УДК 517.947

О СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г.В.Демиденко (Новосибирск)

Рассматриваются смешанные задачи для одного класса уравнений с переменными коэффициентами, не разрешенных относительно старшей производной:

$$\begin{gathered} L(x,x_n;D_{x_0},D_x,D_{x_n})u=f, \quad x_0>0,\ x_n>0,\ x\in E_{n-1}, \\ B_j(D_{x_0},D_x,D_{x_n})u\Big|_{x_n=0}=\varphi_j, \quad j=1,\ldots,\mu,\ x_0>0, \\ u=0 \quad \text{при} \quad x_0<0. \end{gathered} \tag{1}$$

Исследуемый класс уравнений содержит, в частности, уравнение, рассмотренное С.Л.Соболевым [1] при изучении малых колебаний вращающейся жидкости. В рассматриваемый класс смешанных задач для уравнения Соболева входят первая краевая задача, задача с наклонной производной, а также более общие задачи, подчиняющиеся условию типа Лопатинского. Нами доказана корректная разрешимость задачи (1) в весовых классах функций $W^{\ell}_{2,\gamma}$ типа Соболева, если данные задачи f, φ_j удовлетворяют конечному числу условий ортогональности. Близкие вопросы изучались в работах [2 - 9].

§ 1. Определения и формулировка основного результата

Введем некоторые обозначения:

$$E_n^{+}=\{\bar{x}=(x,x_n):\ x=(x_1,\ldots,x_{n-1})\in E_{n-1},\ x_n\geqslant 0\},$$

$$E_{n+1}^{+,+}=\{(x_0,x,x_n):\ \bar{x}=(x,x_n)\in E_n^{+},\ x_0\geqslant 0\},$$

$$x^s=x_1^{s_1}\ldots x_{n-1}^{s_{n-1}}, \quad |\alpha|=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i, \quad \nu\alpha=\sum_{i=1}^{n-1}\nu_i\alpha_i,$$

$$|\xi|^2=\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^{\ell/\alpha_i}, \quad \tau=i\eta+\sigma, \quad Re\,\tau=\sigma\geqslant\gamma>0,$$

$$D_{x_k}^{\nu_k}=\frac{\partial^{\nu_k}}{\partial x_k^{\nu_k}}, \quad D_x^{\nu}=D_{x_1}^{\nu_1}\dots D_{x_{n-1}}^{\nu_{n-1}}, \quad \alpha_{min}=\min_{k=1,\dots,n-1}\alpha_k,$$

$$F_{x\to\xi}\,\omega(\cdot,x,\cdot)=\hat{\omega}(\cdot,\xi,\cdot)=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int\limits_{E_{n-1}} e^{-i\xi x}\,\omega(\cdot,x,\cdot)\,dx,$$

$$L_{x_0\to\tau}\,\omega(x_0,\cdot)=\int\limits_0^{\infty} e^{-\tau x_0}\,\omega(x_0,\cdot)\,dx_0, \quad Re\,\tau=\sigma>\gamma.$$

Определим условия, которым удовлетворяют операторы $L(\bar{x};D_{x_0},D_x,D_{x_n})$ и $B_j(D_{x_0},D_x,D_{x_n})$.

1) Оператор $L(\bar{x};D_{x_0},D_{\bar{x}})$ имеет следующий вид:

$$L(\bar{x};D_{x_0},D_{\bar{x}})\equiv A_\ell(\bar{x},D_{\bar{x}})D_{x_0}^{\ell}+\sum_{k=0}^{\ell-1}A_k(\bar{x};D_{\bar{x}})D_{x_0}^{k}\equiv$$

$$\equiv P_m(\bar{x};D_{x_0})D_{x_n}^{m}+\sum_{k=0}^{m-1}L_k(\bar{x};D_{x_0},D_x)D_{x_n}^{k}\equiv$$

$$\equiv\sum_{\rho,\beta,k}a_{\rho,\beta,k}(\bar{x})D_{x_0}^{\rho}D_x^{\beta}D_{x_n}^{k},$$

причем $P_m(\bar{x}^0;\tau)\neq 0$, $Re\,\tau\geq\gamma$, $A_\ell(\bar{x}^0;\,i\xi,i\lambda)=0\iff$

$\iff|\xi|+|\lambda|=0$ в любой фиксированной точке $\bar{x}^0$.

Отсюда следует, что $D_\tau^{\ell}P_m(\bar{x}^0;0)\neq 0$.

2) Граничные операторы $B_j(D_{x_0},D_{\bar{x}})$ имеют следующий вид:

$$B_j(D_{x_0},D_{\bar{x}})=P^{m_j}(D_{x_0})D_{x_n}^{m_j}+\sum_{k=0}^{m_j-1}P^{k}(D_{x_0},D_x)D_{x_n}^{k},$$

причем $P^{m_j}(\tau)\neq 0$ для $Re\,\tau\geq\gamma$ и $D_\tau^{\ell_j}P^{m_j}(0)\neq 0$,

где ℓ_j - порядок старшей производной по x_0 в операторе $B_j(D_{x_0},D_{\bar{x}})$, $\ell_j\leq\ell$.

3) Характеристические многочлены $L(\bar{x}^0;i\eta,i\xi,i\lambda)$ и $B_j(i\eta,i\xi,i\lambda)$ однородны относительно вектора $(0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(0,\alpha,\alpha_n)$, $\alpha_i>0$, $i=1,\dots,n$, т.е. для любого $c>0$ имеют место

$$L(\bar{x}^0;i\eta,c^{\alpha}i\xi,c^{\alpha_n}i\lambda)=cL(\bar{x}^0;i\eta,i\xi,i\lambda),$$

$$B_j(i\eta,c^{\alpha}i\xi,c^{\alpha_n}i\lambda)=c^{\beta_j}B_j(i\eta,i\xi,i\lambda),$$

где $0 \leqslant \beta_j < 1$.

4) Уравнение $L(\bar{x}^\circ; i\eta, i\xi, i\lambda) = 0$ при $(\xi, \lambda) \in E_n \setminus 0$ имеет только вещественные корни $\eta_1, \dots, \eta_\ell$. Следовательно, уравнение $L(\bar{x}^\circ; \tau, i\xi, i\lambda) = 0$ при $\xi \in E_{n-1} \setminus 0$, $Re\,\tau \geqslant \gamma$, не имеет вещественных корней по λ.

Обозначим через $\lambda_1^+(\bar{x}^\circ; \tau, i\xi), \dots, \lambda_\mu^+(\bar{x}^\circ; \tau, i\xi)$ корни с $Im\,\lambda_\kappa > 0$, через $\lambda_1^-(x^\circ; \tau, \xi), \dots, \lambda_{m-\mu}^-(\bar{x}^\circ; \tau, \xi)$ - корни с $Im\,\lambda_\kappa < 0$. Положим

$$M^+(\bar{x}^\circ; \tau, \xi, \lambda) = \prod_{\kappa=1}^{\mu} (\lambda - \lambda_\kappa^+(\bar{x}^\circ; \tau, \xi)).$$

5) Полагая, что выполнено условие типа Лопатинского: полиномы $B_j(\tau, i\xi, i\lambda)$, как полиномы от λ, при $|\xi| = 1$, $Re\,\tau \geqslant \gamma$ линейно-независимы по $mod\, M^+(\bar{x}^\circ; \tau, \xi, \lambda)$, имеем $det(b_{j\kappa}(\tau, \xi)) \neq 0$, где $b_{j\kappa}$ определяются из равенств:

$$P^{m_j}(\tau)\left(\sum_{\kappa=1}^{\mu} b_{j\kappa}(\tau, \xi)(i\lambda)^{\kappa-1}\right) \equiv B_j(\tau, i\xi, i\lambda)(mod\, M^+).$$

Пример. Рассмотрим уравнение Соболева

$$L(D_{x_0}, D_x)u = D_{x_0}^2 \Delta u + D_{x_n}^2 u = f.$$

Уравнение $L(\tau, i\xi, i\lambda) = -(\tau^2+1)\lambda^2 - \tau^2 \sum_1^{n-1} \xi_i^2 = 0$ имеет комплексные корни λ^+ и λ^-, причем

$$Im\,\lambda^+(\tau, \xi) \geqslant \delta(\gamma) > 0, \quad Im\,\lambda^-(\tau, \xi) \leqslant -\delta(\gamma) < 0$$

для $|\xi| = 1$, $Re\,\tau \geqslant \gamma$. Условия 1), 3), 4) выполнены.

В качестве граничного оператора можно взять, например, $B(D) \equiv I$ (первая краевая задача, $\beta = 0$) или

$$B(D) = \left(\sum_0^2 a_\kappa \frac{\partial^\kappa}{\partial x_0^\kappa}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_n} + \sum_1^{n-1} c_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right), \quad c_\ell \in E_1,$$

где $P(\tau) = \sum_0^2 a_\kappa \tau^\kappa \neq 0$, $Re\,\tau \geqslant \gamma$ $(\beta = 1/2)$. В частности, при $c_\ell = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = a_0 = 1$ имеем вторую краевую задачу. Эти операторы удовлетворяют условиям 2), 3). Проверим условие 5). В первом случае $b_{11}(\tau, \xi) = 1$.

Во втором случае $P(\tau) \cdot b_{11}(\tau, \xi) = i\left(\sum_0^2 a_\kappa \tau^\kappa\right)\left(\lambda^+(\tau, \xi) + \sum_1^{n-1} c_\ell \xi_\ell\right) \neq 0$,

поскольку $$\left(-\frac{\tau^2}{\tau^2+1} \sum_1^{n-1} \xi_i^2\right)^{1/2} = \lambda^+(\tau, \xi) \neq 0, \ |\xi| = 1, \ Re\,\tau \geqslant \gamma > 0,$$

$$c_\ell \in E_1 \quad \text{и} \quad Im\,\lambda^+(\tau, \xi) \geqslant \delta(\gamma) > 0 \quad \text{при } |\xi| = 1, \ Re\,\tau \geqslant \gamma.$$

Определим класс функций $W^{p/\alpha}_{2,\gamma}(E^{+,+}_{n+1})$ $(\gamma>0)$:
Функция $u\in W^{p/\alpha}_{2,\gamma}(E^{+,+}_{n+1})$, если $D^{\kappa}_{x_0}u(0,x,x_n)=0$, $\kappa=0,\dots,p\ell-1$, где ℓ - порядок старшей производной по x_0 и

$$\sum_{\nu_0\ell^{-1}+\nu\alpha+\nu_n\alpha_n=p}\|D^{\nu_0}_{x_0}e^{-\gamma x_0}D^{\nu}_{x}D^{\nu_n}_{x_n}u, L_2(E^{+,+}_{n+1})\|<\infty .$$

Определим класс функций $\widetilde{W}^{p/\alpha}_{2,\gamma}$:

Функция $v\in\widetilde{W}^{p/\alpha}_{2,\gamma}$, если при почти всех $(x,x_n)\in E^{+}_{n}$ функция $v(\tau,x,x_n)$ голоморфна по $\tau, Re\,\tau>\gamma$, и

$$\sum_{\nu_0\ell^{-1}+\nu\alpha+\nu_n\alpha_n=p}\sup_{\sigma>\gamma}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma+i\eta|^{2\nu_0}\|D^{\nu}_{x}D^{\nu_n}_{x_n}v(\tau,x,x_n),L_2(E^{+}_{n})\|^2d\eta\right)^{1/2}<\infty .$$

По обобщенной теореме Пэли-Винера [10], преобразование Лапласа взаимно-однозначно и с сохранением нормы отображает пространство $W^{p/\alpha}_{2,\gamma}$ на $\widetilde{W}^{p/\alpha}_{2,\gamma}$.

Определим класс функций $\mathfrak{M}_0(E^{+}_{n+1})$:
Функция $g(\tau,x,x_n)\in\mathfrak{M}_0(E^{+}_{n+1})$, если для почти всех $(x,x_n)\in E^{+}_{n}$ функция g голоморфна по τ, $Re\,\tau>\gamma$, и при $\frac{|\alpha|}{2}>1$ справедливо

$$\|g,\mathfrak{M}_0(E^{+}_{n+1})\| = \sup_{\sigma>\gamma}\Big[\|g,\widetilde{W}^{1/\alpha}_{2,\gamma}(E^{+}_{n+1})\| +$$

$$+\|\,\|g,L_1(E_{n-1})\|\,|\tau|^{\ell},L_2(E^{+}_{2})\|\Big]<\infty ,$$

а при $\frac{|\alpha|}{2}+N\alpha_{min}>1\geqslant\frac{|\alpha|}{2}+(N-1)\alpha_{min}$, $N\geqslant 1$,
имеет место

$$\|g,\mathfrak{M}_0(E^{+}_{n+1})\| = \sup_{\sigma>\gamma}\Big[\|g,\widetilde{W}^{1/\alpha}_{2,\gamma}(E^{+}_{n+1})\| +$$

$$+\sum_{|q|\leqslant N}\|\,\|g(\tau,x,x_n)x^{q},L_1(E_{n-1})\|\,|\tau|^{\ell},L_2(E^{+}_{2})\|\Big]<\infty .$$

Определим подпространство $\mathcal{L}_0(E^{+}_{n+1})\subseteq\mathfrak{M}_0(E^{+}_{n+1})$:
при $\frac{|\alpha|}{2}>1$ положим $\mathcal{L}_0(E^{+}_{n+1})=\mathfrak{M}_0(E^{+}_{n+1})$;

при $\frac{|\alpha|}{2} + N\alpha_{min} > 1 \geq \frac{|\alpha|}{2} + (N-1)\alpha_{min}$ функция $g \in \mathcal{L}_0(E^+_{n+1})$, если $g \in \mathcal{M}_0(E^+_{n+1})$ и

$$\int\limits_{E_{n-1}} x^s g(\tau, x, x_n)\,dx = 0, \quad 0 \leq |s| \leq N-1.$$

Определим классы функций $\mathcal{M}^1_j(E_n)$ и $\mathcal{M}^2_j(E_n)$:

Функция $\psi(\tau,x) \in \mathcal{M}^\kappa_j(E_n)$, $\kappa = 1,2$, если при почти всех $x \in E_{n-1}$ функция ψ голоморфна по τ, $Re\,\tau > \gamma$, причем для $\frac{|\alpha|}{2} > \beta_j + \frac{\alpha_n}{2}$ имеет место

$$\|\psi, \mathcal{M}^\kappa_j(E_n)\| = \|\psi, \widetilde{W}^{r_{j\kappa}}_{2,\gamma}(E_n)\| +$$

$$+ \sup_{\sigma > \gamma} \left\| |\tau|^{2\ell - \ell_j} \| \psi(\tau,x), L_1(E_{n-1})\|, L_2(E_1)\right\| < \infty,$$

где $$\|\psi, \widetilde{W}^{r_{j\kappa}}_{2,\gamma}\| = \sup_{\sigma>\gamma} \Big[\sum_1^{n-1} \| \xi_i^{r^i_{j\kappa}} \hat{\psi}(\tau,\xi), L_2\| +$$

$$+ \| |\tau|^{r^0_{j\kappa}} \psi(\tau,x), L_2 \| \Big], \quad r_{j\kappa} = (r^0_{j\kappa}, \ldots, r^{n-1}_{j\kappa}),$$

$$r^0_{j1} = 2\ell - \ell_j, \quad r^p_{j1}\alpha_p = 2 - \beta_j - \frac{\alpha_n}{2}, \quad p = 1, \ldots, n-1,$$

$$r^0_{j2} = \left(3 - \beta_j - \frac{\alpha_n}{2}\right)\left(\ell - \frac{1}{2}\ell_j\right), \quad r^p_{j2}\alpha_p = 3 - \beta_j - \frac{\alpha_n}{2},$$

а при $\frac{|\alpha|}{2} + N_j\alpha_{min} > \beta_j + \frac{\alpha_n}{2} \geq \frac{|\alpha|}{2} + (N_j - 1)\alpha_{min}$

выполняется

$$\|\psi, \mathcal{M}^\kappa_j(E_n)\| = \|\psi, \widetilde{W}^{r_{j\kappa}}_{2,\gamma}(E_n)\| +$$

$$+ \sup_{\sigma>\gamma} \sum_{|q| \leq N_j} \left\| |\tau|^{2\ell-\ell_j} \|\psi(\tau,x)x^q, L_1(E_{n-1})\|, L_2(E_1)\right\| < \infty.$$

Определим подпространства $\mathcal{L}^1_j(E_n) \subseteq \mathcal{M}^1_j(E_n)$, $\mathcal{L}^2_j(E_n) \subset \mathcal{M}^2_j(E_n)$:

при $\frac{|\alpha|}{2} > \beta_j + \frac{\alpha_n}{2}$ положим $\mathcal{L}^\kappa_j(E_n) = \mathcal{M}^\kappa_j(E_n)$, $\kappa = 1,2$,

при $\frac{|\alpha|}{2} + N_j\alpha_{min} > \beta_j + \frac{\alpha_n}{2}$ функция $\psi(\tau,x) \in \mathcal{L}^\kappa_j(E_n)$, если

$\psi \in \mathfrak{M}_j^{\kappa}(E_n)$ и

$$\int_{E_{n-1}} x^s \psi(\tau, x)\,dx = 0, \quad 0 \leq |s| \leq N_j - 1.$$

Теорема 1. Пусть операторы $L(\bar{x}^0; D_{x_0}, D_{\bar{x}})$, $B_j(D_{x_0}, D_{\bar{x}})$, $j = 1, \ldots, \mu$, удовлетворяют условиям 1) - 5) ($\bar{x}^0$ - фиксированная точка). Если

$$L_{x_0 \to \tau} f(x_0, x, x_n) \in \mathcal{L}_0(E^+_{n+1}), \; L_{x_0 \to \tau} \varphi_j(x_0, x) \in \mathcal{L}^1_j(E_n),$$

то смешанная задача (1) для уравнения с постоянными коэффициентами $L(\bar{x}^0; D_{x_0}, D_{\bar{x}})u = f$ имеет единственное решение $u = \mathcal{Q}(\bar{x}^0)f + \sum_1^{\mu} \mathcal{Q}_j(\bar{x}^0)\varphi_j \in W^{2/\alpha}_{2,\gamma}(E^{+,+}_{n+1})$, причем выполнена оценка:

$$\|u, W^{2/\alpha}_{2,\gamma}\| \leq c(\gamma)\left[\|L_{x_0 \to \tau} f, \mathfrak{M}_0\| + \sum_1^{\mu} \|L_{x_0 \to \tau}\varphi_j, \mathfrak{M}^1_j\|\right],$$

где константа $c(\gamma)$ зависит от γ.

Теорема 2. Пусть операторы $L(\bar{x}; D_{x_0}, D_{\bar{x}})$, $B_j(D_{x_0}, D_{\bar{x}})$, $j = 1, \ldots, \mu$, удовлетворяют условиям 1) - 5), коэффициенты оператора $L(\bar{x}; D_{x_0}, D_{\bar{x}})$ гладкие, достаточно мало отличаются от постоянных и стабилизируются вне компакта $K \subset E^+_n$. Если $\frac{|\alpha|}{2} > 1$ и

$$L_{x_0 \to \tau} f(x_0, x, x_n) \in \mathfrak{M}_0(E^+_{n+1}), \quad L_{x_0 \to \tau}\varphi_j(x_0, x) \in \mathfrak{M}^2_j(E_n), \quad j = 1, \ldots, \mu,$$

то смешанная задача (1) имеет единственное решение $u \in W^{2/\alpha}_{2,\gamma}(E^{+,+}_{n+1})$, причем выполнена оценка:

$$\|u, W^{2/\alpha}_{2,\gamma}\| \leq c(\gamma, K)\left[\|L_{x_0 \to \tau} f, \mathfrak{M}_0\| + \sum_1^{\mu} \|L_{x_0 \to \tau}\varphi_j, \mathfrak{M}^2_j\|\right].$$

Если $\frac{|\alpha|}{2} \leq 1$, $L_{x_0 \to \tau} f(x_0, x, x_n) \in \mathfrak{M}_0(E^+_{n+1})$,

$$L_{x_0 \to \tau}\varphi_j(x_0, x) \in \mathcal{L}^2_j(E_n)$$

и выполнено условие:

при $\frac{|\alpha|}{2} + N\alpha_{min} > 1 \geq \frac{|\alpha|}{2} + (N-1)\alpha_{min}$ справедливо

$$\int\limits_{E_{n-1}} x^s\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(-\Delta L(\bar{x})\circ Q(\bar{x}^\circ)\right)^\ell\right)\left(f-\sum_1^{\mu}\Delta L(\bar{x})Q_j(\bar{x}^\circ)\varphi_j\right)dx = 0,$$

$0\le |s|\le N-1$, где $\Delta L(\bar{x}) = L(\bar{x}; D_{x_0}, D_{\bar{x}}) - L(\bar{x}^\circ; D_{x_0}, D_{\bar{x}})$, $\bar{x}^\circ \notin K$, тогда смешанная задача (1) также имеет единственное решение $u\in W_{2,\gamma}^{2/\alpha}(E_{n+1}^{+,+})$ и выполнена аналогичная оценка (константа $C(\gamma,K)$ зависит от γ и $diam\, K$).

§ 2. Решение задачи (1) для уравнений с постоянными коэффициентами

Здесь мы будем рассматривать краевую задачу с параметром τ, $Re\,\tau>\gamma$, для уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} &L(\tau, D_x, D_{x_n})v = g(\tau, x, x_n), \quad x_n>0, \\ &B_j(\tau, D_x, D_{x_n})v\big|_{x_n=0} = \psi_j(\tau,x), \quad j=1,\dots,\mu, \end{aligned} \tag{2}$$

где операторы $L(\tau, D_x, D_{x_n})$ и $B_j(\tau, D_x, D_{x_n})$ получены из операторов $L(\bar{x}^\circ; D_{x_0}, D_x, D_{x_n})$ и $B_j(D_{x_0}, D_x, D_{x_n})$ формальной заменой производной D_{x_0} на параметр τ.

Теорема 1°. Пусть операторы $L(\bar{x}^\circ; D_{x_0}, D_{\bar{x}})$ и $B_j(D_{x_0}, D_{\bar{x}})$, $j=1,\dots,\mu$, удовлетворяют условиям 1) - 5). Если $g\in \mathcal{L}_0(E_{n+1}^{+})$, $\psi_j\in\mathcal{L}_j^1(E_n)$, то краевая задача (2) имеет единственное решение $v\in \widetilde{W}_{2,\gamma}^{2/\alpha}$, причем выполнена оценка:

$$\|v, \widetilde{W}_{2,\gamma}^{2/\alpha}\| \le C(\gamma)\left[\|g, \mathfrak{M}_0\| + \sum_1^{\mu}\|\psi_j, \mathfrak{M}_j^1\|\right],$$

где константа $C(\gamma)>0$ зависит от γ.

Следствие. Отсюда и из обобщенной теоремы Пэли-Винера получаем утверждение теоремы 1.

Решение краевой задачи (2) построим в явном виде, используя представление функций $f\in L_p(E_{n-1})$ из работы [11]

$$f(x) = \lim_{h\to 0}(2\pi)^{-n+1}\int\limits_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1}\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi}G(\xi)f(y)\,d\xi\,dy\,d\sigma, \tag{3}$$

где $G(\xi) = N|\xi|^N e^{-|\xi|^N}$, $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^{2/\alpha_i}$, N - достаточно большое, а равенство (3) понимается в смысле L_p;

По условию 5) , $det(b_{jk}(\tau,\xi)) \neq 0$ при $|\xi| = 1$, $Re\,\tau \geq \gamma$
Обозначим элементы обратной матрицы через $b^{ip}(\tau,\xi)$. Положим

$$M^+(\tau,\xi',\lambda) = \prod_1^{\mu}(\lambda - \lambda_k^+(\tau,\xi')) = \sum_{k=0}^{\mu} a_k(\tau,\xi')\lambda^k,$$

$$M_j^+(\tau,\xi',\lambda) = \sum_{k=0}^{j} a_k(\tau,\xi')\lambda^{j-k}, \quad j=0,\dots,\mu-1,$$

$$N_k(\tau,\xi',\lambda) = \sum_{k=1}^{\mu} b^{jk}(\tau,\xi')M^+_{\mu-j}(\tau,\xi',\lambda),$$

где $\xi' = (\xi'_1,\dots,\xi'_{n-1})$, $\xi'_k = \dfrac{\xi_k}{|\xi|^{\alpha_k}}$, $Re\,\tau \geq \gamma$. . Из условий 1) - 5) следует, что коэффициенты $a_k(\tau,\xi)$ и $b^{jk}(\tau,\xi)$ равномерно ограничены при $|\xi|=1$, $Re\,\tau \geq \gamma$. Положим

$$J_j(\tau,\xi',x_n) = \frac{1}{P^{m_j}(\tau)2\pi i}\int_{\Gamma^+} e^{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\frac{N_j(\tau,\xi',\lambda)}{M^+(\tau,\xi',\lambda)}\,d\lambda,$$

$$J^+(\tau,\xi',x_n) = \frac{1}{P_m(\tau)2\pi}\int_{\Gamma^+}\frac{e^{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}}}{\tilde{L}(\tau,i\xi',\lambda)}\,d\lambda, \qquad (4)$$

$$J^-(\tau,\xi',\lambda) = \frac{1}{P_m(\tau)2\pi}\int_{\Gamma^-}\frac{e^{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}}}{\tilde{L}(\tau,i\xi',\lambda)}\,d\lambda,$$

где $\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda) \equiv (i\lambda)^m + \sum_{k=0}^{m-1}(i\lambda)^k L_k\left(\tau,\dfrac{i\xi}{|\xi|^{\alpha}}\right)\Big/P_m(\tau)$:
$Re\,\tau > \gamma$, контур $\Gamma^+(\Gamma^-)$ охватывает корни λ_k^+ (λ_k^-) . Из условий 1), 2) , 4), 5) и из подготовительной теоремы Вейерштрасса следует, что интегралы $J_j(\tau,\xi',x_n)$, $J^+(\tau,\xi',x_n)$, $J^-(\tau,\xi',x_n)$ голоморфны по τ, $Re\,\tau > \gamma$.

Лемма 1.1. Пусть выполнены условия 1) - 5) . Тогда имеют место оценки:

$$|J_j| \leq \frac{c(\gamma)}{|P^{m_j}(\tau)|}e^{-\delta x_n|\xi|^{\alpha_n}}, \quad j=1,\dots,\mu, \qquad (5)$$

$$|\mathcal{J}^+| \leq \frac{C(\gamma)}{|P_m(\tau)|} e^{-\delta x_n |\xi|^{\alpha_n}}, \quad |\mathcal{J}^-| \leq \frac{C(\gamma)}{|P_m(\tau)|} e^{\delta x_n |\xi|^{\alpha_n}},$$

где константы $\delta = \delta(\gamma) > 0$ и $C(\gamma) > 0$ зависят от γ.

Доказательство. Из условий 1), 3), 4) следует, что существует константа $\delta > 0$, зависящая от γ и такая, что $\mathcal{J}m\,\lambda_k^+ > \delta$, $\mathcal{J}m\,\lambda_k^- < -\delta$. Тогда в качестве контура Γ^+ можно взять границу области $\{|\lambda| \leq R,\ \mathcal{J}m\,\lambda \geq \frac{\delta}{2}\}$, а в качестве контура Γ^- границу области $\{|\lambda| \leq R,\ \mathcal{J}m\,\lambda \leq -\frac{\delta}{2}\}$. Поэтому оценки (5) вытекают из ограниченности коэффициентов $a_k(\tau, \xi'), b^{jk}(\tau, \xi')$.

Определим оператор

$$(R_0^h + R_\infty^h)g = (2\pi)^{1-n} \int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n} \int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi) \times$$

$$\times |\xi|^{\alpha_n - 1} \mathcal{J}^+\left(\tau, \xi', \frac{x_n - y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right) g(\tau, y, y_n)\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n +$$

$$+ (2\pi)^{1-n} \int_\infty^{x_n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n} \int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n-1} \times$$

$$\times \mathcal{J}^-\left(\tau, \xi', \frac{x_n - y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right) g(\tau, y, y_n)\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n . \tag{6}$$

Лемма 1.2. Пусть $g(\tau, x, x_n) \in L_{2,\gamma}(E_{n+1}^+)$. Тогда

$$\| L(\tau, D_x, D_{x_n})(R_0^h + R_\infty^h)g - g,\ L_{2,\gamma} \| \longrightarrow 0, \qquad h \longrightarrow 0, \tag{7}$$

Доказательство. Прибавляя и вычитая в (6) выражение:

$$(2\pi)^{1-n} \int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n} \int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n-1} \times$$

$$\times \mathcal{J}^-\left(\tau, \xi', \frac{x_n - y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right) g(\tau, y, y_n)\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n ,$$

получаем

$$(R_0^h + R_\infty^n)g = (2\pi)^{1-n} \int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n} \int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} \times$$

$$\times G(\xi)\frac{|\xi|^{\alpha_n-1}}{P_m(\tau)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma=\Gamma^+\cup\Gamma^-} e^{i\left(\frac{x_n-y_n}{v^{\alpha_n}}\right)\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\frac{1}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda g d\xi dy dv dy_n -$$

$$-(2\pi)^{1-n}\int\limits_0^\infty\int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-\alpha_n}\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n-1}\times$$

$$\times \mathcal{J}^-\left(\tau,\xi',\frac{x_n-y_n}{v^{\alpha_n}}\right) g d\xi dy dv dy_n = V_h^1 + V_h^2 .$$

Очевидно, $L v_h^2 = 0$.

Следовательно,

$$L(\tau,D_x,D_{x_n})\left[R_0^h + R_\infty^h\right]g = L(\tau,D_x,D_{x_n})(V_h^1+V_h^2) =$$

$$= L(\tau,D_x,D_{x_n})V_h^1 = \left(D_{x_n}^m + \sum_{k=0}^{m-1} D_{x_n}^k L_k(\tau,D_x)/P_m(\tau)\right)(2\pi)^{1-n}\times$$

$$\times\int\limits_0^{x_n}\int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-\alpha_n}\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma=\Gamma^+\cup\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{v^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}}\times$$

$$\times\frac{1}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda g(\tau,y,y_n)d\xi dy dv dy_n =$$

$$= \left(D_{x_n}^m + \sum_{k=0}^{m-1} D_{x_n}^k \tilde{L}_k(\tau,D_x)\right)\tilde{V}_h^1 . \qquad (8)$$

При $k=1$ имеем

$$D_{x_n}^1\tilde{L}_1(\tau,D_x)\tilde{V}_h^1 = (2\pi)^{1-n}\int\limits_0^{x_n}\int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-\alpha_n-1}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right)\xi}\times$$

$$\times G(\xi)|\xi|^{\alpha_n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma e^{i\frac{(x_n-y_n)\lambda}{v^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}}\frac{(i\lambda)^1\tilde{L}_1(\tau,i\xi')}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda\times$$

$$\times g(\tau, y, y_n)\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n + (2\pi)^{1-n} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} \times$$

$$\times G(\xi)|\xi|^{\alpha_n-1} \tilde{L}_1\left(\tau, \frac{i\xi}{\sigma^\alpha}\right) \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{1}{\tilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda\, g(\tau, y, y_n)\, d\xi\, dy\, d\sigma.$$

Докажем, что последнее слагаемое тождественно равно нулю. Оценим контурный интеграл

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{1}{\tilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda .$$

Поскольку контур Γ охватывает все корни уравнения $\tilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)=0$, то значение интеграла J' не изменится, если контур Γ заменить окружностью C_R, сколь угодно большого радиуса R и охватывающую Γ. Следовательно,

$$|J_1| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \frac{1}{\tilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda \right| \leq \sup_{|\lambda|=R} \frac{R}{|\tilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)|} =$$

$$= \sup_{|\lambda|=R} \frac{R}{\prod_1^m |\lambda - \lambda_k(\tau, \xi')|} \leq \frac{R}{\prod_1^m \big|R - |\lambda_k|\big|} \longrightarrow 0$$

при $R \to \infty$ (в силу ограниченности корней $\lambda_k(\tau, \xi')$).

Рассмотрим случай $k=2$ (если $m>2$). В силу предыдущего, имеем

$$D_{x_n}^2 \tilde{L}_2(\tau, D_x)\tilde{v}_h' = (2\pi)^{1-n} \int_0^{x_n} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-1} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi) \times$$

$$\times |\xi|^{\alpha_n} \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}} \frac{(i\lambda)^2 \tilde{L}_2(\tau, i\xi')}{\tilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda\, g(\tau, y, y_n)\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n +$$

$$+ (2\pi)^{1-n} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n-1} \tilde{L}_2\left(\tau, \frac{i\xi}{\sigma^\alpha}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{1}{\tilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} \frac{(i\lambda)|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}} d\lambda\, g(\tau, y, y_n)\, d\xi\, dy\, d\sigma .$$

Последнее слагаемое также тождественно равно нулю, поскольку

$$|J_2| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_R}\frac{i\lambda}{L(\tau,i\xi',i\lambda)}\,d\lambda\right| \leq \sup_{|\lambda|=R}\frac{R^2}{\prod\limits_1^m|\lambda-\lambda_\kappa(\tau,\xi')|} \leq$$

$$\leq \frac{R^2}{\prod\limits_1^m\big|R-|\lambda_\kappa|\big|} \longrightarrow 0 \quad \text{при } R\longrightarrow\infty.$$

Аналогично получаем и в случае $\kappa \leq m-1$:

$$D^\kappa_{x_n}\widetilde{L}_\kappa(\tau,D_x)\widetilde{V}_h' = (2\pi)^{1-n}\int\limits_0^{x_n}\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-1}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi}\times$$

$$\times G(\xi)|\xi|^{\alpha_n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}}\frac{(i\lambda)^\kappa\widetilde{L}_\kappa(\tau,i\xi')}{\widetilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}\,d\lambda\times$$

$$\times g(\tau,y,y_n)\,d\xi\,dy\,dy_n\,d\sigma.$$

Рассмотрим теперь случай $\kappa = m$. Имеем

$$D^m_{x_n}\widetilde{V}_h' = (2\pi)^{1-n}\int\limits_0^{x_n}\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-1}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi}G(\xi)|\xi|^{\alpha_n}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}}\frac{(i\lambda)^m}{\widetilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}\,d\lambda\, g(\tau,y,y_n)\,d\xi\,dy\,d\sigma\,dy_n +$$

$$+(2\pi)^{1-n}\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi}G(\xi)\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma\frac{(i\lambda)^{m-1}}{\widetilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}\,d\lambda\times$$

$$\times g(\tau,y,y_n)\,d\xi\,dy\,d\sigma.$$

Рассмотрим контурный интеграл

$$J_m = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma\frac{(i\lambda)^{m-1}}{(i\lambda)^m+\sum\limits_0^{m-1}(i\lambda)^\kappa\widetilde{L}_\kappa(\tau,i\xi')}\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{d\lambda}{\lambda} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\sum\limits_{0}^{m-1} c_\kappa \lambda^\kappa}{\lambda\left(\lambda^m+\sum\limits_{0}^{m-1} c_\kappa\lambda^\kappa\right)}d\lambda = 1-\sum_{\kappa=0}^{m-1} c_\kappa\cdot 0 = 1.$$

Следовательно, при $\kappa = m$ имеем

$$D^m_{x_n}\tilde{V}^1_h = (2\pi)^{1-n}\int\limits_0^{x_n}\int\limits_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-1}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)\times$$

$$\times\frac{|\xi|^{\alpha_n}}{2\pi}\int\limits_\Gamma e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\frac{(i\lambda)^m}{\tilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)}d\lambda\, g(\tau,y,y_n)\,d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n +$$

$$+(2\pi)^{1-n}\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)g(\tau,y,x_n)\,d\xi\, dy\, d\sigma.$$

Суммируя вышеизложенное, получаем

$$L(\tau,D_{x'},D_{x_n})V^1_h - D^m_{x_n}\tilde{V}^1_h + \sum_{\kappa=0}^{m-1} D^\kappa_{x_n}\tilde{L}_\kappa(\tau,D_x)\tilde{V}^1_h -$$

$$=(2\pi)^{1-n}\int\limits_0^{x_n}\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-1}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)\frac{|\xi|^{\alpha_n}}{2\pi}g(\tau,y,y_n)\times$$

$$\times\int\limits_\Gamma e^{i\left(\frac{x_n-y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\frac{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n + \int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1}\times$$

$$\times\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)g(\tau,y,x_n)\,d\xi\, dy\, d\sigma =$$

$$=\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)g(\tau,y,x_n)\,d\xi\, dy\, d\sigma.$$

Следовательно, из (3) и (8) получаем (7). Лемма доказана.

Лемма 1.3. Если $g\in\mathcal{L}_0(E^+_{n+1})$, то имеет место оценка

$$\|(R_0^h+R_\infty^h)g,\ \widetilde{W}_{2,\gamma}^{2/\alpha}\| \leq c(\gamma)\|g,\ \mathfrak{M}_0\| \tag{9}$$

и

$$\|(R_0^{h_1}+R_\infty^{h_1})g-(R_0^{h_2}+R_\infty^{h_2})g,\ \widetilde{W}_{2,\gamma}^{2/\alpha}\| \longrightarrow 0, \tag{10}$$

$h_1, h_2 \longrightarrow 0.$

Доказательство. Нужно оценить выражения

$$I_\nu = \left(\int_{E_1}\int_{E_{n-1}}\int_0^\infty |\tau|^{2\nu_0}|D_x^\nu D_{x_n}^{\nu_n}(R_0^h+R_\infty^h)g|^2 dx_n dx d\eta\right)^{1/2},$$

$$\nu_0\ell^{-1} + \nu\alpha + \nu_n\alpha_n = 2.$$

Рассмотрим сначала случай $\nu_n < m = \frac{1}{\alpha_n}$. Прибавим и вычтем выражение

$$\int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-\nu\alpha}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)\frac{(i\xi)^\nu|\xi|^{\alpha_n-1}}{P_m(\tau)\cdot 2\pi} \times$$

$$\times\int_{\Gamma^-} e^{i\left(\frac{x_n-y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\lambda|\xi|^{\alpha_n}} \frac{1}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)} d\lambda g(\tau,y,y_n)d\xi dy d\sigma dy_n,$$

тогда имеем

$$I_\nu = \||\tau|^{\nu_0}\left[D_{x_n}^{\nu_n}\int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-\nu\alpha}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)(i\xi)^\nu|\xi|^{\alpha_n-1} \times\right.$$

$$\times\frac{1}{P_m(\tau)}\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma=\Gamma^+\cup\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}} \frac{1}{\tilde{L}(x,i\xi',i\lambda)} d\lambda g d\xi dy d\sigma dy_n +$$

$$+\int_\infty^0\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-\nu\alpha-\nu_n\alpha_n}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)(i\xi)^\nu \times$$

$$\times \frac{|\xi|^{\alpha_n-1+\nu_n\alpha_n}}{P_m(\tau)\,2\pi}\int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}} \frac{(i\lambda)^{\nu_n}}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}\,d\lambda g\,d\xi\,dy\,d\sigma\,dy_n\Big], L_2\Big\| =$$

(используя, как в лемме 1.2, $\int_{\Gamma} \frac{(i\lambda)^{\kappa}}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}\,d\lambda \equiv 0,\ \kappa < m-2$, получаем)

$$=\Big\||\tau|^{\nu_0}\Big[\int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-\nu\alpha-\nu_n\alpha_n}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right)\xi}\,G(\xi)(i\xi)^{\nu}\times$$

$$\times|\xi|^{\alpha_n-1+\nu_n\alpha_n}\frac{1}{P_m(\tau)\,2\pi}\int_{\Gamma} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}}\frac{(i\lambda)^{\nu_n}}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}\,d\lambda\times$$

$$\times g\,d\xi\,dy\,d\sigma\,dy_n + \int_{\infty}^{0}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-\nu\alpha-\nu_n\alpha_n}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right)\xi}\,G(\xi)\times$$

$$\times(i\xi)^{\nu}\frac{|\xi|^{\alpha_n-1+\nu_n\alpha_n}}{P_m(\tau)\,2\pi}\int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}}\frac{(i\lambda)^{\nu_n}}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}\,d\lambda g\,d\xi\,dy\,d\sigma\,dy_n\Big], L_2\Big\| =$$

$$=\Big\||\tau|^{\nu_0}\Big[\int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-\nu\alpha-\nu_n\alpha_n}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right)\xi}\,G(\xi)(i\xi)^{\nu}|\xi|^{\alpha_n-1+\nu_n\alpha_n}\times$$

$$\times\frac{1}{P_m(\tau)2\pi}\int_{\Gamma^+} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}}\frac{(i\lambda)^{\nu_n}}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}\,d\lambda g\,d\xi\,dy\,d\sigma\,dy_n +$$

$$+\int_{\infty}^{x_n}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-\nu\alpha-\nu_n\alpha_n}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right)\xi}\,G(\xi)(i\xi)^{\nu}|\xi|^{\alpha_n-1+\nu_n\alpha_n}\times$$

$$\times\frac{1}{P_m(\tau)\,2\pi}\int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}}\frac{(i\lambda)^{\kappa}}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}\,d\lambda g\,d\xi\,dy\,d\sigma\,dy_n\Big], L_2\Big\| \leq$$

(используя равенство Парсеваля в $L_2(E_{n-1})$, получаем)

$$\leq \left\| |\tau|^{\nu_0} \int_0^{x_n} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-\alpha_n-\nu\alpha-\nu_n\alpha_n} G(\xi)(i\xi)^{\nu} \frac{|\xi|^{\alpha_n-1+\nu_n\alpha_n}}{P_m(\tau)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}} \frac{(i\lambda)^{\nu_n}}{\widetilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda \hat{g}\left(\tau, \frac{\xi}{\sigma^{\alpha}}, y_n\right) d\sigma dy_n, L_2(E_{n+1}^+) \right\| +$$

$$+ \left\| |\tau|^{\nu_0} \int_{\infty}^{x_n} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-\alpha_n-\nu\alpha-\nu_n\alpha_n} G(\xi)(i\xi)^{\nu} \frac{|\xi|^{\alpha_n-1+\nu_n\alpha_n}}{P_m(\tau)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}} \frac{(i\lambda)^{\nu_n}}{\widetilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda \hat{g}\left(\tau, \frac{\xi}{\sigma^{\alpha}}, y_n\right) d\sigma dy_n, L_2(E_{n+1}^+) \right\| \leq$$

(используя оценки контурных интегралов (5) , имеем)

$$\leq c(y) \left\| |\tau|^{\nu_0} \int_0^{x_n} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-\alpha_n-1+\nu_0 \ell^{-1}-1} G(\xi) \frac{|\xi|^{\alpha_n-\nu_0\ell^{-1}+1}}{|P_m(\tau)|} \times \right.$$

$$\left. \times e^{-\frac{\delta(x_n-y_n)|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}} \hat{g}\left(\tau, \frac{\xi}{\sigma^{\alpha}}, y_n\right) d\sigma dy_n, L_2(E_{n+1}^+) \right\| +$$

$$+ c(y) \left\| \frac{|\tau|^{\nu_0}}{|P_m(\tau)|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\xi\sigma^{\alpha}) |\xi|^{\alpha_n-\nu_0\ell^{-1}+1} e^{\delta(x_n-y_n)|\xi|^{\alpha_n}} \times \right.$$

$$\left. \times \chi(y_n - x_n)\chi(y_n)\hat{g}(\tau, \xi, y_n) d\sigma dy_n, L_2(E_n) \right\| \leq$$

(используя характеристическую функцию $\chi(y_n) = \begin{cases} 1, & y_n \geq 0, \\ 0, & y_n < 0, \end{cases}$ и замену ξ на ξ/σ^{α}, получаем)

$$= c(y) \left\| \frac{|\tau|^{\nu_0}}{|P_m(\tau)|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\xi\sigma^{\alpha}) |\xi|^{\alpha_n-\nu_0\ell^{-1}+1} e^{-\delta(x_n-y_n)|\xi|^{\alpha_n}} \times \right.$$

$$\times \hat{g}(\tau,\xi,y_n)\,d\sigma\,\chi(x_n-y_n)\chi(y_n)\,dy_n\,,\ L_2(E_{n+1})\| +$$

$$+c(y)\Big\| \frac{|\tau|^{\nu_0}}{|P_m(\tau)|}\int_{-\infty}^{\infty}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1}G(\xi\sigma^{\alpha})|\xi|^{\alpha_n-\nu_0\ell^{-1}+1}e^{\delta(x_n-y_n)}|\xi|^{\alpha_n}\times$$

$$\times\chi(y_n-x_n)\chi(y_n)\hat{g}(\tau,\xi,y_n)\,d\sigma\,dy_n\,,\ L_2(E^-_{n+1})\| \leqslant$$

(применяя неравенство Юнга $\|\int_{E_1} f(x-y)\varphi(y)dy, L_2(E_1)\| \leqslant \|f, L_1(E_1)\| \times \|\varphi, L_2(E_1)\|$, и, как следует из условия 1), $\dfrac{|\tau|^{\nu_0}}{|P_m(\tau)|} \leqslant C'(y)|\tau|^{\nu_0-\ell}$, имеем)

$$\leqslant \tilde{C}(y)\Big\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta y_n|\xi|^{\alpha_n}}|\tau|^{\nu_0-\ell}\chi(y_n)dy_n\Big\|\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}G(\xi\sigma^{\alpha})|\xi|^{\alpha_n-\nu_0\ell^{-1}+1}d\sigma\,\times$$

$$\times\chi(x_n)\hat{g}(\tau,\xi,x_n),\,L_2(E_1)\Big\|,\,L_2(E_n)\Big\| +$$

$$+\tilde{c}(y)\Big\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta y_n|\xi|^{\alpha_n}}|\tau|^{\nu_0-\ell}\chi(-y_n)dy_n\Big\|\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}G(\xi\sigma^{\alpha})|\xi|^{\alpha_n-\nu_0\ell^{-1}+1}d\sigma\,\times$$

$$\times\chi(x_n)\hat{g}(\tau,\xi,x_n),\,L_2(E_1)\|,\,L_2(E_n)\| =$$

(вычисляя интегралы и заменяя ξ на ξ/σ^{α}, получаем)

$$=c'(y)\Big\||\tau|^{\nu_0-\ell}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-2+\nu_0\ell^{-1}}G(\xi)|\xi|^{1-\nu_0\ell^{-1}}\hat{g}\Big(\tau,\frac{\xi}{\sigma^{\alpha}},x_n\Big)d\sigma,\,L_2(E^+_{n+1})\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant c'(y)\Big\||\tau|^{\nu_0-\ell}\int_h^{1}\sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-2+\nu_0\ell^{-1}}G(\xi)|\xi|^{1-\nu_0\ell^{-1}}\hat{g}\Big(\tau,\frac{\xi}{\sigma^{\alpha}},x_n\Big)d\sigma,\,L_2(E^+_{n+1})\Big\| +$$

$$+c(y)\Big\| |\tau|^{\nu_0-\ell}\int_1^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-2+\nu_0\ell^{-1}} G(\xi)|\xi|^{1-\nu_0\ell^{-1}}\hat{g}\left(\tau,\frac{\xi}{\sigma^{\alpha}},x_n\right)d\sigma, L_2\Big\| = I^1+I^2.$$

Если $\nu_0>\ell$, то

$$I^1\leq c'(y)\int_h^1 \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-2+\nu_0\ell^{-1}}\Big\||\tau|^{\nu_0-\ell}G(\xi)|\xi|^{1-\nu_0\ell^{-1}}\hat{g}\left(\tau,\frac{\xi}{\sigma^{\alpha}},x_n\right), L_2(E^+_{n+1})\Big\|\leq$$

$$\leq c'(y)\int_h^1 \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-2+\nu_0\ell^{-1}}\Big\|\hat{g}\left(\tau,\frac{\xi}{\sigma^{\alpha}},x_n\right)|\tau|^{\nu_0-\ell}, L_2(E^+_{n+1})\Big\|d\sigma=$$

$$=c'(y)\int_h^1 \sigma^{-2+\nu_0\ell^{-1}}d\sigma\,\big\|\hat{g}(\tau,\xi,x_n)|\tau|^{\nu_0-\ell}, L_2(E^+_{n+1})\big\|.$$

Если $\nu_0\leq\ell$, то

$$I^1\leq c(y)\Big\|\int_h^1 \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-2+\nu_0\ell^{-1}} G(\xi)|\xi|^{1-\nu_0\ell^{-1}}\hat{g}\left(\tau,\frac{\xi}{\sigma^{\alpha}},x_n\right)d\sigma, L_2\Big\|=$$

$$=c(y)\Big\|\int_h^1 \sigma^{-1}G(\xi\sigma^{\alpha})d\sigma|\xi|^{1-\nu_0\ell^{-1}}\hat{g}(\tau,\xi,x_n), L_2\Big\|\leq c(y)\|g,\tilde{W}^{1/\alpha}_{2,y}\|.$$

Оценивая I^2 , достаточно рассмотреть случай $\nu_0=2\ell$.
Если $\frac{|\alpha|}{2}>1$, то

$$I^2\leq c'(y)\int_1^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}}\Big\||\tau|^{\ell}G(\xi)|\xi|^{-1}\hat{g}\left(\tau,\frac{\xi}{\sigma^{\alpha}},x_n\right), L_2(E^+_{n+1})\Big\|d\sigma\leq$$

$$\leq c'(y)\int_1^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}}d\sigma\,\Big\||\tau|^{\ell}\int_{E_{n-1}}|g(\tau,x,x_n)|dx, L_2(E^+_2)\Big\|.$$

Если $\frac{|\alpha|}{2}+N\alpha_{min}>1\geq\frac{|\alpha|}{2}+(N-1)\alpha_{min}$, $N\geq 1$,

и $\displaystyle\int_{E_{n-1}} g(\tau,x,x_n)x^s dx=0$, $0\leq|s|\leq N-1$,

то

$$I^2\leq c'(y)\int_1^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}}\||\tau|^{\ell}G(\xi)|\xi|^{-1}\int_{E_{n-1}}\prod_{k=1}^{N}\left|\frac{\xi_{i_k}}{\sigma^{\alpha_{i_k}}}y_{i_k}\right|\times$$

$$\times |g(\tau, y, y_n)| dy, \; L_2(E_{n+1}^+) \| d\sigma \leq$$

$$\leq C''(\gamma) \int_1^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2} - N\alpha_{min}} d\sigma \left(\sum_{|q| \leq N} \| \| g(\tau, y, y_n) y^q, L_1(E_{n-1}) \| \times \right.$$

$$\left. \times |\tau|^{\ell}, \; L_2(E_2^+) \| \right).$$

Рассмотрим случай $\nu_n \geq m$, используя тождества, как в лемме 1.2:

$$\mathcal{J}_m = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{(i\lambda)^{m-1}}{\mathcal{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda \equiv 1, \quad \mathcal{J}_\kappa \equiv 0, \; \kappa < m.$$

Так же, как и в случае $\nu_n < m$, имеем при $\nu_n = m$

$$I_\nu = \Big\| D_{x_n}^m \int_0^{x_n} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha| - \alpha_n - \nu\alpha} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} \times$$

$$\times G(\xi) |\xi|^{\alpha_n - 1} \frac{(i\xi)^\nu |\tau|^{\nu_0}}{P_m(\tau) 2\pi} \int_{\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-} e^{\frac{i(x_n - y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}} |\xi|^{\alpha_n}} \frac{1}{\mathcal{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda g d\xi dy d\sigma dy_n +$$

$$+ \int_\infty^0 \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1-|\alpha| - \alpha_n - \nu\alpha} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi) \frac{|\xi|^{\alpha_n}}{P_m(\tau) 2\pi} (i\xi)^\nu |\tau|^{\nu_0} \times$$

$$\times \int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n - y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}} |\xi|^{\alpha_n}} \frac{(i\lambda)^m}{\mathcal{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda g d\xi dy d\sigma dy_n, \; L_2(E_{n+1}^+) \Big\| =$$

$$= \Big\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1-|\alpha| - \nu\alpha} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} (i\xi)^\nu G(\xi) g \, d\xi dy d\sigma \cdot |\tau|^{\nu_0} +$$

$$+\int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1-|\alpha|-\alpha_n-\nu\alpha}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n}\frac{(i\xi)^\nu|\tau|^{\nu_0}}{P_m(\tau)\,2\pi}\times$$

$$\times\int_\Gamma e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}}\frac{(i\lambda)^m}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda\, g\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n+$$

$$+\int_\infty^{0}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-\nu\alpha-1}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n}\frac{(i\xi)^\nu|\tau|^{\nu_0}}{P_m(\tau)\,2\pi}\times$$

$$\times\int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\frac{(i\lambda)^m}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda\, g\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n, L_2(E^+_{n+1})\| \leq$$

$$\leq\left\|\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1-\nu\alpha}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)(i\xi)^\nu g(\tau,y,x_n)|\tau|^{\nu_0}d\xi\, dy\, d\sigma, L_2\right\|+$$

$$+\left\||\tau|^{\nu_0}\int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-1-\nu\alpha}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)\frac{(i\xi)^\nu|\xi|^{\alpha_n}}{P_m(\tau)\,2\pi}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{\Gamma^+} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}}\frac{(i\lambda)^m}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda\, g\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n,\ L_2(E^+_{n+1})\right\|+$$

$$+\left\||\tau|^{\nu_0}\int_\infty^{x_n}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1-\alpha_n-\nu\alpha}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)\frac{(i\xi)^\nu|\xi|^{\alpha_n}}{P_m(\tau)\,2\pi}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\frac{(i\lambda)^m}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda\, g\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n,\ L_2(E^+_{n+1})\right\|.$$

Оценки второго и третьего слагаемых уже проведены. Оценка первого слагаемого очевидна.

Пусть теперь $\nu_n = m+1$. Имеем

$$I_\nu = \Big\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1-\nu\alpha} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} \times$$

$$\times (i\xi)^\nu G(\xi) D_{x_n} g(\tau, y, x_n)\, d\xi\, dy\, d\sigma\, |\tau|^{\nu_0} +$$

$$+ D_{x_n} \int_0^{x_n} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-1-\nu\alpha} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n} \frac{(i\xi)^\nu |\tau|^{\nu_0}}{P_m(\tau)\, 2\pi} \times$$

$$\times \int_\Gamma e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}} \frac{(i\lambda)^m}{L'(\tau, i\xi', i\lambda)}\, d\lambda\, g\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n +$$

$$+ \int_\infty^0 \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-\nu\alpha-1-\alpha_n} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{2\alpha_n} \frac{(i\xi)^\nu |\tau|^{\nu_0}}{P_m(\tau)\, 2\pi} \times$$

$$\times \int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}} \frac{(i\lambda)^{m-1}}{L(\tau, i\xi', i\lambda)}\, d\lambda\, g\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n,\ L_2(E^+_{n+1})\Big\| =$$

$$= \| I_1 + I_2 + I_3,\ L_2(E^-_{n+1}) \| \leq \| I_1,\ L_2(E^+_{n+1}) \| +$$

$$+ \| (I_2 + I_3),\ L_2(E^+_{n+1}) \|,$$

так как при $\nu_n = m+1$ выполняется $\nu\alpha + \nu_0 \ell^{-1} + \alpha_n = 1$, то, повторяя предыдущие рассуждения, получаем:

$$\| I_1, L_2(E^+_{n+1})\| \leq \| \int_h^1 \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2} - 1 - \nu\alpha} G(\xi)|\xi|^{\nu\alpha} |\tau|^{\nu_0} \times$$

$$\times D_{x_n} \hat{g}\left(\tau, \frac{\xi}{\sigma^\alpha}, x_n\right) d\sigma, L_2(E^+_{n+1})\| + \| \int_1^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2} - 1 - \nu\alpha} \times$$

$$\times G(\xi)|\xi|^{\nu\alpha} |\tau|^{\nu_0} D_{x_n} \hat{g}(\tau, \frac{\xi}{\sigma^\alpha}, x_n) d\sigma, L_2(E^+_{n+1})\| = \| \mathcal{J}^1 \| + \| \mathcal{J}^2 \| .$$

Оценка первого слагаемого очевидна. Оценивая второе слагаемое, достаточно рассмотреть случай $\nu_0 = \ell(1-\alpha_n)$, т.е. $\nu\alpha = 0$. Имеем

$$\| \mathcal{J}^2 \| = \| \int_1^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2} - 1} G(\xi)|\tau|^{\nu_0} D_{x_n} \hat{g}(\tau, \frac{\xi}{\sigma^\alpha}, x_n) d\sigma, L_2 \| =$$

$$= \| [e^{-|\xi|^N} - e^{-|\xi h^{-\alpha}|^N}] |\tau|^{\nu_0} D_{x_n} \hat{g}(\tau, \frac{\xi}{\sigma^\alpha}, x_n), L_2(E^+_{n+1})\| \leq$$

$$\leq c \| g, \widetilde{W}^{1/\alpha}_{2,\gamma}(E^+_{n+1})\|.$$

Отсюда $\| I_1, L_2(E^+_{n+1})\| \leq c \| g, \widetilde{W}^{1/\alpha}_{2,\gamma}(E^+_{n+1})\|$. Рассмотрим теперь

$$\| I_2 + I_3, L_2 \| =$$

$$= \| \int_0^{x_n} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha| - \alpha_n - 1 - \nu\alpha - \alpha_n} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{2\alpha_n} \times$$

$$\times \frac{(i\xi)^\nu |\tau|^{\nu_0}}{P_m(\tau) 2\pi} \int_\Gamma e^{\frac{i(x_n - y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}} \frac{(i\lambda)^{m+1}}{\tilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda g d\xi dy d\sigma dy_n +$$

$$+\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-1-\nu\alpha} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n} \frac{(i\xi)^{\nu}|\tau|^{\nu_0}}{P_m(\tau)2\pi} \times$$

$$\times \int_{\Gamma} \frac{(i\lambda)^m}{\widetilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda\, g(\tau, y, x_n) d\xi\, dy\, d\sigma + \int_{\infty}^{0}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1-|\alpha|-2\alpha_n-\nu\alpha} \times$$

$$\times \int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}} \frac{(i\lambda)^{m+1}}{\widetilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda\, g\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n,\ L_2(E^+_{n+1})\Big\| \leq$$

$$\leq \Big\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-1-\nu\alpha} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n} \frac{(i\xi)^{\nu}|\tau|^{\nu_0}}{P_m(\tau)2\pi} \times$$

$$\times \int_{\Gamma} \frac{(i\lambda)^m}{\widetilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda\, g(\tau, y, x_n) d\xi\, dy\, d\sigma,\ L_2(E^+_{n+1})\Big\| +$$

$$+ \Big\| \int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1-\nu\alpha-2\alpha_n} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{2\alpha_n} \frac{(i\xi)^{\nu}|\tau|^{\nu_0}}{P_m(\tau)2\pi} \times$$

$$\times \int_{\Gamma^+} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}} \frac{(i\lambda)^{m+1}}{\widetilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda\, g\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n,\ L_2(E^+_{n+1})\Big\| +$$

$$+ \Big\| \int_{\infty}^{x_n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1-\nu\alpha-2\alpha_n} \iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right)\xi} G(\xi)|\xi|^{2\alpha_n} \frac{(i\xi)^{\nu}|\tau|^{\nu_0}}{P_m(\tau)2\pi} \times$$

$$\times \int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}} \frac{(i\lambda)^{m+1}}{\widetilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda\, g\, d\xi\, dy\, d\sigma\, dy_n,\ L_2(E^+_{n+1})\Big\| =$$

$$= \| J_1, L_2\| + \| J_2, L_2\| + \| J_3, L_2\| .$$

Оценки интегралов $\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ уже проведены. Оценим интеграл $\mathcal{J}_1$, учитывая, что $|\mathcal{A}| = \left|\int_\Gamma \frac{(i\lambda)^m}{\Sigma(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda\right| \leq R < \infty$. Имеем $\|\mathcal{J}_1, L_2(E_n^+,)\| \leq$

(используя равенство Парсеваля и оценку $|\mathcal{A}|$, получаем)

$$\leq c\left\|\int_h^1 \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-1-\nu\alpha-\alpha_n} G(\xi)|\xi|^{\nu\alpha+\alpha_n} \frac{|\tau|^{\nu_0}}{|P_m(\tau)|} \hat{g}\left(\tau, \frac{\xi}{\sigma^\alpha}, x_n\right) d\sigma, L_2\right\| +$$

$$+ c\left\|\int_1^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-1-\nu\alpha-\alpha_n} G(\xi)|\xi|^{\nu\alpha+\alpha_n} \frac{|\tau|^{\nu_0}}{|P_m(\tau)|} \hat{g}\left(\tau, \frac{\xi}{\sigma^\alpha}, x_n\right) d\sigma, L_2\right\|.$$

Оценка второго интеграла очевидна, так как $|\tau|^{\nu_0} \leq c(\gamma)\,|P_m(\tau)|$. Оценивая первый интеграл, достаточно рассмотреть случай $\nu_0 = 0$:

$$\left\|\int_h^1 \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-1-\nu\alpha-\alpha_n} G(\xi)|\xi|^{\nu\alpha+\alpha_n} \frac{1}{|P_m(\tau)|} \hat{g}\left(\tau, \frac{\xi}{\sigma^\alpha}, x_n\right) d\sigma, L_2\right\| \leq$$

$$\leq c(\gamma)\left\|\int_h^1 \sigma^{-1} G(\xi\sigma^\alpha) d\sigma\, |\xi|^1 \hat{g}(\tau, \xi, x_n),\ L_2(E_{n+1}^+)\right\| \leq$$

$$\leq c(\gamma)\left\| g, \tilde{W}_{2,\gamma}^{1/\alpha}(E_{n+1}^+)\right\|.$$

Случай $\nu_n = m + k$, $k \leq m$ рассматривается аналогично.

Итак, суммируя вышесказанное, получаем оценку (9). Доказательство (10) проводится аналогично. Лемма доказана.

Определим оператор

$$(R_0 + R_\infty)g = \lim_{h\to 0}\,(R_0^h + R_\infty^h)\,g \tag{11}$$

(сходимость понимается в смысле $\tilde{W}_{2,\gamma}^{2/\alpha}$) . Область определения оператора $R_0 + R_\infty$ совпадает с $\mathcal{L}_0(E_{n+1}^+)$. Определим операторы

$$R_j^{h,\varepsilon} g = (2\pi)^{1-n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1+\beta_j} \int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha},\xi\right)} G(\xi)|\xi|^{-\beta_j} \times$$

$$\times \mathcal{J}_j\left(\tau,\xi',\frac{x_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\left[(2\pi)^{1-n}\int_0^{\infty}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}}\omega^{-|\alpha|-\alpha_n-\beta_j}\int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{y-z}{\omega^{\alpha}}\right)s}\times\right.$$

$$\times G(s)\frac{|s|^{\alpha_n-1+\beta_j}}{P_m(\tau)\,2\pi}\int_{\Gamma^-} e^{\frac{-iz_n\lambda|s|^{\alpha_n}}{\omega^{\alpha_n}}}\frac{B_j(\tau,is',i\lambda)}{\widetilde{L}(\tau,is',i\lambda)}\,d\lambda\times$$

$$\left.\times\, g(\tau,z,z_n)\,ds\,dz\,d\omega\,dz_n\right]d\xi\,dy\,d\sigma,\quad j=1,\ldots,\mu. \tag{12}$$

Лемма 1.4. Если функция $g\in\mathcal{L}_0(E^+_{n+1})$, то имеет место оценка:

$$\| R_j^{h,\varepsilon} g,\ \widetilde{W}^{2/\alpha}_{2,\gamma}\| \leqslant c(\gamma)\| g,\ \mathcal{M}_0(E^+_{n+1})\| \tag{13}$$

и

$$\| R_j^{h_1,\varepsilon_1} g - R_j^{h_2\,\varepsilon_2} g,\ \widetilde{W}^{2/\alpha}_{2,\gamma}\| \longrightarrow 0,\ h_i\longrightarrow 0,\ \varepsilon_i\longrightarrow 0,\ i=1,2. \tag{14}$$

Доказательство. Обозначив выражение, стоящее в квадратных скобках в (12) , через $g_j^{\varepsilon}(\tau,y)$, получаем

$$\Big\| |\tau|^{\nu_0}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1+\beta_j-\nu\alpha-\nu_n\alpha_n}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right)\xi}G(\xi)|\xi|^{-\beta_j+\nu_n\alpha_n}\times$$

$$\times\frac{(i\xi)^{\nu}}{P^{m_j}(\tau)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} e^{\frac{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}}\frac{(i\lambda)^{\nu_n}N_j(\tau,\xi',\lambda)}{M^+(\tau,\xi',\lambda)}d\lambda\, g_j^{\varepsilon}(\tau,y)\,d\xi\,dy\,d\sigma,\ L_2\Big\| \leqslant$$

(используя равенство Парсеваля в $L_2(E_{n-1})$ и заменяя ξ на $\frac{\xi}{\sigma^{\alpha}}$, получаем)

$$\leqslant \Big\| |\tau|^{\nu_0}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}G(\xi\sigma^{\alpha})|\xi|^{-\beta_j+\nu_n\alpha_n-\nu\alpha}\frac{1}{P^{m_j}(\tau)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} e^{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}}(i\lambda)^{\nu_n}\times$$

$$\times \frac{N_j(\tau, i\xi', i\lambda)}{M^+(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda \hat{g}_j^{\varepsilon}(\tau,\xi) d\sigma, L_2(E_{n+1}^+)\| =$$

(вычисляя преобразование Фурье $\hat{g}_j^{\varepsilon}(\tau,\xi)$, имеем)

$$= \Big\| |\tau|^{\nu_0} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\xi\sigma^{\alpha}) |\xi|^{-\beta_j+\nu_n\alpha_n+\nu\alpha} \frac{1}{P^{m_j}(\tau)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} e^{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}} (i\lambda)^{\nu_n} \times$$

$$\times \frac{N_j(\tau, i\xi', i\lambda)}{M^+(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda d\sigma \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} \omega^{-1} G(\xi\omega^{\alpha}) \frac{|\xi|^{\alpha_n-1+\beta_j}}{P_m(\tau)\cdot 2\pi} \int_{\Gamma^-} e^{-iz_n\tilde{\lambda}|\xi|^{\alpha_n}} \times$$

$$\times \frac{B_j(\tau, i\xi', i\tilde{\lambda})}{\tilde{L}(\tau, i\xi', i\tilde{\lambda})} d\tilde{\lambda} \hat{g}(\tau,\xi,z_n) d\omega dz_n, \; L_2(E_{n+1}^+)\Big\| =$$

$$= \Big\| \frac{|\tau|^{\nu_0}}{P_m(\tau)} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\xi\sigma^{\alpha}) |\xi|^{-\nu_0\ell^{-1}+\alpha_n+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} e^{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}} \times$$

$$\times (i\lambda)^{\nu_n} \frac{N_j(\tau, \xi', \lambda)}{M^+(\tau, \xi', \lambda)} d\lambda d\sigma \int_0^{\infty} \left(e^{-|\xi\varepsilon^{\alpha}|^N} - e^{-|\xi\varepsilon^{-\alpha}|^N}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} e^{-iz_n\tilde{\lambda}|\xi|^{\alpha_n}} \frac{B_j(\tau, i\xi', i\tilde{\lambda})}{P^{m_j}(\tau)\tilde{L}(\tau, i\xi', i\tilde{\lambda})} d\tilde{\lambda} \hat{g}(\tau,\xi,z_n) dz_n \; L_2\Big\| \leq$$

(учитывая оценки (5) и $|\tau|^{\nu_0}/|P_m(\tau)| \leq c'(\gamma)|\tau|^{\nu_0-\ell}$, получаем)

$$\leq c(\gamma) \Big\| |\tau|^{\nu_0-\ell} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\xi\sigma^{\alpha}) |\xi|^{1-\nu_0\ell^{-1}+\alpha_n} e^{-\delta x_n|\xi|^{\alpha_n}} d\sigma \times$$

$$\times \int_0^\infty \hat{g}(\tau, \xi, z_n) e^{-\delta|\xi|^{\alpha_n} z_n} dz_n ; L_2(E_{n+1}^+) \| \leq$$

$$\leq c(\gamma) \| \, |\tau|^{\nu_0 - \ell} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\xi \sigma^\alpha) |\xi|^{1-\nu_0 \ell^{-1} + \alpha_n} e^{-\delta x_n |\xi|^{\alpha_n}} d\sigma \times$$

$$\times \left(\int_0^\infty e^{-2\delta|\xi|^{\alpha_n} z_n} dz_n \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty |\hat{g}(\tau, \xi, z_n)|^2 dz_n \right)^{1/2}, L_2(E_{n+1}^+) \| =$$

$$= \tilde{c}(\gamma) \| \, |\tau|^{\nu_0 - \ell} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\xi \sigma^\alpha) |\xi|^{1-\nu_0 \ell^{-1}} \hat{g}(\tau, \xi, z_n) d\sigma, L_2(E_{n+1}^+) \| .$$

Оценка этого интеграла уже проводилась при доказательстве леммы 1.3. Лемма доказана.

Определим теперь операторы

$$R_j g = \lim_{h, \varepsilon \to 0} R_j^{h,\varepsilon} g, \quad j = 1, \dots, \mu \tag{15}$$

(сходимость понимается в смысле $\widetilde{W}_{2,\gamma}^{2/\alpha}$). Область определения оператора R_j совпадает с $\mathcal{L}_0(E_{n+1}^+)$.

Определим операторы

$$\widetilde{R}_j^h \psi_j = (2\pi)^{1-n} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha| - 1 + \beta_j} \int_{E_{n-1}} \int_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi) \times$$

$$\times |\xi|^{-\beta_j} J_j\left(\tau, \xi', \frac{x_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right) \psi_j(\tau, y) d\xi \, dy \, d\sigma, \quad j = 1, \dots, \mu . \tag{16}$$

Лемма 1.5. <u>Если</u> $\psi_j \in L_2$ <u>, то</u>

$$L(\tau, D_x, D_{x_n}) \widetilde{R}_j^h \psi_j = 0, \tag{17}$$

$$\left|B_j(\tau, D_x, D_{x_n}) \sum_{k=1}^{\mu} \tilde{R}_k^h \psi_k \right|_{x_n=0} - \psi_j, L_2 \Big| \longrightarrow 0, \tag{18}$$

$h \longrightarrow 0.$

Доказательство следует из того, что (см. [14])

$$B_j(\tau, i\xi', D_{x_n}) \mathcal{J}_k(\tau, \xi', x_n) \Big|_{x_n=0} = \delta_j^k , \tag{19}$$

и из интегрального представления (3)

Лемма 1.6. <u>Если</u> $\psi_j \in \mathcal{L}_j^1(E_n)$, <u>то имеет место оценка</u>

$$|\tilde{R}_j^h \psi_j, \tilde{W}_{2,\gamma}^{2/\alpha}| \leq c(\gamma) |\psi_j, \mathcal{M}_j^1| \tag{20}$$

<u>и</u>

$$|\tilde{R}_j^{h_1} \psi_j - \tilde{R}_j^{h_2} \psi_j, \tilde{W}_{2,\gamma}^{2/\alpha}| \longrightarrow 0, \tag{21}$$

$h_1, h_2 \longrightarrow 0.$

Доказательство. Оценки проводятся по той же схеме, как в работах [12,13] . Имеем

$$\| |\tau|^{\nu_0} D_x^{\nu} D_{x_n}^{\nu_n} \tilde{R}_j^h \psi_j , \ L_2(E_{n+1}^+) \| =$$

(применяя равенство Парсеваля в $L_2(E_{n-1})$, получаем)

$$= \Big\| |\tau|^{\nu_0} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2} - 1 + \beta_j - 2 + \nu_0 \ell^{-1}} G(\xi)(i\xi)^{\nu} \frac{|\xi|^{\alpha_n \nu_n - \beta_j}}{P^{m_j}(\tau)} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} e^{\frac{i x_n \lambda |\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}} \frac{(i\lambda)^{\nu_n} N_j(\tau, \xi', \lambda)}{M^+(\tau, \xi', \lambda)} d\lambda \ \hat{\psi}_j\left(\tau, \frac{\xi}{\sigma^{\alpha}}\right) d\sigma, L_2(E_{n+1}^+) \Big\| \leq$$

(учитывая оценки контурных интегралов (5) , получаем)

$$\leq c(\gamma) \Big\| |\tau|^{\nu_0 - \ell_j} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2} - 1 + \beta_j - 2 + \nu_0 \ell^{-1}} G(\xi) |\xi|^{2 - \nu_0 \ell^{-1} - \beta_j} \times$$

$$\times e^{-\frac{\delta|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}x_n}\hat{\psi}_j\left(\tau,\frac{\xi}{\sigma^{\alpha}}\right)d\sigma,\ L_2(E^+_{n+1})\Big\| =$$

$$= c(\gamma)\Big\||\tau|^{\nu_0-\ell_j}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}G(\xi\sigma^{\alpha})|\xi|^{2-\nu_0\ell^{-1}-\beta_j}e^{-\delta|\xi|^{\alpha_n}x_n}\times$$

$$\times\hat{\psi}_j(\tau,\xi)d\sigma,\ L_2(E^+_{n+1})\Big\| = \frac{c(\gamma)}{\sqrt{2\delta}}\Big\||\tau|^{\nu_0-\ell_j}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}G(\xi\sigma^{\alpha})\times$$

$$\times|\xi|^{2-\nu_0\ell^{-1}-\beta_j-\frac{\alpha_n}{2}}\hat{\psi}_j(\tau,\xi)d\sigma,\ L_2(E_n)\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant\tilde{c}(\gamma)\Big\||\tau|^{\nu_0-\ell_j}\int_1^{h^{-1}}\sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-1+\beta_j-2+\nu_0\ell^{-1}+\frac{\alpha_n}{2}}G(\xi)|\xi|^{2-\nu_0\ell^{-1}-\beta_j-\frac{\alpha_n}{2}}\times$$

$$\times\hat{\psi}_j\left(\tau,\frac{\xi}{\sigma^{\alpha}}\right)d\sigma,\ L_2\Big\| + \tilde{c}(\gamma)\Big\||\tau|^{\nu_0-\ell_j}\int_h^{1}\sigma^{-1}G(\xi\sigma^{\alpha})\times$$

$$\times|\xi|^{2-\nu_0\ell^{-1}-\beta_j-\frac{\alpha_n}{2}}\hat{\psi}_j(\tau,\xi)d\sigma,\ L_2\Big\| = I_1 + I_2\ .$$

Оценивая I_1 , очевидно, достаточно рассмотреть случай $\nu_0 = 2\ell$. Имеем

$$I_1 = \Big\||\tau|^{2\ell-\ell_j}\int_1^{h^{-1}}\sigma^{-\frac{|\alpha|}{2}-1+\beta_j+\frac{\alpha_n}{2}}G(\xi)|\xi|^{-\beta_j-\frac{\alpha_n}{2}}\times$$

$$\times\hat{\psi}_j\left(\tau,\frac{\xi}{\sigma^{\alpha}}\right)d\sigma, L_2\Big\| \leqslant$$ (если $\frac{|\alpha|}{2} > \beta_j + \frac{\alpha_n}{2}$, то получаем)

$$\leq c \left\| |\tau|^{2\ell-\ell_j} \left| \psi_j(\tau, x), L_1(E_{n-1}) \right|, L_2(E_1) \right\|.$$

Если $\frac{|\alpha|}{2} + N_j \alpha_{min} > \beta_j + \frac{\alpha_n}{2} \geq \frac{|\alpha|}{2} + (N_j - 1)\alpha_{min}$, то из условий ортогональности получим

$$|\hat{\psi}_j(\tau, \xi)| \leq \sum_{i_k} \int_{E_{n-1}} \prod_{k=1}^{N_j} |\xi_{i_k} \cdot x_{i_k} \cdot \psi_j(\tau, x)| dx.$$

Отсюда имеем

$$I_1 \leq c \sum_{|q| \leq N_j} \left\| |\tau|^{2\ell-\ell_j} \left| \psi_j(\tau, x) x^q, L_1(E_{n-1}) \right|, L_2(E_1) \right\|.$$

Оценивая I_2 , рассмотрим три случая:

а) при $\gamma = 2 - \nu_0 \ell^{-1} - \beta_j - \frac{\alpha_n}{2} = 0$ имеем

$$I_2 = \left\| |\tau|^{\nu_0 - \ell_j} \left[e^{-|\xi|^N} - e^{-|\xi h^\alpha|^N} \right] \hat{\psi}_j(\tau, \xi), L_2(E_n) \right\| \leq$$

$$\leq c \left\| |\tau|^{2\ell-\ell_j} \hat{\psi}_j(\tau, \xi), L_2(E_n) \right\|;$$

б) при $\gamma < 0$ имеем

$$I_2 = \left\| |\tau|^{\nu_0 - \ell_j} \int_h^1 \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2} - 1 - \gamma} G(\xi) |\xi|^\gamma \hat{\psi}_j\left(\tau, \frac{\xi}{\sigma^\alpha}\right) d\sigma, L_2 \right\| \leq$$

(учитывая определение $G(\xi)$, получаем)

$$\leq \left\| |\tau|^{\nu_0 - \ell_j} \int_h^1 \sigma^{-\frac{|\alpha|}{2} - 1 - \gamma} \left\| \hat{\psi}_j\left(\tau, \frac{\xi}{\sigma^\alpha}\right), L_2(\dot{E}_{n-1}) \right\| d\sigma, L_2(E_1) \right\| =$$

$$= \left\| |\tau|^{\nu_0 - \ell_j} \hat{\psi}_j(\tau, \xi), L_2(E_n) \right\| \int_h^1 \sigma^{-1-\gamma} d\sigma \leq$$

$$\leq c \left\| |\tau|^{2\ell-\ell_j} \hat{\varphi}_j(\tau,\xi), L_2(E_n) \right\| .$$

в) При $\tau > 0$, когда $\nu_0 \neq 0$, имеем

$$m_1 = \frac{2-\beta_j-\frac{\alpha_n}{2}}{\tau} = \frac{\tau+\nu_0\ell^{-1}}{\tau}, \quad m_2 = \frac{\ell}{\nu_0}\left(2-\beta-\frac{\alpha_n}{2}\right).$$

Тогда из неравенства $|\tau|^{\nu_0}|\xi|^{\tau} \leq \frac{|\tau|^{\nu_0 m_2}}{m_2} + \frac{|\xi|^{\tau m_1}}{m_1}$, в силу $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2} = 1$, получаем

$$\bar{I}_2 \leq \frac{c(\gamma)}{m_2}\left\| |\tau|^{\ell(2-\beta_j-\frac{\alpha_n}{2})-\ell_j} \int_h^1 \sigma^{-1}G(\xi\sigma^{\alpha})d\sigma\, \hat{\varphi}_j(\tau,\xi), L_2(E_n)\right\| +$$

$$+ \frac{c(\gamma)}{m_1}\left\| \int_h^1 \sigma^{-1}G(\xi\sigma^{\alpha})|\xi|^{2-\beta_j-\frac{\alpha_n}{2}} d\sigma\, \hat{\varphi}_j(\tau,\xi), L_2(E_n)\right\| \leq$$

$$\leq c'(\gamma)\left[\left\| |\tau|^{2\ell-\ell_j} \hat{\varphi}_j(\tau,\xi), L_2(E_n)\right\| + \left\| |\xi|^{2-\beta_j-\frac{\alpha_n}{2}} \hat{\varphi}_j(\tau,\xi), L_2(E_n)\right\|,\right.$$

а когда $\nu_0 = 0$, имеем

$$\bar{I}_2 \leq c(\gamma)\left\| |\xi|^{2-\beta_j-\frac{\alpha_n}{2}} \hat{\varphi}_j(\tau,\xi), L_2(E_n)\right\| .$$

Суммируя вышеизложенное, получаем доказательство леммы.

Определим операторы

$$\tilde{R}_j\varphi_j = \lim_{h\to 0} \tilde{R}_j^h \varphi_j, \quad j=1,\dots,\mu \tag{22}$$

(сходимость понимается в смысле $\tilde{W}_{2,\gamma}^{2/\alpha}$). Область определения оператора совпадает с $\mathcal{L}_j^1$.

Определим теперь оператор

$$R(g,\varphi_1,\dots,\varphi_\mu) = \left(R_0+R_\infty+\sum_{j=1}^{\mu} R_j\right)g + \sum_{j=1}^{\mu}\tilde{R}_j\varphi_j , \tag{23}$$

действующий из пространства $\mathcal{L}_0(E_{n+1}^+) \times \prod_{j=1}^{\mu} \mathcal{L}_j^1(E_n)$ в $\tilde{W}_{2,\gamma}^{2/\alpha}$

Лемма 1.7. Если $g \in \mathcal{L}_0(E^+_{n+1})$, $\psi_j \in \mathcal{L}'_j(E_n)$, $j=1,\dots,\mu$, то

$$L(\tau,D_x,D_{x_n})R(g,\psi_1,\dots,\psi_\mu)=g, \tag{24}$$

$$B_j(\tau,D_x,D_{x_n})R(g,\psi_1,\dots,\psi_\mu)\Big|_{x_n=0}=\psi_j,\quad j=1,\dots,\mu, \tag{25}$$

где равенства понимаются в смысле L_2.

Доказательство. Имеем

$$L(\tau,D_x,D_{x_n})\Big[(R_0^h-R_\infty^h)g+\sum_{j=1}^{\mu}(R_j^{h,\varepsilon}g-\tilde{R}_j^h\psi_j)\Big]=$$

$(g_j^\varepsilon$ - выражение, стоящее в квадратных скобках в (12))

$$=L(\tau,D_x,D_{x_n})\Big[(R_0^h+R_\infty^h)g+\sum_{j=1}^{\mu}\tilde{R}_j^h(g_j^\varepsilon+\psi_j)\Big]=$$

(учитывая (17), получаем)

$=L(\tau,D_x,D_{x_n})(R_0^h+\dot{R}_\infty^h)g$, следовательно, из (7) вытекает (24). Докажем равенства (25), используя тождества:

$\int\limits_\Gamma \dfrac{(i\lambda)^p}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}\,d\lambda=0,\quad p\le m-2$, и учитывая, что $\beta_k<1$.

Имеем

$$B_k(\tau,D_x,D_{x_n})(R_0^h-R_\infty^h)g\Big|_{x_n=0}=$$

(после сложения и вычитания

$$(2\pi)^{1-n}\int\limits_0^{x_n}\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n}\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{E_{n-1}}e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi}G(\xi)|\xi|^{\alpha_n-1}\times$$

$$\times\mathcal{J}^-\Big(\tau,\xi',\frac{x_n-y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\Big)g(\tau,y,y_n)\,d\xi\,dy\,d\sigma\,dy_n)$$

получаем

$$=-\int\limits_0^\infty(2\pi)^{1-n}\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-\beta_k}\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{E_{n-1}}e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi}G(\xi)\frac{|\xi|^{\alpha_n-1+\beta_k}}{P_m(\tau)}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^-} e^{-\frac{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}}\frac{B_\kappa(\tau,i\xi',i\lambda)}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda g(\tau,y,x_n)d\xi dy d\sigma dx_n = -g_\kappa^h.$$

Учитывая (19), имеем

$$B_\kappa(\tau,D_x,D_{x_n})\sum_1^\mu R_j^{h,\varepsilon} g\Big|_{x_n=0} = B_\kappa(\tau,D_x,D_{x_n})\sum_1^\mu \tilde{R}_j^h g_j^\varepsilon\Big|_{x_n=0} =$$

$$=(2\pi)^{n-1}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1}\int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)g_\kappa^\varepsilon(\tau,y,y_n)d\xi dy d\sigma.$$

Следовательно, из интегрального представления (3) вытекает

$$\left\|B_\kappa(R_0^h+R_\infty^h+\sum_1^\mu R_j^{h,\varepsilon})g\right|_{x_n=0}, L_2\Big\|\to 0,\ h\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

Отсюда (25) получаем из (18). Лемма доказана.

Из вышесказанного следует, что при выполнении условий теоремы 1° функция $\sigma=R(g,\vec{\psi})\in \tilde{W}^{2/\alpha}_{2,\gamma}$ является решением краевой задачи (2). Доказательство единственности решения из класса $\tilde{W}^{2/\alpha}_{2,\gamma}$ не вызывает затруднений. Следовательно, оператор R является обратным к векторному оператору

$$A=\left\{L(\tau,D_x,D_{x_n}),\ B_1(\tau,D_x,D_{x_n})\Big|_{x_n=0},\dots,B_\mu(\tau,D_x,D_{x_n})\Big|_{x_n=0}\right\}.$$

Теорема 1° доказана.

§ 3. Решение задачи (1) для уравнений с переменными коэффициентами

В этом параграфе рассмотрим краевую задачу с параметром τ, $Re\,\tau>\gamma$, для уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned}&L(\bar{x};\tau,D_x,D_{x_n})v=G(\tau,x,x_n),\quad x_n>0,\\&B_j(\tau,D_x,D_{x_n})v\Big|_{x_n=0}=\psi_j(\tau,x),\quad j=1,\dots,\mu.\end{aligned}\qquad(2^\circ)$$

Теорема 2°. Пусть операторы $L(\bar{x};D_{x_0},D_{\bar{x}_2})$ и $B_j(D_{x_0},D_{\bar{x}})$ удовлетворяют условиям 1) - 5) и $G\in\mathcal{M}_0(E^+_{n+1})$, $\psi_j\in\mathcal{L}^2_j(E_n)$. Если $\frac{|\alpha|}{2}\leqslant 1$, то предположим, что выполнено дополнительное условие: при $\frac{|\alpha|}{2}+N\alpha_{min}>1\geqslant\frac{|\alpha|}{2}+(N-1)\alpha_{min}$ справедливо

$$\int\limits_{E_{n-1}} x^s \left(\sum_0^\infty \left(-\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})R'(\bar{x}^\circ)\right)^\ell\right)\left(G-\sum_1^\mu \Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\tilde{R}_j(\bar{x}^\circ)\psi_j\right)dx=0,$$

$0\le |S|\le N-1$, где $\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})=L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})-L(\bar{x}^\circ;\tau,D_{\bar{x}})$, $R(\bar{x}^\circ)=(R'(\bar{x}^\circ),\tilde{R}_1(\bar{x}^\circ),\dots,\tilde{R}_\mu(\bar{x}^\circ))$ - обратный оператор к $\mathcal{A}(\bar{x}^\circ)$, $\bar{x}^\circ\notin K$. Тогда краевая задача (2°) имеет единственное решение $\sigma\in W_{2,\gamma}^{2/\alpha}$, причем выполнена оценка:

$$\|\sigma,\tilde{W}_{2,\gamma}^{2/\alpha}\|\le c(\gamma,K)\left[\|G,m_0\|+\sum_1^\mu\|\psi_j,m_j^2\|\right],$$

где константа $c(\gamma,K)$ зависит от γ и $diam K$.

Следствие. Отсюда в силу обобщенной теоремы Пэли-Винера получаем утверждение теоремы 2.

Используя оператор $R(\bar{x}^\circ)$, построенный в § 2, сведем решение краевой задачи (2°) к решению операторного уравнения $(I+T)f=F$. Имеем

$$L(\bar{x};\tau,D_x,D_{x_n})R(\bar{x}^\circ)\langle g,\psi_1,\dots,\psi_\mu\rangle=$$

$$=g(\tau,x,x_n)\left(1+\frac{P_m(\bar{x};\tau)-P_m(\bar{x}^\circ;\tau)}{P_m(\bar{x}^\circ;\tau)}\right)+$$

$$+(2\pi)^{1-n}\int\limits_0^{x_n}\int\limits_0^\infty \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-1}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi}G(\xi)|\xi|^{\alpha_n}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^+}e^{i\left(\frac{x_n-y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{m-1}(i\lambda)^k\frac{\tilde{L}_k(\bar{x};\tau,i\xi')-\tilde{L}_k(\bar{x}^\circ;\tau,i\xi')}{\tilde{L}(\bar{x}^\circ;\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda\times$$

$$\times g(\tau,y,y_n)d\xi\,dy\,d\sigma\,dy_n+(2\pi)^{1-n}\int\limits_\infty^{x_n}\int\limits_0^\infty\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n-1}\times$$

$$\times\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi}G(\xi)|\xi|^{\alpha_n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^-}e^{i\left(\frac{x_n-y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{m-1}(i\lambda)^k\frac{\tilde{L}_k(\bar{x};\tau,i\xi')-\tilde{L}_k(\bar{x}^\circ;\tau,i\xi')}{\tilde{L}(\bar{x}^\circ;\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda\, g(\tau,y,y_n)d\xi\,dy\,d\sigma\,dy_n+$$

$$+\sum_{j=1}^{\mu}(2\pi)^{1-n}\int_0^\infty \sigma^{-|\alpha|-2+\beta_j}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)\frac{|\xi|^{1-\beta_j}P_m(\bar{x}^\circ;\tau)}{P^{m_j}(\tau)}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} e^{\frac{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}}\frac{N_j(\tau,\xi',\lambda)}{M^+(\tau,\xi',\lambda)}\left(\widetilde{L}(\bar{x};\tau,i\xi',i\lambda)-\right.$$

$$\left.-\widetilde{L}(\bar{x}^\circ;\tau,i\xi',i\lambda)\right)d\lambda\left(\psi_j(\tau,y)+g_j^\circ(\tau,y)\right)d\xi\,dy\,d\sigma=$$

(где $g_j^\circ=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g_j^\varepsilon$, см. лемму 1.4)

$$=(I+T_0+T_\infty+\sum_1^\mu T_j)g+\sum^\mu\widetilde{T}_j\psi_j=G,$$

$$B_j(\tau,D_x,D_{x_n})R(g,\vec{\psi})\Big|_{x_n=0}=\psi_j,\quad j=1,\dots,\mu, \tag{26}$$

т.е. $\mathcal{A}(\bar{x})\circ R(\bar{x}^\circ)=I+T$.

Докажем, что оператор T мал по норме в пространстве $\mathfrak{M}^2=\mathfrak{M}_0(E^+_{n+1})\times\prod_1^\mu\mathfrak{M}_j^2(E_n)$, причем, по определению,

$$\|\langle g,\vec{\psi}\rangle,\mathfrak{M}^2\|=\|g,\mathfrak{M}_0\|+\sum_1^\mu\|\psi_j,\mathfrak{M}_j^2\|. \tag{27}$$

Имеем

$$\sum_k(i\lambda)^k\left(\widetilde{L}_k(\bar{x};\tau,i\xi')-\widetilde{L}_k(\bar{x}^\circ;\tau,i\xi')\right)=$$

$$=\sum_{\rho,\beta,k}\left(a_{\rho,\beta,k}(\bar{x})-a_{\rho\beta k}(\bar{x}^\circ)\right)\frac{\tau^\rho}{P_m(\tau)}(i\xi')^\beta(i\lambda)^k.$$

Обозначим $d=\sup\limits_{\bar{x}}\sum|a_{\rho\beta k}(\bar{x})-a_{\rho\beta k}(\bar{x}^\circ)|$.

Лемма 2.1. Имеет место оценка

$$\|(T_0+I_\infty)g,\mathfrak{M}_0\|\le d\cdot c(\gamma,k)\|g,\mathfrak{M}_0\|. \tag{28}$$

Доказательство. Поскольку $\operatorname{supp}(a_{\rho\beta k}(\bar{x})-a_{\rho\beta k}(\bar{x}^\circ))\subset K$, то оценки в норме $\mathfrak{M}_0(E^+_{n+1})$ сводятся к оценкам в норме $\widetilde{W}_{2,\gamma}^{1/\alpha}$,поэтому достаточно оценить выражение

$$\| |\tau|^{\nu_0} D_x^{\nu} D_{x_n}^{\nu_n} (T_0 + T_\infty) g, L_{2,\gamma} \|,$$

$$\nu_0 \ell^{-1} + \nu\alpha + \nu_n \alpha_n = 1.$$

Повторяя выкладки, проведенные в лемме 1.3, получаем оценку (28) (это соответствует случаю $\nu_n \le m$). Лемма доказана.

Лемма 2.2. Имеет место оценка

$$\| T_j\, g, \mathfrak{M}_0(E^+_{n+1}) \| \le d \cdot c(\gamma, \kappa) \| g, \mathfrak{M}_0(E^+_{n+1}) \|. \tag{29}$$

Доказательство. В силу финитности $a_{p\beta\kappa}(\bar{x}) - a_{p\beta\kappa}(\bar{x}^\circ)$, повторяя выкладки, проведенные в лемме 1.4, получаем оценку (29).

Лемма 2.3. Имеет место оценка

$$\| \tilde{T}_j\, \psi_j, \mathfrak{M}_0 \| \le d \cdot c(\gamma, \kappa) \| \psi_j, \mathfrak{M}_j^2 \|. \tag{30}$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в лемме 1.6.

Из оценок (28) - (30) получаем оценку

$$\| T\langle g, \vec{\psi} \rangle, \mathfrak{M}^2 \| \le d \cdot c'(\gamma, \kappa) \| \langle g, \vec{\psi} \rangle, \mathfrak{M}^2 \|. \tag{31}$$

Следовательно, если коэффициенты оператора $L(\bar{x}; D_{x_0}, D_{\bar{x}})$ достаточно мало отличаются от постоянных, то оператор $I + T$ обратим в пространстве $\mathfrak{M}^2$. Поэтому если $G \in \mathfrak{M}_0(E^+_{n+1})$, $\psi_j \in \mathfrak{M}_j^2(E_n)$, то из операторного уравнения (26) находим $\langle g, \vec{\psi} \rangle = (I+T)^{-1} \langle G, \vec{\psi} \rangle \in \mathfrak{M}^2$.

Отсюда, в силу совпадения при $\frac{|\alpha|}{2} > 1$ области определения оператора $R(\bar{x}^\circ)$ с $\mathfrak{M}^1$, получаем решение краевой задачи (2°) в виде:

$$v = R(\bar{x}^\circ) \circ (I+T)^{-1} \langle G, \vec{\psi} \rangle \in \tilde{W}^{2/\alpha}_{2,\gamma}.$$

Действительно, $\mathcal{A}(\bar{x}) v = \mathcal{A}(\bar{x}) \circ R(\bar{x}^\circ) \circ (I+T)^{-1} \langle G, \vec{\psi} \rangle =$

$$= (I+T) \circ (I+T)^{-1} \langle G, \vec{\psi} \rangle = \langle G, \vec{\psi} \rangle.$$

Рассмотрим теперь случай $\frac{|\alpha|}{2} \le 1$. Пусть $\psi_j(\tau, x) \equiv 0$, т.е. (26) перепишем в виде:

$$L(\bar{x}; \tau, D_x, D_{x_n}) R(\bar{x}^\circ) \langle g, \vec{0} \rangle = (I + T') g = G,$$

$$B_j(\tau, D_x, D_{x_n}) R(\bar{x}^\circ) \langle g, \vec{0} \rangle \Big|_{x_n = 0} = 0, \quad j = 1, \dots, \mu.$$

Если $G \in \mathfrak{M}_0(E^+_{n+1})$, то отсюда, как следует из вышесказанного, получаем

$$q = (I+T')^{-1} G \in \mathfrak{M}_0(E^+_{n+1}),$$

где

$$T' = (L(\bar{x};\tau,D_x,D_{x_n}) - L(\bar{x}^\circ;\tau,D_x,D_{x_n}))\circ(R_0+R_\infty+\sum_{j=1}^{\mu}\tilde{R}_j),$$

но поскольку область определения оператора

$$R'(\bar{x}^\circ) = R_0 + R_\infty + \sum_{j=1}^{\mu} R_j$$

совпадает с $\mathcal{L}_0(E^+_{n+1})$, то функция $v = R'(\bar{x}^\circ)\circ(I+T')^{-1}G$ будет решением краевой задачи (2°) из класса $\tilde{W}^{2/\alpha}_{2,\gamma}$, если дополнительно предположить, что

$$\int_{E_{n-1}} x^s\Big[G + \sum_{k=1}^{\infty}(-\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\circ R'(\bar{x}^\circ))^k G\Big]dx = 0,$$

$0 \le |s| \le N-1$, при $\frac{|\alpha|}{2} + N\alpha_{min} > 1 \ge \frac{|\alpha|}{2} + (N-1)\alpha_{min}$.

Общий случай $\psi_j(\tau,x) \not\equiv 0$ сводится к предыдущему заменой $v = w + \sum_{j=1}^{\mu}\tilde{R}_j\psi_j$, т.е. получаем задачу

$$L(\bar{x};\tau,D_x,D_{x_n})w = \tilde{G} = G - \sum_{j=1}^{\mu}\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\circ\tilde{R}_j\psi_j,$$

$$B_j(\tau,D_x,D_{x_n})w\Big|_{x_n=0} = 0, \qquad j=1,\dots,\mu.$$

Следовательно, если $G \in \mathfrak{M}_0(E^+_{n+1})$, $\psi_j \in \mathcal{L}^2_j(E_n)$ и выполнено условие: при $\frac{|\alpha|}{2} + N\alpha_{min} > 1 \ge \frac{|\alpha|}{2} + (N-1)\alpha_{min}$,

$$\int_{E_{n-1}} x^s\Big[\tilde{G} + \sum_{k=1}^{\infty}(-\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\circ R'(\bar{x}^\circ))^k\tilde{G}\Big]dx = 0, \qquad (32)$$

$0 \le |s| \le N-1$, то функция

$$v = R'(\bar{x}^\circ)\circ(I+T')^{-1}\tilde{G} + \sum_{j=1}^{\mu}\tilde{R}_j\psi_j$$

является решением краевой задачи (2°) из класса $\tilde{W}^{2/\alpha}_{2,\gamma}$.

Замечание. Если коэффициенты оператора $L(\bar{x};D_{x_0},D_{\bar{x}})$ зависят только от x_n, то из $G \in \mathcal{L}_0(E^+_{n+1})$ и $\psi_j \in \mathcal{L}^2_j(E_n)$ следует условие (32).

Итак, построен правый обратный оператор $R(\bar{x})$ к векторному оператору

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \left\{ L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}}),\ B_1(\tau,D_{\bar{x}})\Big|_{x_n=0},\dots,B_\mu(\tau,D_{\bar{x}})\Big|_{x_n=0} \right\}.$$

Покажем, что он является и левым обратным.

Пусть

$$\mathcal{A}(\bar{x})\sigma - \langle G,\vec{\psi}\rangle,\quad G\in \mathcal{M}_0(E^+_{n+1}),\ \psi_j\in\mathcal{L}^2_j(E_n)$$

и при $\frac{|\alpha|}{2}\leqslant 1$ выполнено условие (32). Имеем

$$R(\bar{x})\circ\mathcal{A}(\bar{x})\sigma = R'(\bar{x}^\circ)\circ\left(I+\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\circ R'(\bar{x}^\circ)\right)^{-1}\circ$$

$$\circ\left(L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\sigma - \Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\circ\sum_{j=1}^{\mu}\widetilde{R}_j\circ B_j(\tau,D_{\bar{x}})\sigma\Big|_{x_n=0}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\mu}\widetilde{R}_j\circ B_j(\tau,D_{\bar{x}})\sigma\Big|_{x_n=0} = R'(\bar{x}^\circ)\circ\Big(I+$$

$$+\sum_{K=1}^{\infty}\left(-\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\circ R'(\bar{x}^\circ)\right)^K\Big)\circ L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\sigma+$$

$$+\sum_{K=1}^{\infty}\left(-R'(\bar{x}^\circ)\circ\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\right)^K\circ\sum_{j=1}^{\mu}\widetilde{R}_j\circ B_j(\tau,D_{\bar{x}})\sigma\Big|_{x_n=0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\mu}\widetilde{R}_j\circ B_j(\tau,D_{\bar{x}})\sigma\Big|_{x_n=0} = \Big(I+\sum_{K=1}^{\infty}\left(-R'(\bar{x}^\circ)\circ\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\right)^K\circ$$

$$\circ\left(R'(\bar{x}^\circ)\circ L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\sigma+\sum_{j=1}^{\mu}\widetilde{R}_j\circ B_j(\tau,D_{\bar{x}})\sigma\Big|_{x_n=0}\right)=$$

$$=\left(I+R'(\bar{x}^\circ)\circ\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\right)^{-1}\circ\left(I+R'(\bar{x}^\circ)\circ\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\right)\sigma=\sigma.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{R}(\bar{x})$ является левым обратным к $\mathcal{A}(\bar{x})$.

Теорема 2° доказана.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. С.В.Успенскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики.-Изв.АН СССР, сер.мат., 1954, т.18, №1, с. 3-50.
2. Дезин А.А., Масленникова В.Н. Неклассические граничные задачи.- В кн.: Дифференциальные уравнения. Труды симпозиума. М., Наука, 1970, с. 81-95.
3. Зеленяк Т.И., Михайлов В.П. Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач математической физики при $t \to \infty$.- В кн.: Дифференциальные уравнения. Труды симпозиума. М., Наука, 1970, с.96-118.
4. Масленникова В.Н. Явные представления и априорные оценки решений граничных задач для системы Соболева.-Сиб.мат.журн., 1968, т.9, №5, с. 1182-1198.
5. Масленникова В.Н., Боговский М.Е. Асимптотическое поведение решений краевых задач для системы Соболева в полупространстве и явление погранслоя.- В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. М., Наука, 1978, с.109-152.
6. Вишик М.И. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения.- Мат.сб., 1956, т.39, №1,с.51-148.
7. Гальперн С.А. Задача Коши для уравнения С.Л.Соболева.- Сиб.мат.журн., 1963, т.4, №4, с.758-774.
8. Showalter R.E. Partial differential equations of Sobolev-Galpern type.- Pacif. J. Math., 1969, v. 31, № 3, p. 787-793.
9. Павлов А.Л. Об общих краевых задачах для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в полупространстве.- Мат.сб., 1977, т.103, №3, с.367-391.
10. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.- М.: Мир, 1974.- 331 с.
11. Успенский С.В. О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов.- Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1972, т.117, с. 292-299.

12. Успенский С.В. Об общих краевых задачах для одного класса неклассических уравнений.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа. Материалы школы-конференции. Новосибирск, 1975, с.212-233.

13. Успенский С.В., Демиденко Г.В. О дифференциальных свойствах решений общих краевых задач для уравнений типа Соболева.- В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. М., Наука, 1978, с.276-296.

14. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границ.- М.: ИЛ., 1963.- с.264.