J. Sur la régularité des solution variationnelles des equations elliptiques non-linéaires d'ordine 2k en deux dimensions.-Ann.Scuola norm.super. Pisa, Ser. 3, 1967, v. 21,№ 3, p. 427-456.

10. Nečas J. Sur la régularité des solution faibles des équations elliptiques non-lineaires.- Comment.math.Univ.carol.,1968, v. 9,№ 3, p. 365--413.

11. Giusti E. Precisazione delle funzioni di $H^{1,p}$ e singolarità delle soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari.- Boll. Unione mat. ital., Ser. 4, 1969, v. 2, № 1, p. 71-76.

12. Campanato S. Proprieta di Hölderianita di alcune classi di funzioni.- Ann.Scuola norm. super. Pisa, Ser. 3, 1963, v. 17, № 1-2, p. 175-188.

13. Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.- Киев : Наукова думка, 1973.- 219 с.

14. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.- М.: Наука, 1977.- 741 с.