УДК 517.946

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ

В.А.Брюханов (Новосибирск)

Цель данной работы - получить достаточные условия корректности задачи Коши для вырождающихся на границе уравнений, обобщающих хорошо известное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - t^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial t} - cu = f. \qquad (1)$$

Как известно [1-6] , класс корректности задачи Коши для уравнений (1) определяется коэффициентом a при производной $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Несложный анализ показывает, что в случае уравнений второго порядка, приводимых к виду (1) , класс корректности определяется поведением корней характеристического уравнения в окрестности линии вырождения и поведением коэффициентов при производных первого порядка.

В данной работе будет показано, что и для некоторых гиперболических вырождающихся уравнений высокого порядка можно указать классы корректности задачи Коши в зависимости от поведения корней характеристического уравнения и коэффициентов при младших производных [3] .

1. В слое $R_T=[0,T]\times R^n$ рассмотрим уравнение

$$P(D_t, D)u = D_t^m u + \sum_{\substack{|\nu|+j=m,\\ |\nu|>0}} a_{\nu,j}\,\alpha^{|\nu|}(t) D^{\nu} D_t^{j} u + \sum_{j=0}^{m-2} \sum_{|\beta^j|\le m-j-1} b_{\beta^j} D^{\beta^j} D_t^{j} u \; f, \qquad (2)$$

в котором $\nu=\nu_1,\ldots,\nu_n$, $\beta^j=\beta^j_1,\ldots,\beta^j_n$ - целочисленные мультииндексы, $a_{\nu,j}$ - постоянные, функция $\alpha(t)\in C^1([0,T])$ удовлетворяет условию:

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t)\cdot t^{-\rho} = a_0 > 0, \qquad \rho \geq 1 .$$

Пусть $\lambda_1 = c_1(\eta)\alpha(t)|\eta|, \ldots, \lambda_m = c_m(\eta)\alpha(t)|\eta|$ - корни характеристического уравнения

$$P_m(\lambda) = \lambda^m + \sum_{\substack{|\nu|+j=m,\\ |\nu|>0}} a_{\nu,j} \cdot \alpha^{|\nu|}(t)(i\eta)^{\nu}\cdot \lambda^j = 0.$$

Будем считать, что для них выполняются условия:

$$Re\,\lambda_j = 0, \qquad j=1,\ldots,m, \qquad (3)$$
$$\lambda_k \neq \lambda_j, \quad k\neq j, \quad t>0.$$

Из условий (3) следует, что уравнение (2) строго гиперболическое при $t>0$.

Для уравнения (2) рассмотрим задачу Коши с начальными данными

$$D_t^j u\Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j=0,\ldots,m-1. \qquad (4)$$

Мы будем использовать следующие пространства:

$W_2^k(R^n)$ - пространство С.Л. Соболева с нормой

$$\|u\|_k^2 = \int_{R^n} \Big(\sum_{|\nu|\leq k} |D^{\nu}u|^2\Big) dx;$$

$C^s([0,T], W_2^k(R^n))$ - пространство гладких на отрезке $[0,T]$ функций со значениями в $W_2^k(R^n)$, с нормой

$$\|u\|_{s,k} = \sum_{j=0}^{s} \max_{0\leq t\leq T} \|D_t^j u\|_{k-j};$$

$C_k([0,T])$ - пространство непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций с нормой

$$|v|_k = \max_{0\leq t\leq T} |t^{-k} v|;$$

$C_{k_0,\ldots,k_\ell}$ - пространство непрерывных на отрезке $[0,T]$ вектор-функций $\bar{v}=(v_0,\ldots,v_\ell)$ с нормой

$$|\bar{v}|_{k_0,\ldots,k_\ell} = \sum_{j=0}^{\ell} |v_j|_{k_j} .$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

$$\lim_{T\to 0}\left(\max_{0\le t\le T}\left|\frac{b_{\beta j}}{\alpha^{m-j-2}D_t\alpha}\right|\right)=d_j<\infty,\ |\beta^j|=m-j-1;$$
$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{b_{\beta j}}{\alpha^{m-j-3}D_t\alpha}\right|<\infty,\ |\beta^j|<m-j-1. \tag{5}$$

Тогда для произвольного целого $N\geqslant 0$ найдутся числа $p(N,a_{\nu,j},d_j)$, $q(N,a_{\nu,j},d_j)$ такие, что для любых функций $f\in C^0([0,T],W_2^{p}(R^n))$ и $\varphi_j\in W_2^{q}(R^n)$ существует единственное решение $u(t,x)$ задачи (2), (4) из пространства $C^m([0,T],W_2^{m+N}(R^n))$.

Легко видеть, что начальные данные (4) можно свести к однородным. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $\varphi_j=0$.

Выполнив преобразование Фурье

$$v(t,\eta)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}e^{i(x,\eta)}u(t,x)dx,$$

сведем задачу (2), (4) к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от параметра η

$$P(D_t)v=D_t^m v+\sum_{\substack{|\nu|+j=m\\|\nu|>0}}a_{\nu,j}\alpha^{|\nu|}\cdot(i\eta)^{\nu}D_t^j v+\sum_{j=0}^{m-2}\sum_{|\beta^j|\le m-j-1}b_{\beta j}(i\eta)^{\beta^j}D_t^j v=F. \tag{6}$$

Задача Коши для уравнения (6) при каждом η имеет единственное решение. Наша цель - оценить поведение решения в зависимости от η.

2. Сведем задачу Коши для уравнения (6) к системе интегральных уравнений. Для этого введем новые функции:

$$v_j=\alpha^{m-j-2}|\eta|^{m-j-1}D_t^j v,\ j=0,\dots,m-2;\quad v_{m-1}=D_t^{m-1}v. \tag{7}$$

Тогда функции v_j удовлетворяют системе интегральных уравнений:

$$v_j=\sum_{s=0}^{m-2}\frac{m-s-1}{\alpha(t)}\int_0^t K_{j,s}D_\tau\alpha\cdot v_s d\tau-\sum_{s=0}^{m-2}\frac{1}{\alpha(t)}\int_0^t K'_{j,s}D_\tau\alpha\cdot v_s d\tau-$$

$$-\sum_{s=0}^{m-2}\frac{1}{\alpha(t)}\int_0^t K_{j,s}^{2}\frac{D_\tau\alpha}{\alpha(\tau)}\,d\tau-\frac{1}{\alpha(t)}\int_0^t B^{j}F\,d\tau,\quad j=0,\dots,m-2; \tag{8}$$

$$\sigma_{m-1}=\sum_{s=0}^{m-2}\int_0^t K_{m-1,s}\sigma_s\,d\tau+\int_0^t B^{m-1}F\,d\tau, \tag{9}$$

где

$$K_{j,s}=\sum_{k=s-1}^{m}a_k^0\left(\sum_{\ell=1}^{m}\frac{e^{\beta_\ell}\cdot c_\ell^{k+j-s-1}}{P_\ell'(c_\ell)}\right),\quad s,j=0,\dots,m-2,$$

$$a_k^0=\sum_{\substack{|\nu|+k=m\\|\nu|>0}}a_{\nu,j}(i\eta)^{\nu}\cdot|\eta|^{-|\nu|},$$

коэффициенты c_ℓ, $\ell=1,\dots,m$, являются корнями уравнения

$$P_m^0(\lambda)=\lambda^m+\sum_{|\nu|+j=m}a_{\nu,j}(i\eta)^{\nu}\cdot|\eta|^{-|\nu|}\cdot\lambda^j=0;$$

многочлены $P_\ell'(\lambda)$- частные от деления характеристического многочлена $P_m^0(\lambda)$ на $\lambda-c_\ell$, $\ell=1,\dots,m$, $\beta_\ell=c_\ell|\eta|\cdot\int_\tau^t\alpha(y)dy$;

$$K_{j,s}^{1}=B^{j}\cdot\left(\sum_{|\beta^s|=m-s-1}\frac{b_{\beta^s}(i\eta)^{\beta^s}}{|\eta|^{m-s-1}\alpha^{m-s-2}D_\tau\alpha}\right);$$

$$K_{j,s}^{2}=B^{j}\cdot\left(\sum_{|\beta^s|<m-s-1}\frac{b_{\beta^s}(i\eta)^{\beta^s}}{|\eta|^{m-s-1}\alpha^{m-s-3}D_t\alpha}\right),$$

где

$$B^j=\sum_{\ell=1}^{m}\frac{e^{\beta_\ell}c_\ell^j}{P_\ell'(c_\ell)}$$

удовлетворяет условиям

$$\sup_{\tau,t,\xi} \left| B^{j}(\beta_\ell C_\ell^{-1})^{1+j-m} \right| < \infty , \quad j = 0,\dots,m-2 .$$

Ядра интегральных операторов в уравнении (9) $K_{m-1,s}$, B^{m-1} - непрерывные и ограниченные функции на множестве $[0,T]\times[0,T]\times R^n$.

3. Для доказательства существования решения системы (8), (9) нам потребуется одна простая лемма о разрешимости уравнения

$$A v - B v = h. \tag{10}$$

Лемма 1. Пусть имеется последовательность непрерывно вложенных друг в друга банаховых пространств W_j и два линейных оператора A, B, определенных в W_j. Пусть выполнены условия:

α_1) $A W_j = W_j$ и нормы оператора A^{-1} равномерно ограничены во всех пространствах W_j $(\|A^{-1}\| < C < \infty)$, $j = 0,1,\dots$

α_2) оператор B отображает W_j в W_{j+1}, и выполняются оценки $\|Bv\|_{j+1} \le M_{j,j+1} \|v\|_j$

α_3) Для достаточно большого n найдется пространство $\widetilde{W} \subset W_0$ такое, что $\widetilde{W} \subset W_n$, $B\widetilde{W} \subset \widetilde{W}$, $\|Bv\|_n < \delta_n \|v\|_n$ для $v \in \widetilde{W}$, $\|A^{-1}\|\delta_n < 1$. Тогда уравнение (10) имеет единственное решение в пространстве W_0, удовлетворяющее неравенству

$$\|v\|_0 \le C \left(\sum_{j<n} \Pi M_{j,j+1} \right) \|h\|_0 .$$

Доказательство. Определим оператор $L = A^{-1}B$. В силу α_1), уравнение (10) эквивалентно уравнению

$$(I - L) v = A^{-1} h . \tag{11}$$

Из условий α_1), α_2), α_3) следует, что единственным решением уравнения (11), а значит, и уравнения (10) будет

$$v = \sum_{k=0}^{n-1} L^k A^{-1} h + (I-L)^{-1} L^n A^{-1} h ,$$

где n - достаточно большое целое число. Дальнейшее очевидно.

4. Для доказательства существования решения системы (8), (9) воспользуемся леммой 1. Представим систему как некоторое уравнение вида (10) в конкретном функциональном пространстве с конкретными операторами A и B. За W_0 возьмем пространство вектор-функций $C_{K_0^o,\dots,K_{m-2}^o}([0,T])$, где $K_s^o = o(m-s-2)+m-s$, $s=0,\dots,m-2$.

Оператор $A\bar{v}$ определим следующим образом:

$$(A\bar{v})_j = v_j - \frac{m-j-1}{\alpha(t)}\int_0^t D_\tau\alpha(\tau)v_j\,d\tau.$$

Оператор $B\bar{v}$ определим по формулам:

$$(B\bar{v})_j = \frac{m-j-1}{\alpha(t)}\int_0^t (K_{j,j}-1)D_\tau\alpha\cdot v_j\,d\tau +$$

$$+\sum_{s\neq j}\frac{m-s-1}{\alpha(t)}\int_0^t K_{j,s}D_\tau\alpha\cdot v_s\,d\tau + \sum_{s=0}^{m-2}\frac{1}{\alpha(t)}\int_0^t K_{j,s}^1 D_t\alpha\cdot v_s\,d\tau +$$

$$+\sum_{s=0}^{m-2}\frac{1}{\alpha(t)}\int_0^t K_{j,s}^2\frac{D_\tau\alpha}{\alpha(\tau)}v_s\,d\tau. \qquad (12)$$

Отметим, что правая часть системы (8) $\bar{F}=(F_0,\dots,F_{m-2})$ принадлежит пространству $C_{K_0^o,\dots,K_{m-2}^o}([0,T])$.

Легко доказать, что оператор A имеет обратный A^{-1} в любом пространстве $C_{K_0,\dots,K_{m-2}}$, показатели которого не меньше показателей начального пространства ($K_j \geq K_j^o$). Норма обратного оператора не превышает числа $\frac{\rho+1}{\rho}$.

Построим последовательность пространств W_τ по следующему правилу.

При $\tau=K(m-1)+\ell$ положим $W_\tau = C_{K_0^\tau,\dots,K_{m-2}^\tau}$, где $K_j^\tau = K_j^o+K$, если $j<m-\ell-1$; $K_j^\tau = K_j^o+K+1$, если $m-\ell-1\leq j\leq m-2$.

Лемма 2. <u>Оператор B отображает пространство W_τ в $W_{\tau+1}$. При этом выполнены оценки</u>

$$\|B\bar{v}\|_{\tau+1} \leq C|\eta|^{m-1}\|\bar{v}\|_\tau,\ |\eta|>1. \qquad (13)$$

Доказательство. Пусть вектор-функция $\bar{v}\in C_{K_0^\tau,\dots,K_{m-2}^\tau}([0,T])$,

$\tau=K(m-1)+\ell$, т.е. $v_j\in C_{K_j^o+K}$ при $j<m-\ell-1$,

$v_j\in C_{K_j^o+K+1}$, $m-\ell-1\leq j\leq m-2$.

Для слагаемых правой части равенства (12) имеют место следующие оценки:

$$\left|\frac{1}{\alpha}\int_0^t D_\tau\alpha\cdot(K_{j,j}-1)\,v_j\,d\tau\right| \leq c|\eta|t^{\rho+1+K_j^\tau}|v_j|_{K_j^\tau};$$

$$\left|\frac{1}{\alpha}\int_0^t K_{j,s}D_\tau\alpha\cdot v_s\,d\tau\right| \leq ct^{K_s^\tau}|v_s|_{K_s^\tau},\quad s<j;$$

$$\left|\frac{1}{\alpha}\int_0^t K_{j,s}D_\tau\alpha\cdot v_s\,d\tau\right| \leq c|\eta|^{s-j}t^{(\rho+1)(s-j)}|v_s|_{K_s^\tau},\quad s>j; \tag{14}$$

$$\left|\frac{1}{\alpha}\int_0^t K_{j,s}^1 D_\tau\alpha\cdot v_s\,d\tau\right| \leq c|\eta|^{m-j-1}t^{(\rho+1)(m-j-1)+K_s^\tau}|v_s|_{K_s^\tau};$$

$$\left|\frac{1}{\alpha}\int_0^t K_{j,s}^2\,\frac{D_\tau\alpha}{\alpha(\tau)}\,v_s\,d\tau\right| \leq c|\eta|^{m-j-2}t^{(\rho+1)(m-j-2)+1}|v_s|_{K_s^\tau},\quad |\eta|>1.$$

Пусть $\ell=0$. Тогда $K_s^\tau-K_{s+1}^\tau=\rho+1,\ s=0,\ldots,m-2$ и из (14) вытекают оценки:

$$|(B\bar v)_j|_{K_j^\tau} \leq c|\eta|^{m-1}|\bar v|_{K_0^\tau,\ldots,K_{m-2}^\tau};\quad j<m-2; \tag{15}$$

$$|(B\bar v)_{m-2}|_{K_{m-2}^\tau+1} \leq c|\eta|^{m-2}|\bar v|_{K_0^\tau,\ldots,K_{m-2}^\tau},\quad |\eta|>1.$$

Пусть $\ell>0$. В этом случае имеем следующие соотношения между показателями:

$$K_s^\tau-K_{s+1}^\tau=\rho+1,\quad s<m-\ell-2;$$

$$K_{m-\ell-2}^\tau-K_{m-\ell-1}^\tau=\rho; \tag{16}$$

$$K_s^\tau-K_{s+1}^\tau=\rho+1,\quad s\geq m-\ell-1.$$

Несложный анализ неравенств (14) с использованием соотношений (16) приводит к оценкам:

$$|(B\bar{v})_j|_{K_j^r} \leq c|\eta|^{m-1}|\bar{v}|_{K_0^r,\ldots,K_{m-2}^r}, \; j<m-\ell-2;$$

$$|(B\bar{v})_{m-\ell-2}|_{K_{m-\ell-2}^r+1} \leq c|\eta|^{m-1}|\bar{v}|_{K_0^r,\ldots,K_{m-2}^r}; \tag{17}$$

$$|(B\bar{v})_j|_{K_j^r} \leq c|\eta|^{m-1}|\bar{v}|_{K_0^r,\ldots,K_{m-2}^r}, \; j\geq m-\ell-1, \; |\eta|>1.$$

Из неравенств (15), (17) следует неравенство (13). Если r достаточно велико, а T достаточно мало, то норма оператора B в пространстве $C_{n,\ldots,n}([0,T])$ сколь угодно мала. Таким образом, для операторов A и B и последовательности пространств W_r выполнены все условия леммы 1. Отсюда следует однозначная разрешимость системы (8) в пространстве $W_0 = C_{K_0^0,\ldots,K_{m-2}^0}$. При этом для любого целого N найдется целое число K_N такое, что норма решения удовлетворяет неравенству

$$|\eta|^N|\bar{v}|_{K_0^0,\ldots,K_{m-2}^0} \leq c|\eta|^{K_N}|\bar{F}|_{K_0^0,\ldots,K_{m-2}^0}, \; |\eta|>1. \tag{18}$$

Число K_N зависит от N, от абсолютных величин коэффициентов $a_{\nu,j}$ и от чисел d_j, фигурирующих в условиях (5).

Из неравенства (18) и представлений (7) следует оценка решения задачи Коши для уравнения (6):

$$\max_{0\leq t\leq T}\int(1+|\eta|)^{2N}\left(\sum_{j=0}^{m}|\eta|^{m-j}|D_t^j v|\right)^2 d\eta \leq c\max_{0\leq t\leq T}\int(1+|\eta|)^{2(K+m)}|F(t,\eta)|^2 d\eta. \tag{19}$$

На основании неравенства (19) можно заключить, что функция $u(t,x)$, являющаяся обратным преобразованием Фурье по переменным $\eta_1,\ldots,\eta_n$ решения задачи Коши для уравнения (6), будет решением задачи (2), (4) и для нее выполняется оценка

$$\|u\|_{m,N+m} \leq c\|f\|_{0,K_N+m}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1.

Литература

1. Березин И.С. О задаче Коши для линейного уравнения второго порядка с начальными данными на линии параболичности.- Мат.сб.1949, т.24, № 2, с.301-320.
2. Иврий В.Я. Достаточные условия регулярной и вполне регулярной гиперболичности.- Тр.Моск.матем.о-ва 1976, т.33, с.3-64.
3. Нерсесян А.Б. Задача Коши для одномерного гиперболического уравнения произвольного порядка с данными на линии вырождения.- Дифференц. уравнения, 1968, т.1У, № 9, с.1658-1662.
4. Олейник О,А. О гиперболических уравнениях второго п-рядка, вырождающихся внутри области и на ее границе.- Успехи мат.наук, 1964, т.24, № 2, с.2?9-230.
5. Терсенов С.А. О задаче Коши с данными на линии вырождения для систем уравнений гиперболического типа.- Докл.АН СССР, 1964, т.155, № 2, с.285-288.
6. Protter M.H. The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on the parabolic line.- Canad. J. Math., 1954, v. 6, № 4, p. 542-553.