УДК 517+531

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ В ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИИ ГИБКИХ ТЕЛ

В.Р.Портнов (Новосибирск)

0°. В работе проводится исследование на минимум функционала потенциальной энергии гибкого тела. Этот функционал естественным образом порождает векторное пространство, задаваемое конечностью некоторой полунормы, содержащей дифференциальные выражения первого или второго порядков*).

Предлагаемый здесь метод по сравнению с известными (см. [10-15] и имеющуюся там библиографию) позволяет доказать теорему существования минимума функционала потенциальной энергии в предположениях, которые допускают: а) неограниченность продольных размеров тела, б) произвольное поведение поперечного сечения при подходе к краю или при удалении на бесконечность, в) отсутствие коэрцитивности по компонентам тензора напряжений, г) присутствие одновременно и физической и геометрической нелинейностей.

1°. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$; Ω и ω - непустые открытые множества в n-мерных евклидовых пространствах переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$ соответственно; $x = x(\xi)$ - вектор-функция на множестве Ω, диффеоморфно отображающая его на множество ω и задающая в Ω криволинейную (не обязательно ортогональную) систему координат, метрический тензор которой мы обозначим через $G(x) = \|g_{ij}(x)\|_{i,j=1,\dots,n}$.**)

Пусть $E(x) = \{e_{ij}(x)\}_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i \le j}}$ - тензор конечной деформации (в лаг-

---

*) Дифференциальные выражения второго порядка возникают, например, в теории пластин и оболочек при выполнении гипотезы недеформируемых нормалей.

**) $G(x)$ - вещественная положительно определенная в каждой точке $x \in \omega$ квадратная матрица порядка n.

ранжевом представлении) множества Ω ***)

Пусть $\tau \in N$ и пусть задана функция $M: \omega \times R^{\tau} \longrightarrow R$ такая, что удельная потенциальная энергия деформации множества Ω имеет вид: $M(x, \Lambda(x) E(x))$, где $\Lambda(x)$ - линейный (не зависящий от вектора смещения) оператор (матрица), преобразующий в каждой точке $x \in \omega$ пространство $R^{\frac{n(n+1)}{2}}$, в котором расположены значения тензора $E(x)$, в пространство R^{τ}.

Положим $\mathcal{L}(x) = \Lambda(x) E(x)$. Вектор-функцию $\mathcal{L}(x)$ будем записывать также в виде: $\mathcal{L}(x) = \{\mathcal{L}_k(x)\}_{k=1,\dots,\tau}$ или $\mathcal{L}(x) = (\mathcal{L}_1(x), \dots, \mathcal{L}_{\tau}(x))$, так что $\forall k = 1, \dots, \tau$

$$\mathcal{L}_k(x) = \sum_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i \le j}} \Lambda_{ij}^{(k)}(x) e_{ij}(x),$$

где $\Lambda_{ij}^{(k)}(x)$ - вещественные функции на ω.

В дальнейшем рассматриваются лишь такие деформации множества Ω, для которых $M(x, \mathcal{L}(x)) \in L_1(\omega)$, так что (полная) энергия деформации может быть подсчитана по формуле:

$$Э_{деф.} = \int_{\omega} M(x, \mathcal{L}(x)) dx. \tag{1}$$

Для каждой компоненты $\mathcal{L}_k(x)$ вектор-функции $\mathcal{L}(x)$ зафиксируем открытое множество $\omega_k \subset \omega$ такое, что при изменении этой компоненты в точках множества $\omega \setminus \omega_k$ удельная потенциальная энергия деформации не меняется. В дальнейшем будем следить лишь за изменением $\mathcal{L}_k(x)$ на множестве ω_k, считая, что $\mathcal{L}_k(x) = 0 \quad \forall x \in \omega \setminus \omega_k$.

***) Если вектор смещения $u(x)$ имеет на каком-нибудь непустом открытом множестве $\omega_0 \subset \omega$ непрерывные частные производные первого порядка по аргументам x_i и x_j, $i \le j$, то компонента $e_{ij}(x)$ тензора $E(x)$ определяется на ω_0 через вектор $u(x)$ по формуле (см. [1, с.59, формула (3.82)]):

$$e_{ij}(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, G(x+u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \left(G(x+u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_j + \left(G(x+u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)_i + g_{ij}(x+u) - g_{ij}(x)\right).$$

Более точно, следует, конечно, писать так: $E(x|u)$ и $e_{ij}(x|u)$, но мы придерживаемся общепринятых обозначений. Это замечание касается также введенной ниже вектор-функции $\mathcal{L}(x)$.

2°. Введем вектор-функцию $U(x) = G(x)u(x)$ *), где $u(x)$ - вектор смещения, и зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$, $m < n$. Положим $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\check{x} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$. Через $\hat{\omega}$ обозначим ортогональную проекцию множества ω на ось $\Gamma_m = \{x : \check{x} = 0\}$ в пространстве переменных x, а через $\check{\omega}(\hat{x})$, где $\hat{x} \in \hat{\omega}$, - совокупность тех точек ω, у которых ортогональная проекция на ось Γ_m равна $\hat{x}$. Аналогично определяются множества $\hat{\omega}_\kappa$ и $\check{\omega}(\hat{x})$ для $\hat{x} \in \hat{\omega}_\kappa$.

3°. Пусть $\mathcal{A}$ - непустое множество индексов, $\Sigma = \{\sigma^{(\alpha)}(x)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ - семейство вещественных на ω функций, линейно-независимое на множествах $\check{\omega}(\hat{x})$ $\forall \hat{x} \in \hat{\omega}$ и $\check{\omega}_\kappa(\hat{x})$ $\forall \kappa = 1, \ldots, \tau$, $\forall \hat{x} \in \hat{\omega}_\kappa$.

Зафиксируем в множестве $\mathcal{A}$ непустые конечные подмножества $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_\tau$, а в множестве $\hat{\omega}$ $\forall \kappa = 1, \ldots, \tau$ - открытое подмножество $\hat{\omega}^*_\kappa \supset \hat{\omega}_\kappa$ и $\forall i, j = 1, \ldots, n, i \le m, j > m$, - открытое подмножество $\hat{\omega}^*_{ij}$.

Определение 1. Множество Ω называется (M, Λ, Σ)- гибким (или просто - гибким) по переменной $\check{x}$ телом, если потенциальная энергия деформации имеет вид (1) и с "достаточной степенью точности" можно считать, что 1) каждая компонента $U_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, вектор-функции $U(x)$ имеет на множестве ω вид

$$U_i(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} U_i^{(\alpha)}(\hat{x}) \sigma^{(\alpha)}(x), \tag{2}$$

где $U_i^{(\alpha)}(\hat{x}) \in L_1^{loc}(\hat{\omega})$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}_0$, $\forall i = 1, \ldots, n$ (в дальнейшем мы полагаем: $\mathcal{U}(\hat{x}) = \{U_\kappa^{(\alpha)}(\hat{x})\}_{\alpha \in \mathcal{A}_0, \kappa = 1, \ldots, n}$); 2) каждая компонента $\mathcal{L}_\kappa(x)$, $\kappa = 1, \ldots, \tau$, вектор-функции $\mathcal{L}(x)$ имеет на множестве $\hat{\omega}^*_\kappa$ вид:

$$\mathcal{L}_\kappa(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\kappa} \left(\varepsilon_\kappa^{(\alpha)}(\hat{x}) + \pi_\kappa^{(\alpha)}(\hat{x}) \right) \sigma^{(\alpha)}(x), \tag{3}$$

где функции $\varepsilon_\kappa^{(\alpha)}(\hat{x})$ и $\pi_\kappa^{(\alpha)}(\hat{x})$ определяются соотношениями:

---

*) Компоненты вектора $U(x)$ называются ковариантными составляющими вектора смещения [1, с.60], а компоненты вектора $\sqrt{G(x)}\ u(x)$ - его физическими составляющими [1, с. 66, 89-91].

$$\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(\hat{x}) = \left(B_k^{(\alpha)}(\hat{x}), \mathcal{U}\right) +$$

$$+\sum_{\substack{i\le m\\ j>m\\ \beta\in\mathcal{A}_0}} \Lambda_{ijk}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x})\frac{\partial U_j^{(\beta)}}{\partial x_i} + \sum_{\substack{i\le j\le m\\ \beta\in\mathcal{A}_0}} \Lambda_{ijk}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x})\left(\frac{\partial U_i^{(\beta)}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^{(\beta)}}{\partial x_i}\right), \tag{4}$$

$$\pi_k^{(\alpha)}(\hat{x}) = \sum_{|\theta|\le \varkappa} \mathcal{U}^{\theta}\left(a_k^{(\alpha,\theta)}(\hat{x}) + \sum_{i\le m,\lambda>m,\beta\in\mathcal{A}_0} a_{i\lambda k}^{(\alpha,\beta,\theta)}(\hat{x})\frac{\partial U_\lambda^{(\beta)}}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{i\le j\le m,\ \lambda>m,\\ \tau>m,\ \beta,\gamma\in\mathcal{A}_0}} a_{ij\lambda\tau k}^{(\alpha,\beta,\gamma,\theta)}(\hat{x})\frac{\partial U_\lambda^{(\beta)}}{\partial x_i}\,\frac{\partial U_\tau^{(\gamma)}}{\partial x_j}\right), \tag{5}$$

в которых $\varkappa \in \mathbb{N}$, символом $(\,,\,)$ обозначено скалярное произведение в евклидовом пространстве значений вектора $\mathcal{U}$; $B_k^{(\alpha)}(\hat{x})$ - вектор-функция с компонентами из $L_1^{loc}(\hat{\omega}_k^*)$; для некоторой вектор-функции $C_k^{(\alpha)}(\hat{x})$ с компонентами из $L_1^{loc}(\hat{\omega}_k^*)$ той же размерности, что и вектор-функция $B_k^{(\alpha)}(\hat{x})$, дифференциальный оператор $\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(\hat{x}) - (C_k^{(\alpha)}(\hat{x}), \mathcal{U})$ существует на $\hat{\omega}_k^*$ в обобщенном соболевском смысле*) ; производные $\frac{\partial U_\lambda^{(\beta)}}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial U_\tau^{(\gamma)}}{\partial x_j}$ существуют в обобщенном соболевском смысле на множествах $\hat{\omega}_{i\lambda}^*$ и $\hat{\omega}_{j\tau}^*$ соответственно;

$$a_k^{(\alpha,\theta)}(\hat{x}) \in L_1^{loc}(\hat{\omega}_k^*) ;\ a_{i\lambda k}^{(\alpha,\beta,\theta)}(\hat{x}) \in L_1^{loc}(\hat{\omega}_k^*)$$

и

$$\operatorname{supp} a_{i\lambda k}^{(\alpha,\beta,\theta)}(\hat{x}) \subset \hat{\omega}_{i\lambda}^* ;\ a_{ij\lambda\tau k}^{(\alpha,\beta,\gamma,\theta)}(\hat{x}) \in L_1^{loc}(\hat{\omega}_k^*)$$

---

*) Для этого достаточно, например, чтобы компоненты вектор-функции $B_k^{(\alpha)}(\hat{x}) - C_k^{(\alpha)}(\hat{x})$ принадлежали пространству $L_\infty^{loc}(\hat{\omega}_k^*)$ и чтобы функция $\Lambda_{ijk}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x})$ имела обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $\frac{\partial \Lambda_{ijk}^{(\alpha,\beta)}}{\partial x_i} \in L_\infty^{loc}(\hat{\omega}_k^*)$ при $i \le m$ и $\frac{\partial \Lambda_{ijk}^{(\alpha,\beta)}}{\partial x_j} \in L_\infty^{loc}(\hat{\omega}_k^*)$ при $j \le m$ для всех присутствующих в (4) верхних и нижних индексов.

и $\operatorname{supp} a_{ij\tau k}^{(\alpha,\beta,\gamma,\theta)}(\hat{x}) \subset \hat{\omega}_{i\lambda}^{*} \cap \hat{\omega}_{j\tau}^{*}$.

Замечание 1. Каждую из функций $\mathcal{E}_{K}^{(\alpha)}(\hat{x})$ и $\mathcal{T}_{K}^{(\alpha)}(\hat{x})$ будем в дальнейшем считать продолженной нулем с множества $\hat{\omega}_{K}^{*}$ на все множество $\hat{\omega}$.

Замечание 2. Выражения

$$a_{i\lambda K}^{(\alpha,\beta,\theta)}(\hat{x})\,\frac{\partial U_{\lambda}^{(\beta)}}{\partial x_i} \qquad \text{и} \qquad a_{ij\lambda\tau k}^{(\alpha,\beta,\gamma,\theta)}(\hat{x})\,\frac{\partial U_{\lambda}^{(\beta)}}{\partial x_i}\,\frac{\partial U_{\tau}^{(\gamma)}}{\partial x_j}$$

в (5) считаются равными нулю соответственно на множествах

$$\hat{\omega} \setminus \operatorname{supp} a_{i\lambda K}^{(\alpha,\beta,\theta)}(\hat{x}) \qquad \text{и} \qquad \hat{\omega} \setminus \operatorname{supp} a_{ij\lambda\tau k}^{(\alpha,\beta,\gamma,\theta)}(\hat{x}).$$

4°. В дальнейшем мы считаем, что Ω - гибкое по переменной $\check{x}$ тело.

Вектор-функции $\mathcal{U}(\hat{x})$ из определения 1 образуют векторное пространство $\mathcal{T}$. Пусть $\mathcal{T}_0$ - векторное подпространство в пространстве $\mathcal{T}$.

Гипотеза 1 (основная). Возможны лишь такие деформации тела Ω, при которых вектор-функция $\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{T}_0$.

Примером основной гипотезы может служить гипотеза недеформируемых нормалей, применяемая в теории пластин и оболочек (линейной и нелинейной).

Зафиксируем для каждого $K=1,\dots,\tau$ два подмножества $\mathcal{A}_K'$ и $\mathcal{A}_K^{*}$ в множестве $\mathcal{A}$ такие, что $\mathcal{A}_K^{*} \subset \mathcal{A}_K'$, $\mathcal{L}_K^{(\alpha)}(\hat{x}) \equiv 0$ на $\hat{\omega}_K^{*}$ *) $\forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{T}_0$, $\forall K \in \mathcal{A}_K \setminus \mathcal{A}_K'$ и $\mathcal{E}_K^{(\alpha)}(\hat{x}) \equiv 0$ на ω_K $\forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{T}_0$, $\forall K \in \mathcal{A}_K \setminus \mathcal{A}_K^{*}$.

Введем множества

$$\gamma' = \{K \in \mathbb{N} : K \le \tau \ \text{ и } \ \mathcal{A}_K' \ne \emptyset\}, \quad \gamma^{*} = \{K \in \mathbb{N} : K \le \tau \ \text{ и } \ \mathcal{A}_K^{*} \ne \emptyset\}$$

и будем считать, что оба они непусты. Число элементов в множествах γ' и γ^{*} обозначим соответственно через d' и d^{*}.

Положим $\zeta' = \{\zeta_K^{(\alpha)}\}_{\substack{K \in \gamma' \\ \alpha \in \mathcal{A}_K'}}$, $\zeta^{*} = \{\zeta_K^{(\alpha)}\}_{\substack{K \in \gamma^{*} \\ \alpha \in \mathcal{A}_K^{*}}}$, где $\zeta_K^{(\alpha)} \in R$.

---

*) Подразумевается, что подобные равенства здесь и в дальнейшем имеют место с точностью до множества лебеговой меры нуль.

Обозначим через $M_0 : \omega \times \mathbb{R}^{d'} \longrightarrow \mathbb{R}$ функцию, которая получается из функции $M(x, \zeta_1, \ldots, \zeta_\tau)$, $\zeta_\kappa \in \mathbb{R}$ $\forall \kappa = 1, \ldots, \tau$, если в последней все ζ_κ при $\kappa \bar{\in} \gamma'$ заменить нулем.

Гипотеза 2.

$$M_0\Big(x, \big\{\chi_{\omega_\kappa}(x) \sum_{\alpha \in \mathcal{A}'_\kappa} \zeta_\kappa^{(\alpha)} \sigma^{(\alpha)}(x)\big\}_{\kappa \in \gamma'}\Big) \in L_1(\check{\omega}(\hat{x}))$$

$$\forall \hat{x} \in \hat{\omega}, \quad \forall \zeta_\kappa^{(\alpha)} \in \mathbb{R}.^{*)}$$

Образуем функцию

$$\hat{M}(\hat{x}, \zeta') = \int\limits_{\check{\omega}(\hat{x})} M_0\Big(x, \big\{\chi_{\omega_\kappa}(x) \sum_{\alpha \in \mathcal{A}'_\kappa} \zeta_\kappa^{(\alpha)} \sigma^{(\alpha)}(x)\big\}_{\kappa = 1, \ldots, \tau}\Big) d\check{x}. \tag{6}$$

Введем обозначения для $\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{T}_0$:

$$\mathcal{L}'(\hat{x}) = \big\{\mathcal{L}_\kappa^{(\alpha)}(\hat{x})\big\}_{\substack{\kappa \in \gamma' \\ \alpha \in \mathcal{A}'_\kappa}}, \quad \mathcal{E}'(\hat{x}) = \big\{\mathcal{E}_\kappa^{(\alpha)}(\hat{x})\big\}_{\substack{\kappa \in \gamma' \\ \alpha \in \mathcal{A}'_\kappa}},$$

$$\mathcal{E}^*(\hat{x}) = \big\{\mathcal{E}_\kappa^{(\alpha)}(\hat{x})\big\}_{\substack{\kappa \in \gamma^* \\ \alpha \in \mathcal{A}^*_\kappa}}, \quad \pi'(\hat{x}) = \big\{\pi_\kappa^{(\alpha)}(\hat{x})\big\}_{\substack{\kappa \in \gamma' \\ \alpha \in \mathcal{A}'_\kappa}},$$

так что на множестве $\hat{\omega}$ имеет место равенство

$$\mathcal{L}'(\hat{x}) = \mathcal{E}^*(\hat{x}) + \pi'(\hat{x}) \qquad \forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{T}_0.$$

Зафиксируем переменную N-функцию $\tilde{M} : \hat{\omega} \times$ (пространство переменных ζ^*) $\longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую Δ'_2-условию [2] .

---

*) Символом $\chi_{\omega_\kappa}(x)$ обозначена, как обычно, характеристическая функция множества ω_κ .

Гипотеза 3. Возможны только такие деформации тела Ω, для которых $\varepsilon^*(\hat{x}) \in L_{\tilde{M}}(\hat{\omega})$.

Гипотеза 4. Функция $\hat{M}: \hat{\omega} \times$(пространство переменных ζ^*)$\longrightarrow R$ выпукла на пространстве переменных ζ^* при каждом фиксированном $\hat{x} \in \hat{\omega}$ и оператор суперпозиции, порожденный функцией $\hat{M}$, непрерывно отображает пространство $L_{\tilde{M}}(\hat{\omega})$ в пространство $L_1(\hat{\omega})$. *)

Обозначим через $\mathcal{R}$ совокупность таких вектор-функций $\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{T}_0$, для которых $\varepsilon^*(\hat{x}) \in L_{\tilde{M}}(\hat{\omega})$.

Введем на $\mathcal{R}$ полунорму, определяемую для каждой вектор-функции $\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{R}$ равенством:

$$\rho(\mathcal{U}) = \|\varepsilon^*(\hat{x})\|_{L_{\tilde{M}}(\hat{\omega})}. \tag{7}$$

Введем также операторы ε^*, ε' и π', действующие на вектор-функции $\mathcal{U}(\hat{x})$ из $\mathcal{R}$ соответственно по формулам: $\mathcal{U}(\hat{x}) \longrightarrow \varepsilon^*(\hat{x})$, $\mathcal{U}(\hat{x}) \longrightarrow \varepsilon'(\hat{x})$ и $\mathcal{U}(\hat{x}) \longrightarrow \pi'(\hat{x})$.

Пусть тело Ω подчинено некоторым связям так, что для соответствующих возможных деформаций вектор-функция $\mathcal{U}(\hat{x})$ принадлежит непустому подмножеству $\mathfrak{M}$ в $\mathcal{R}$, причем

$$\hat{M}(\hat{x}, \varepsilon^*(\mathcal{V}) + \pi'(\mathcal{U})) \in L_1(\hat{\omega}) \qquad \forall \mathcal{U}(\hat{x}), \mathcal{V}(\hat{x}) \in \mathfrak{M}. \tag{8}$$

Пусть, далее, тело Ω подвержено действию некоторых внешних сил, работа которых при деформации с достаточной степенью точности может быть подсчитана по формуле $<\mu(\mathcal{U}), \mathcal{U}>$, где $\mathcal{U} \in \mathcal{R}$, а $\mu(\mathcal{U})$- линейный функционал на $\mathcal{R}$, так что потенциальная энергия $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ тела Ω выражается равенством:

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}) = \int\limits_{\hat{\omega}} \hat{M}(\hat{x}, \mathcal{L}'(\hat{x}))d\hat{x} - <\mu(\mathcal{U}), \mathcal{U}> \qquad \forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathfrak{M}. \tag{9}$$

Образуем на множестве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ функционал

---

*) Для непрерывности отображения указанного оператора суперпозиции из $L_{\tilde{M}}(\hat{\omega})$ в $L_1(\hat{\omega})$ достаточно, чтобы этот оператор отображал $L_{\tilde{M}}(\hat{\omega})$ в $L_1(\hat{\omega})$ и функция $\hat{M}$ удовлетворяла условию Каратеодори [4, с.193-202].

$$\mathcal{E}(\mathcal{E}.\mathcal{V}) = \int\limits_{\hat{\omega}} \hat{M}(\hat{x}, \varepsilon^*(\mathcal{V}) + \pi'(\mathcal{U}))d\hat{x} - \langle \mu(\mathcal{U}), \mathcal{U} \rangle.$$

5°. Зададим оператор $\mathcal{B} : \mathfrak{M} \longrightarrow \Psi$, отображающий множество $\mathfrak{M}$ в непустое множество Ψ произвольной природы. Пусть $\psi \in \mathcal{B}(\mathfrak{M})$. Нас будут интересовать такие положения равновесия $\mathcal{U}(\hat{x})$ тела Ω, для которых $\mathcal{B}(\mathcal{U}) = \psi$.

Пусть X - векторное подпространство в $\mathcal{R}$ такое, что имеет место импликация

$$\{\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{M},\ \mathcal{B}(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathcal{V})\} \Longrightarrow \{(\mathcal{U} - \mathcal{V}) \in X\}.$$

Предположим, что найдется такая полунорма $\nu : X \longrightarrow R$, что $\rho + \nu$ - норма на X и относительно этой нормы X - банахово пространство, причем каждая ограниченная в X по норме $\rho + \nu$ последовательность содержит подпоследовательность, фундаментальную относительно полунормы ν. Тогда можно доказать (см. [3]), что подпространство $X \cap \ker \rho$ конечномерно и на любом замкнутом векторном подпространстве X_0 в X таком, что $X = X_0 \oplus (X \cap \ker \rho)$, полунорма ρ эквивалентна норме $\rho + \nu$. Пусть X_0 - указанное выше подпространство в X, $\Pi : X \xrightarrow{\text{на}} X \cap \ker\rho$ и $\Pi_0 : X \xrightarrow{\text{на}} X_0$ - линейные проекционные операторы такие, что $\Pi + \Pi_0 = I_X$, где I_X - тождественный оператор на X.

Положим $\mathfrak{M}^{(\psi)} = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{M} \mid \mathcal{B}(\mathcal{U}) = \psi\}$ Зафиксируем элемент $\mathcal{U}^{(0)} \in \mathfrak{M}^{(\psi)}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}} = \mathfrak{M}^{(\psi)} - \mathcal{U}^{(0)}$, расположенное, очевидно, в подпространстве X.

Пусть подпространство X рефлексивно, а $\Pi_0(\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}})$ - слабо замкнутое подмножество в X_0. Пусть, далее, выполнено следующее

Условие А. Для любой последовательности $\{\mathcal{U}^{(\ell)}\} \subset \mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}}$ такой, что $\Pi_0 \mathcal{U}^{(\ell)} \longrightarrow \mathcal{V} \in \Pi_0(\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}})$ слабо в X_0, найдутся такая ее подпоследовательность, которую мы обозначим тем же символом, и такой элемент $W \in X \cap \ker\rho$ что $\mathcal{V} + W \in \mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}}$ и

$$\underline{\lim_{l\to\infty}} \inf_{\xi\in\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}},\ \rho(\xi)\le\rho} \Big(\mathfrak{Э}(\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{U}^{(l)},\ \mathcal{U}^{(0)}+\xi) -$$

$$-\mathfrak{Э}(\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{V}+W\ \mathcal{U}^{(0)}+\xi)\Big)\geq 0 \quad \forall\rho>0. \tag{10}$$

Справедлива

Теорема 1. Пусть либо $\sup_{\mathcal{U}\in\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}}} \rho(\mathcal{U}) < +\infty$, либо $\sup_{\mathcal{U}\in\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}}} \rho(\mathcal{U}) = +\infty$ и

$$\underline{\lim}_{\mathcal{U}\in\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}},\ \rho(\mathcal{U})\to+\infty} \mathfrak{Э}(\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{U}) > \inf_{\mathcal{U}\in\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}}} \mathfrak{Э}(\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{U}).$$

Тогда $\exists\,\mathcal{U}(\hat{x})\in\mathfrak{M}^{(\psi)}:\ \mathfrak{Э}(\mathcal{U}) = \inf_{\mathcal{V}(\hat{x})\in\mathfrak{M}^{(\psi)}} \mathfrak{Э}(\mathcal{V}).$

Доказательство. Теорема будет доказана, если мы установим существование такого элемента $\mathcal{U}(\hat{x})\in\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}}$, для которого

$$\mathfrak{Э}(\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{U}) = \inf_{\mathcal{V}(\hat{x})\in\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}}} \mathfrak{Э}(\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{V}).$$

Пусть $\{\mathcal{U}^{(l)}\}$ - минимизирующая последовательность функционала $\mathfrak{Э}(\mathcal{U}^{(0)}+\,\cdot\,)$ на множестве $\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}}$. В силу условия теоремы, эта последовательность ограничена по полунорме ρ. Поскольку множество $\Pi_0(\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}})$ слабо замкнуто в X_0, а подпространство X рефлексивно, из последовательности $\Pi_0\,\mathcal{U}^{(l)}$ можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $\mathcal{V}(\hat{x})\in\Pi_0\,(\mathfrak{M}^{(\psi)}_{\mathcal{U}^{(0)}})$ Подпоследовательность, для которой выписано неравенство (10) в условии А, мы будем обозначать тем же символом $\{\mathcal{U}^{(\ell)}\}$, что и исходную минимизирующую последовательность функционала $\mathcal{J}(\mathcal{U}^{(0)}+\bullet)$. Положим $\mathcal{U}=\mathcal{V}+W$, где W - элемент из условия А. Имеем следующее очевидное неравенство:

$$\varliminf_{\ell\to\infty}\left(\mathcal{J}(\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{U}^{(\ell)})-\mathcal{J}(\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{U})\right)\geq$$

$$\geq\varliminf_{\ell\to\infty}\left(\mathcal{J}(\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{U}^{(\ell)})-\mathcal{J}(\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{U},\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{U}^{(\ell)})\right)+$$

$$+\varliminf_{\ell\to\infty}\left(\mathcal{J}(\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{U},\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{U}^{(\ell)})-\mathcal{J}(\mathcal{U}^{(0)}+\mathcal{U})\right). \tag{11}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (11) неотрицательно, в силу условия А, а второе неотрицательно в силу выпуклости функции $\widetilde{M}$ по аргументу ζ^*.

Теорема доказана.

6°. В конкретных задачах теории упругости условие А может быть проверено весьма просто на основе теорем о компактности вложения одного функционального пространства в другое, если выполнено

Условие Б. Пусть какое-нибудь слагаемое в (5) "сосредоточено" на измеримом подмножестве Q в $\hat{\omega}$. Тогда если оно содержит множитель одного из видов:

1) $\left(U_\ell^{(\beta)}(\hat{x})\right)^{\theta_\ell^{(\beta)}}$, где $\beta\in\mathcal{A}_0$, $\ell\leq m$ и $\theta_\ell^{(\beta)}\in N$;

или

2) $\left(U_\ell^{(\beta)}(\hat{x})\right)^{\theta_\ell^{(\beta)}}$, где $\beta\in\mathcal{A}_0$, $\ell>m$ и $\theta_\ell^{(\beta)}\in N$;

или

3) $\dfrac{\partial U_\ell^{(\beta)}(\hat{x})}{\partial x_i}$, где $\beta\in\mathcal{A}_0$, $\ell>m$, $i<m$, то для

каждой точки $\hat{x}^{(0)}\in Q$ найдется открытый куб $K(\hat{x}^{(0)})$ с компактным в $\hat{\omega}$ замыканием и с ребрами, параллельными координатным осям, такой, что на нем существуют в обобщенном смысле С.Л. Соболева для всех вектор-функций $\mathcal{U}(\hat{x})\in X$ соответственно 1) дифференциальные выражения $\dfrac{\partial U_i^{(\beta)}(\hat{x})}{\partial x_j}+\dfrac{\partial U_j^{(\beta)}(\hat{x})}{\partial x_i}$ $\forall i,j=1,\dots,m,\ i\leq j$; 2) производные $\dfrac{\partial U_\ell^{(\beta)}(\hat{x})}{\partial x_i}$ $\forall i=1,\dots,m$; 3) производные $\dfrac{\partial^2 U_\ell^{(\beta)}(\hat{x})}{\partial x_i\,\partial x_\lambda}$ $\forall\lambda=1,\dots,m$, причем с константой $\delta>0$, не зависящей от $\mathcal{U}(\hat{x})\in X$, имеют место соответственно неравенства:

1) $$\delta \sum_{\substack{i,j=1,\dots,m\\ i\le j}} \left\| \frac{\partial U_i^{(\beta)}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^{(\beta)}}{\partial x_i} \right\|_{L_1(K(\hat{x}^{(0)}))} \le$$

$$\le \sum_{\substack{\alpha\in A_0\\ k=1,\dots,n}} \| U_k^{(\alpha)} \|_{L_1(K(\hat{x}^{(0)}))} + \rho(\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U}(\hat{x})\in X ;$$

2) $$\delta \sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{\partial U_\ell^{(\beta)}}{\partial x_i} \right\|_{L_1(K(\hat{x}^{(0)}))} \le$$

$$\le \sum_{\substack{\alpha\in A_0\\ k=1,\dots,n}} \| U_k^{(\alpha)} \|_{L_1(K(\hat{x}^{(0)}))} + \rho(\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U}(\hat{x})\in X ;$$

3) $$\delta \sum_{\lambda=1}^{m} \left\| \frac{\partial^2 U_\ell^{(\beta)}}{\partial x_\lambda \partial x_i} \right\|_{L_1(K(\hat{x}^{(0)}))} \le$$

$$\le \sum_{\substack{\alpha\in A_0\\ k=1,\dots,n}} \| U_k^{(\alpha)} \|_{L_1(K(\hat{x}^{(0)}))} + \rho(\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U}(\hat{x})\in X .$$

Проверка выполнения неравенства 3) в условии Б облегчается, если

а) найдется индекс $\alpha\in A_0$ такой, что в кубе $K(\hat{x}^{(0)})$ существуют в обобщенном соболевском смысле для каждой вектор-функции $\mathcal{U}(\hat{x})\in X$ дифференциальные выражения

$$\frac{\partial U_i^{(\alpha)}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^{(\alpha)}}{\partial x_i} \quad \forall i,j=1,\dots,m,\ i\le j ;$$

б) справедливо неравенство

$$\delta_0 \sum_{\substack{\lambda, j=1,\dots,m\\ \lambda \leq j}} \left\| \frac{\partial U_\lambda^{(\alpha)}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^{(\alpha)}}{\partial x_\lambda} \right\|_{L_1(K(\hat{x}^{(0)}))} \leq \sum_{\substack{\gamma \in A_0\\ k=1,\dots,n}} \| U_k^{(\gamma)} \|_{L_1(K(\hat{x}^{(0)}))} + p(\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in X$$

с константой $\delta_0 > 0$, не зависящей от $\mathcal{U}(\hat{x}) \in X$;

в) для каждой вектор-функции $\mathcal{U}(\hat{x}) \in X$ в кубе $K(\hat{x}^{(0)})$ $\forall \lambda = 1, \dots, m$ существуют обобщенные производные $\dfrac{\partial U_\ell^{(\beta)}}{\partial x_\lambda}$ и имеют место тождества

$$U_\lambda^{(\alpha)}(\hat{x}) \equiv S_{\alpha,\beta}^{(\ell,i,\lambda)}(\hat{x}) \frac{\partial U_\ell^{(\beta)}}{\partial x_\lambda} + \left(A_{\alpha,\beta}^{(\ell,i,\lambda)}(\hat{x}), \mathcal{U}\right), \tag{12}$$

где функция $S_{\alpha,\beta}^{(\ell,i,\lambda)}(\hat{x})$ и компоненты вектор-функции $A_{\alpha,\beta}^{(\ell,i,\lambda)}(\hat{x})$ принадлежат пространству $L_1(K(\hat{x}^{(0)}))$, причем

$$S_{\alpha,\beta}^{(\ell,i,i)}(\hat{x}) + S_{\alpha,\beta}^{(\ell,i,\lambda)}(\hat{x}) \neq 0 \qquad \forall \hat{x} \in K(\hat{x}^{(0)}).^{*)}$$

Рассмотрим ряд примеров на применение теоремы 1.

7°. Пример 1. (Геометрически линейная теория упруго-пластической деформации гибкого тела.) Пусть $\omega_k = \omega \quad \forall k = 1, \dots, \tau$ и $\mathcal{L}(x) = \{e_{ij}(x)\}_{\substack{i,j=1,\dots,n\\ i \leq j}}$, где $e_{ij}(x) = \dfrac{\partial U_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial U_j}{\partial x_i} + (a_{ij}(x), U)$

и $a_{ij}(x)$ - вектор-функция на ω со значениями в $\mathbb{R}^n$, так что энергия деформации множества ω имеет вид

---

*) Один частный случай соотношения (12) имеет место в классической теории пластин и оболочек при выполнении гипотезы недеформируемых нормалей.

$$\partial_{\text{деф.}} = \int\limits_{\omega} M\left(x, \{e_{ij}(x)\}_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i\le j}}\right) dx.$$

Будем считать, что для некоторого $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ с достаточной степенью точности на ω имеют место соотношения:

$$U(x) = \sum_{|\alpha| \le \mathcal{N}} U^{(\alpha)}(\hat{x}) \check{x}^{\alpha}, \quad a_{ij}(x) = \sum_{|\alpha| \le \mathcal{N}} a_{ij}^{(\alpha)}(\hat{x}) \check{x}^{\alpha},$$

$$e_{ij}(x) = \sum_{|\alpha| \le \mathcal{N}} \left(\frac{\partial U_i^{(\alpha)}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^{(\alpha)}}{\partial x_i} + \sum_{\beta \le \alpha} \left(a_{ij}^{(\beta)}(\hat{x}), U^{(\alpha-\beta)}(\hat{x}) \right) \right) \check{x}^{\alpha} \tag{13}$$

при $j \le m$;

$$e_{ij}(x) = \sum_{|\alpha| \le \mathcal{N}-1} \left(\frac{\partial U_j^{(\alpha)}}{\partial x_i} + (\alpha_j + 1) U_i^{(\alpha+\theta_j)} + \sum_{\beta \le \alpha} \left(a_{ij}^{(\beta)}(\hat{x}), U^{(\alpha-\beta)}(\hat{x}) \right) \right) +$$

$$+ \sum_{|\alpha| = \mathcal{N}} \left(\frac{\partial U_j^{(\alpha)}}{\partial x_i} + \sum_{\beta \le \alpha} \left(a_{ij}^{(\beta)}(\hat{x}), U^{(\alpha-\beta)}(\hat{x}) \right) \right) \check{x}^{\alpha} \tag{14}$$

при $i \le m$, $j > m$;

$$e_{ij}(x) = \sum_{|\alpha| \le \mathcal{N}-1} \Big((\alpha_j + 1) U_i^{(\alpha+\theta_j)} + (\alpha_i + 1) U_j^{(\alpha+\theta_i)} +$$

$$+ \sum_{\beta \le \alpha} \left(a_{ij}^{(\beta)}(\hat{x}), U^{(\alpha-\beta)}(\hat{x}) \right) \Big) \check{x}^{\alpha} + \sum_{|\alpha| = \mathcal{N}} \left(\sum_{\beta \le \alpha} \left(a_{ij}^{(\beta)}(\hat{x}), U^{(\alpha-\beta)}(\hat{x}) \right) \right) \check{x}^{\alpha} \tag{15}$$

при $i > m$.

Здесь дифференциальные выражения

$$\frac{\partial U_i^{(\alpha)}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^{(\alpha)}}{\partial x_i}$$

при $|\alpha| \le N$, $j \le m$ и производные $\frac{\partial U_j^{(\alpha)}}{\partial x_i}$ при $|\alpha| \le N$, $i \le m$, $j > m$ существуют на $\hat{\omega}$ в обобщенном соболевском смысле, функции $a_{ij}^{(\alpha)}(\hat{x}) \in L_1^{loc}(\hat{\omega})$ $\forall i,j = 1,\dots,n$, $i \le j$, $|\alpha| \le N$, а символом θ_j обозначен мультииндекс, у которого компонента с номером j равна 1, а остальные компоненты равны 0.

Равенства (13) - (15) будем единообразно записывать в виде

$$e_{ij}(x) = \sum_{|\alpha| \le N} e_{ij}^{(\alpha)}(\hat{x})\check{x}^{\alpha}. \tag{16}$$

Вектор-функции $\mathcal{U}(\hat{x}) = \{U_k^{(\alpha)}(\hat{x})\}_{\substack{|\alpha| \le N \\ k=1,\dots,n}}$ с существующими в соболевском смысле дифференциальными выражениями и производными, указанными выше, образуют векторное пространство $\mathcal{T}$.

Пусть $\mathcal{T}_0$ - векторное подпространство в пространстве $\mathcal{T}$.

В соответствии с гипотезой 1 предположим, что вектор-функция $\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{T}_0$

Отметим, что если $\mathcal{T}_0$ есть совокупность таких вектор-функций $\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{T}$, для которых $e_{ij}(x) \equiv 0$ на ω $\forall i,j = 1,\dots,n$, $j > m$, или, что то же самое, $e_{ij}^{(\alpha)}(\hat{x}) \equiv 0$ на $\hat{\omega}$ $\forall i,j = 1,\dots,n$, $j > m$, $\forall \alpha : |\alpha| \le N$, то гипотеза 1 при $m = 2$, $n = 3$, $N = 1$ в классической теории пластин и оболочек называется гипотезой недеформируемых нормалей.

Для каждой пары (i,j), $i,j \in \mathbb{N}$, $i \le j \le n$, зафиксируем подмножество A_{ij}^* множества тех мультииндексов $\alpha = (\alpha_{m+1},\dots,\alpha_n)$, у которых $|\alpha| \le N$, обладающее таким свойством: дифференциальное выражение, стоящее в разложении $e_{ij}(x)$ по степеням $\check{x}^{\alpha}$ при $\check{x}^{\alpha}$ тождественно равно нулю на $\hat{\omega}$ $\forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{T}_0$, если $\alpha \bar{\in} A_{ij}^*$.

Введем множество

$$\gamma^* = \{(i,j) : i,j \in \mathbb{N},\ i \le j \le n,\ A_{ij}^* \ne \emptyset\}.$$

Пусть $\gamma^* \ne \emptyset$ и d^* - число элементов множества γ^*. Образуем функцию $M_0 : \omega \times R^{d^*} \to R$, которая получается из функции

$M\left(x,\{\zeta_{ij}\}_{\substack{i,j\\ i\neq j}\ 1,\dots,n}\right), \zeta_{ij}\in R$, если в последней все ζ_{ij} при $(i,j)\in \mathcal{Y}^*$ заменить нулем.

В соответствии с гипотезой 2 потребуем, чтобы

$$M_0\left(x,\{\sum_{\alpha\in A^*_{ij}}\zeta_{ij}^{(\alpha)}\check{x}^{\alpha}\}_{(i,j)\in\mathcal{Y}^*}\right)\in L_1(\check{\omega}(\hat{x}))\quad \forall\hat{x}\in\hat{\omega},\ \forall\zeta_{ij}^{(\alpha)}\in R.$$

Образуем функцию

$$\hat{M}(\hat{x},\zeta^*)=\int_{\hat{\omega}(\hat{x})}M_0\left(x,\{\sum_{\alpha\in A^*_{ij}}\zeta_{ij}^{(\alpha)}\check{x}^{\alpha}\}_{(i,j)\in\mathcal{Y}^*}\right)d\check{x},$$

где $\zeta^*=\{\zeta_{ij}^{(\alpha)}\}_{\substack{(i,j)\in\mathcal{Y}^*\\ \alpha\in A^*_{ij}}}$, $\zeta_{ij}^{(\alpha)}\in R$, относительно которой будем

предполагать, что она удовлетворяет условию Каратеодори и выпукла на пространстве переменных ζ^* при каждом фиксированном $\hat{x}\in\hat{\omega}$ [*], причем $\forall\hat{x}\in\hat{\omega}$, $\forall\zeta^*$ выполнены неравенства:

$$|\hat{M}(\hat{x},\zeta^*)|\leq z(\hat{x})+K\tilde{M}(\hat{x},\zeta^*)\quad\text{и}\quad \tilde{M}(\hat{x},\zeta^*)\leq z(\hat{x})+K\hat{M}(\hat{x},\zeta^*),$$

где $\tilde{M}:\hat{\omega}\times$ (пространство переменных ζ^*) $\longrightarrow R$ - переменная $\mathcal{N}$-функция, удовлетворяющая Δ_2'-условию, $K\in R$, $z(\hat{x})\in L_1(\hat{\omega})$. В силу указанного предположения, имеет место гипотеза 4.

Введем обозначение

$$\varepsilon^*(\hat{x})=\{\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\hat{x})\}_{\substack{(i,j)\in\mathcal{Y}^*\\ \alpha\in A^*_{ij}}}.$$

Пусть выполнена гипотеза 3 и через $\mathcal{R}$ обозначена совокупность векторфункций $\mathcal{U}(\hat{x})\in\mathcal{T}_0$, для которых $\varepsilon^*(\hat{x})\in L_{\tilde{M}}(\hat{\omega})$.

Введем на $\mathcal{R}$ полунорму, определяемую для каждой вектор-функции

---

[*] Заметим, что выпуклость функции $\hat{M}$ на пространстве переменных ζ^* при каждом фиксированном $\hat{x}\in\hat{\omega}$ следует из выпуклости функции M_0 на пространстве переменных $\{\zeta_{ij}\}_{(ij)\in\mathcal{Y}^*}$ при каждом фиксированном $x\in\omega$.

$\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{R}$ равенством:

$$\rho(\mathcal{U}) = \| \varepsilon^*(\hat{x}) \|_{L_{\widetilde{M}}(\hat{\omega})}.$$

Положим

$$\overset{1}{\zeta}{}^* = \{\zeta_{ij}^{(\alpha)}\}_{\substack{(i,j)\in\mathcal{Y}^* \\ i\le m \\ \alpha\in\mathcal{A}_{ij}^*}}, \quad \overset{2}{\zeta}{}^* = \{\zeta_{ij}^{(\alpha)}\}_{\substack{(i,j)\in\mathcal{Y}^* \\ i>m \\ \alpha\in\mathcal{A}_{ij}^*}},$$

$$\zeta = \{\zeta_{ij}^{(\alpha)}\}_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i\le j,\, i\le m \\ |\alpha|\le N}}, \quad \bar{\zeta} = \zeta \setminus \overset{1}{\zeta}{}^*.$$

Аналогично вводятся обозначения $\overset{1}{\varepsilon}{}^*(\hat{x}), \overset{2}{\varepsilon}{}^*(\hat{x}), \varepsilon(\hat{x}), \bar{\varepsilon}(\hat{x})$ для $\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{T}_0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда наборы переменных $\overset{1}{\zeta}{}^*$ и $\overset{2}{\zeta}{}^*$ оба непусты. Случай, когда один из указанных наборов пуст, рассматривается аналогично (они более просты по сравнению с первым).

Пусть $\widetilde{M}_i : \hat{\omega} \times \{$ пространство переменных $\overset{i}{\zeta}{}^*\} \longrightarrow R$ - функция, получающаяся из функции M путем замены в последней всех аргументов набора $\zeta^* \setminus \overset{i}{\zeta}{}^*$ нулями. Индекс i пробегает здесь два значения: 1 и 2. Ясно, что M_i - г..еменная N-функция, удовлетворяющая Δ_2'-условию, $\forall i = 1,2.$ Будем предполагать, что пространство $L_{\widetilde{M}_1}(\hat{\omega})$ непрерывно вложено в пространство локально интегрируемых вектор-функций соответствующей размерности.

Запишем каждую функцию $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\hat{x}), i,j=1,\dots,n, i\le j, i\le m, |\alpha| \le N$, в виде

$$\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\hat{x}) = \mathcal{L}_{ij}^{(\alpha)}\mathcal{U}(\hat{x}) + (B_{ij}^{(\alpha)}(\hat{x}), \mathcal{U}(\hat{x})), \tag{17}$$

где $\mathcal{L}_{ij}^{(\alpha)}$ - оператор, содержащий только производные от компонент вектор-функции $\mathcal{U}(\hat{x})$, а $B_{ij}^{(\alpha)}(\hat{x})$ - вектор-функция той же размерности, что и $\mathcal{U}(\hat{x})$, локально интегрируемая на $\hat{\omega}$.

В соответствии с разложением (17) вектор-функции $\varepsilon(\hat{x}), \overset{1}{\varepsilon}{}^*(\hat{x})$, $\overset{2}{\varepsilon}{}^*(\hat{x})$ и $\bar{\varepsilon}(\hat{x})$ могут быть записаны в виде:

$$\varepsilon(\hat{x}) = \mathcal{L}\mathcal{U}(\hat{x}) + B\mathcal{U}(\hat{x}); \quad \overset{1}{\varepsilon}{}^*(\hat{x}) = \overset{1}{\mathcal{L}}{}^*\mathcal{U}(\hat{x}) + \overset{1}{B}{}^*\mathcal{U}(\hat{x});$$

$$\overset{2}{\varepsilon}{}^*(\hat{x}) = \overset{2}{B}{}^*\mathcal{U}(x), \quad \bar{\varepsilon}(\hat{x}) = \bar{\mathcal{L}}\mathcal{U}(\hat{x}) + \bar{B}\mathcal{U}(\hat{x}),$$

где $\mathcal{L}, \overset{1}{\mathcal{L}}{}^*$ и $\bar{\mathcal{L}}$ - матричные дифференциальные операторы, а $B, \overset{1}{B}{}^*, \overset{2}{B}{}^*$ и $\bar{B}$ - операторы умножения на функциональные матрицы.

Определение 2. Открытый куб в $\hat{\omega}$ с ребрами, параллельными координатным осям, и с компактным в $\hat{\omega}$ замыканием назовем допустимым.

Пусть $\mathcal{H}$ - лебегово пространство на $\hat{\omega}$, состоящее из вектор-функций той же размерности, что и вектор-функция $\mathcal{U}(\hat{x})$, а Z - лебегово пространство измеримых на $\hat{\omega}$ вектор-функций со значениями в евклидовом пространстве переменных $\bar{\xi}$ такие, что для любого допустимого куба K пространства, являющиеся сужениями пространств $\mathcal{H}$ и Z с множества $\hat{\omega}$ на куб K, непрерывно вложены в пространства интегрируемых на K вектор-функций соответствующих размерностей*) и, кроме того, $\chi_K(\hat{x})\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{H}$ $\forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{R}$. **)

Для существования полунормы ν на $\mathcal{R}$ такой, что 1) $\rho+\nu$ - норма на $\mathcal{R}$; 2) $\mathcal{R}$ - банахово пространство относительно нормы $\rho+\nu$; 3) каждая ограниченная в $\mathcal{R}$ по норме $\rho+\nu$ последовательность содержит подпоследовательность, фундаментальную относительно полунормы ν (см. п. 5^0), достаточно, чтобы выполнялись следующие условия.

Условие 1. Множество $\hat{\omega}$ связно.

Условие 2. Если K - допустимый куб и $\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{R}$, то $\chi_K(\hat{x})\overset{1}{B}{}^*\mathcal{U}(\hat{x}) \in L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})$, $\chi_K(\hat{x})B\mathcal{U}(\hat{x}) \in Z$ и имеет место неравенство

---

*) В дальнейшем нам будет нужна не лебеговость пространства Z, а более слабое свойство, заключающееся в том, что сужение Z на любой допустимый куб является замкнутым векторным подпространством в Z.

**) Это последнее условие всегда можно считать выполненным, подчиняя ему подпространство $\mathcal{T}_0$

$$\|\chi_K(\hat{x})\hat{B}^*\mathcal{U}(\hat{x})\|_{L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})}+\|\chi_K(\hat{x})\bar{B}\mathcal{U}(\hat{x})\|_Z\leq C(K)\|\chi_K(\hat{x})\mathcal{U}(\hat{x})\|_{\mathcal{H}},$$

где константа $C(K)\in\mathbb{R}$ и не зависит от $\mathcal{U}(\hat{x})$.

Условие 3. Каков бы ни был допустимый куб K , из любой последовательности $\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x}),\ \ell=1,2,\dots$, вектор-функций из $\mathcal{R}$ такой, что

$$\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\Big(\|\chi_K(\hat{x})\hat{\mathcal{L}}^*\mathcal{U}(\hat{x})\|_{L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})}+$$
$$+\|\chi_K(\hat{x})\bar{\mathcal{L}}\mathcal{U}(\hat{x})\|_Z+\|\chi_K(\hat{x})\mathcal{U}(\hat{x})\|_{\mathcal{H}}\Big)<+\infty,$$

можно извлечь подпоследовательность, фундаментальную относительно полунормы $\|\chi_K(\hat{x})\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Условие 4. Пусть K - произвольный допустимый куб; σ - компакт в $\bar{K}$; $\mathcal{H}_\sigma$ - сужение лебегова пространства $\mathcal{H}$ с множества $\hat{\omega}$ на компакт σ ; $L(\hat{x},\hat{y})$ - произвольная измеримая на $\bar{K}\times\bar{K}$ прямоугольная функциональная матрица с числом строк и числом столбцов, равными соответственно размерностям пространств значений вектор-функций из $\mathcal{H}$ и из $B(\mathcal{H})$, причем имеет место оценка

$$|L(\hat{x},\hat{y})||\hat{x}-\hat{y}|^{m-1}\leq C(K) \tag{18}$$

для почти всех $(\hat{x},\hat{y})\in\hat{\omega}\times\hat{\omega}$ с константой $C(K)\in\mathbb{R}$, не зависящей от $(\hat{x},\hat{y})\in\hat{\omega}\times\hat{\omega}$.

Тогда $|L(\hat{x},\hat{y})B\mathcal{U}(\hat{y})|\in L_1(\sigma)$ для почти всех $\hat{x}\in\sigma$, оператор, действующий по формуле

$$\mathcal{U}(\hat{x}) \longrightarrow -\int_{6} L(\hat{x},\hat{y}) B\,\mathcal{U}(\hat{y})\,d\hat{y}, \tag{19}$$

непрерывно отображает пространство $\mathcal{H}_6$ в себя и норма этого оператора стремится к нулю при $mes \longrightarrow 0$ *) (на самом деле для дальнейшего достаточно требовать, чтобы верхний предел указанной нормы при $mes\,\sigma \longrightarrow 0$ был <1).

Условие 5. Пусть $\lambda(\hat{x})$ - заданная на $\hat{\omega}$ вещественная положительная в каждой точке $\hat{x} \in \hat{\omega}$ функция из пространства $L_{\infty}^{loc}(\hat{\omega})$, обладающая тем свойством, что $\dfrac{\mathcal{U}(\hat{x})}{\lambda(\hat{x})} \in \mathcal{H}$ $\forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{R}$.

Пусть $\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x})$, $\ell = 1,2,\ldots$, - фундаментальная последовательность вектор-функций из $\mathcal{R}$ и $\mathcal{U}(\hat{x})$ - вектор-функция, заданная на $\hat{\omega}$, такие, что а) $\dfrac{\mathcal{U}(\hat{x})}{\lambda(\hat{x})} \in \mathcal{H}$; б) $\lim\limits_{\ell \to \infty} \left\| \dfrac{\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x}) - \mathcal{U}(\hat{x})}{\lambda(\hat{x})} \right\|_{\mathcal{H}} = 0$; в) у вектор-функции $\mathcal{U}(\hat{x})$ существует на $\hat{\omega}$ в обобщенном соболевском смысле дифференциальный оператор $\mathcal{L} = (\overset{1}{\mathcal{L}}{}^{*}, \bar{\mathcal{L}})$; г) для любого допустимого куба K :

$$\chi_K(\hat{x})\overset{1}{\mathcal{L}}{}^{*}\mathcal{U}(\hat{x}) \in L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega}), \quad \chi_K(\hat{x})\bar{\mathcal{L}}\,\mathcal{U}(\hat{x}) \in Z,$$

$$\chi_K \overset{1}{B}{}^{*}\mathcal{U}(\hat{x}) \in L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega}), \quad \chi_K(\hat{x})\bar{B}\,\mathcal{U}(\hat{x}) \in Z$$

и

$$\lim_{\ell \to \infty}\Big(\|\chi_K(\hat{x})(\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x}) - \mathcal{U}(\hat{x}))\|_{\mathcal{H}} + \|\chi_K(\hat{x})\overset{1}{\mathcal{L}}{}^{*}(\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x}) - \mathcal{U}(\hat{x}))\|_{L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})} +$$

$$+ \|\chi_K(\hat{x})\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x}) - \mathcal{U}(\hat{x}))\|_Z + \|\chi_K(\hat{x})\overset{1}{B}{}^{*}(\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x}) - \mathcal{U}(\hat{x}))\|_{L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})} +$$

$$+ \|\chi_K(\hat{x})\bar{B}(\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x}) - \mathcal{U}(\hat{x}))\|_Z\Big) = 0;$$

д) $\mathcal{L}^{*}\mathcal{U}(\hat{x}) + \overset{1}{B}{}^{*}\mathcal{U}(x) \in L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})$, $\overset{2}{B}{}^{*}\mathcal{U}(\hat{x}) \in L_{\tilde{M}_2}(\hat{\omega})$ и

$$\lim_{\ell \to \infty} \rho(\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x}) - \mathcal{U}(\hat{x})) = 0.$$

---

*) Достаточные условия для этого приведены в [7, с.416-419] .

Тогда $\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{T}_0$ *)

Зафиксируем допустимый куб $K^{(0)}$ и введем на $\mathcal{R}$ полунорму ν, определяемую $\forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{R}$ равенством:

$$\nu(\mathcal{U}(\hat{x})) = \|\chi_{K^{(0)}}(\hat{x})\,\mathcal{U}(\hat{x})\|_{\mathcal{X}}.$$

Покажем, что при выполнении перечисленных условий 1) - 5) эта полунорма обладает требуемыми свойствами.

Нам потребуется следующая

Лемма 1. Пусть S - векторное пространство, на котором заданы две полунормы ξ и η такие, что полунорма $\xi + \eta$ является нормой на S и S полно относительно этой нормы. Пусть, далее, всякая последовательность, ограниченная по норме $\xi + \eta$, содержит подпоследовательность, фундаментальную относительно полунормы ξ. Пусть, наконец, на S задана еще полунорма η', которая является нормой на подпространстве $\ker \xi$ и удовлетворяет неравенству:

$$\eta'(u) \leqslant C(\xi(u) + \eta(u)) \qquad \forall u \in S,$$

где константа $C \in \mathbb{R}$ и не зависит от $u \in S$. Тогда полунорма $\xi + \eta'$ является нормой на S, эквивалентной норме $\xi + \eta$.

Из леммы 1 следует, что каковы бы ни были допустимые кубы K' и K, $K' \subset K$, имеет место неравенство

$$\|\chi_K(\hat{x})\,\mathcal{U}(\hat{x})\|_{\mathcal{X}} \leqslant C(K',K)\Big(\|\chi_{K'}(\hat{x})\,\mathcal{U}(\hat{x})\|_{\mathcal{X}} +$$

$$+ \|\chi_K(\hat{x})\,\acute{\varepsilon}^*(\hat{x})\|_{L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})}\Big) \qquad \forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{R} \tag{20}$$

с константой $C(K',K) \in \mathbb{R}$, не зависящей от $\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{R}$.

---

*) Требование принадлежности вектор-функции $\mathcal{Y}(\hat{x})$ подпространству $\mathcal{T}_0$ равносильно в данном случае требованию принадлежности ее подпространству $\mathcal{R}$

Действительно, обозначая через S векторное пространство сужений вектор-функций из $\mathcal{R}$ с $\hat{\omega}$ на K, вводя на S полунормы q', q и ξ, определяемые на вектор-функциях $\mathcal{U}(\hat{x}) \in S$ равенствами

$$q'(\mathcal{U}) = \|\chi_{K'}\mathcal{U}\|_{\mathfrak{X}}, \quad q(\mathcal{U}) = \|\chi_K \mathcal{U}\|_{\mathfrak{X}}, \quad \xi(\mathcal{U}) = \|\chi_K \mathcal{E}^*\|_{L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})},$$

пользуясь условиями 2-4 и применяя лемму 1, получаем неравенство (20).

Как действуют условия 2 и 3, почти очевидно.

Условие 4 применяется для доказательства того факта, что полунорма q' при $K' \neq K$ является нормой на подпространстве $\ker \xi$. Делается это следующим образом. Пусть $\mathcal{U}(\hat{x}) \in S$ и $\xi(\mathcal{U}) = 0$. Это означает, что $\mathcal{L}\mathcal{U}(\hat{x}) + \mathcal{B}\mathcal{U}(\hat{x}) = 0$ на K *). Пусть, кроме того, $q'(\mathcal{U}) = 0$ или, что то же самое, $\mathcal{U}(\hat{x}) \equiv 0$ на K'. Требуется доказать, что $\mathcal{U}(\hat{x}) = 0$ на K. Воспользуемся известным интегральным представлением вектор-функции $\mathcal{U}(\hat{x})$ через вектор-функцию $\mathcal{L}\mathcal{U}(\hat{x})$ (см. [5,6]), выбрав его в виде:

$$\mathcal{U}(\hat{x}) = \int_K L(\hat{x},\hat{y})\,\mathcal{L}\mathcal{U}(\hat{y})\,d\hat{y}, \tag{21}$$

где $L(\hat{x},\hat{y})$ - измеримая на $K \times K$ функциональная матрица, удовлетворяющая неравенству (18) и обладающая следующим свойством: если $\hat{x} \in \bar{K}'$, то $L(\hat{x},\hat{y}) = 0$ для почти всех $\hat{y} \in K$, а если $\hat{x} \bar{\in} \bar{K}'$, то $L(\hat{x},\hat{y}) = 0$ для почти всех $\hat{y} \in (K \setminus T_{\hat{x}}) \cup \bar{K}'$ (здесь $T_{\hat{x}}$ - конус с вершиной в точке $\hat{x}$, натянутый на куб $\bar{K}'$). Представление (21) перепишем в виде:

$$\mathcal{U}(\hat{x}) = -\int_K L(\hat{x},\hat{y})\,\mathcal{B}\mathcal{U}(\hat{y})\,d\hat{y}. \tag{22}$$

Положим $\delta_0 = \operatorname{mes}(K \setminus K')$. Поскольку, по предположению $K \neq K'$, то $\delta_0 > 0$. В силу условия 4, выберем $\tau \in \mathbb{N}$ так, чтобы норма оператора (19) была < 1 при $\operatorname{mes} \sigma \leq \delta_0/\tau$.

Введем следующее обозначение $\forall t \in \mathbb{R},\ t \geq 0$:

---

*) Здесь и в дальнейшем подразумевается, что подобные равенства имеют место почти везде на указанном множестве.

$$K_t = \{\hat{x} \in K \mid \rho(\hat{x}, K') \leq t\}.$$

Выберем вещественные числа $t_0 = 0,\ t_1 > 0,\ t_2 > t_1, \ldots, t_{r-1} > t_{r-2},\ t_r > t_{r-1}$ так, чтобы $mes(K_{t_j} \setminus K_{t_{j-1}}) = \delta_0/r \quad \forall j = 1, \ldots, r$. Зададим компактные в K множества $\sigma_0 = \bar{K}'$ и $\sigma_j = K_{t_j} \setminus K_{t_{j-1}} \quad \forall j = 1, \ldots, r$. Ясно, что $K_{t_r} = \bar{K}$. Докажем индукцией по $j = 0, 1, \ldots, r$, что вектор-функция $\mathcal{U}(\hat{x}) = 0$ на множестве K_{t_j}. При $j = 0$ это утверждение верно, поскольку $K_{t_0} = K'$. Пусть теперь оно верно при некотором целом j_0, $0 \leq j_0 < r$. Установим его справедливость при $j = j_0 + 1$. Рассмотрим тождество (22) при $\hat{x} \in K_{t_{j_0+1}}$. Его, в силу предположения индукции, можно переписать в виде

$$\mathcal{U}(\hat{x}) = -\int\limits_{\sigma_{j_0+1}} L(\hat{x}, \hat{y}) B \mathcal{U}(\hat{y}) d\hat{y}. \tag{23}$$

Норма оператора, действующего на $\mathcal{U}(\hat{x})$ в правой части тождества (23), < 1, так что $\|\mathcal{U}(\hat{x})\|_{\mathcal{X}_{\sigma_{j_0+1}}} = 0$ и, значит, $\mathcal{U}(\hat{x}) = 0$ на σ_{j_0+1}. Так как, кроме того, по предположению, $\mathcal{U}(\hat{x}) = 0$ на $K_{t_{j_0}}$, то $\mathcal{U}(\hat{x}) = 0$ на $K_{t_{j_0+1}}$ в силу равенства $K_{t_{j_0+1}} = K_{t_{j_0}} \cup \sigma_{j_0+1}$.

При $j = r$ получаем интересующее нас утверждение.

Из неравенства (20) и условия 1 следует существование такой заданной на $\hat{\omega}$ вещественной положительной в каждой точке $\hat{x} \in \hat{\omega}$ функции $\lambda(\hat{x}) \in L_\infty^{loc}(\hat{\omega})$, что $\dfrac{\mathcal{U}(\hat{x})}{\lambda(\hat{x})} \in \mathcal{X} \quad \forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{R}$ и имеет место неравенство

$$\left\| \frac{\mathcal{U}(\hat{x})}{\lambda(\hat{x})} \right\|_{\mathcal{X}} \leq \rho(\mathcal{U}(\hat{x})) + \nu(\mathcal{U}(\hat{x})), \tag{24}$$

из которого следует, что полунорма $\rho + \nu$ является нормой на $\mathcal{R}$, причем, в силу условий 2 и 3, любая последовательность, ограниченная по норме $\rho + \nu$, содержит подпоследовательность, фундаментальную относительно полунормы ν.

Нам осталось доказать только полноту пространства $\mathcal{R}$ относительно нормы $p+\nu$. Воспользуемся для этого условием 5.

Пусть $\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x})$, $\ell = 1, 2, \ldots,$ - фундаментальная последовательность вектор-функций из $\mathcal{R}$. Из неравенства (24) и полноты пространства $\mathcal{H}$ следует существование такой заданной на $\hat{\omega}$ вектор-функции $\mathcal{U}(\hat{x})$, что имеют место соотношения а) и б условия 5.

В силу неравенства (20), для любого допустимого куба K имеет место соотношение

$$\lim_{\ell,k\to\infty} \|\chi_K(\hat{x})(\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x})-\mathcal{U}^{(k)}(\hat{x}))\|_{\mathcal{H}}=0,$$

откуда с учетом полноты пространства $\mathcal{H}$ и соотношения б) условия 5, следует, что

$$\lim_{\ell\to\infty} \|\chi_K(\hat{x})(\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x})-\mathcal{U}(\hat{x}))\|_{\mathcal{H}}=0. \tag{25}$$

Воспользовавшись условием 2, фундаментальностью последовательности $\{\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x})\}$ относительно полунормы p и соотношением (25), получим равенство

$$\lim_{\ell,k\to\infty}\Big(\|\chi_K(\hat{x})\overset{1}{\mathcal{L}}{}^*(\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x})-\mathcal{U}^{(k)}(\hat{x}))\|_{L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})}+$$

$$+\|\chi_K(\hat{x})(\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x})-\mathcal{U}^{(k)}(\hat{x}))\|_Z+$$

$$+\|\chi_K(\hat{x})\overset{1}{B}{}^*(\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x})-\mathcal{U}^{(k)}(\hat{x}))\|_{L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})}+$$

$$+\|\chi_K(\hat{x})\overline{B}(\mathcal{U}^{(\ell)}(\hat{x})-\mathcal{U}^{(k)}(\hat{x}))\|_Z\Big)=0. \tag{26}$$

В силу (26) и полноты сужений пространств $L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})$ и Z с $\hat{\omega}$ на K, найдутся вектор-функции $\overset{1}{V}{}^*(\hat{x}), \overset{1}{W}{}^*(\hat{x})\in L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})$ и $\overline{V}(\hat{x}), \overline{W}(\hat{x})\in Z$ равные нулю вне куба K и такие, что

$$\lim_{l\to\infty}\Big(\|\chi_K(\hat{x})(\overset{1}{\mathcal{L}}{}^*\mathcal{U}^{(l)}(\hat{x})-\overset{1}{\vartheta}{}^*(\hat{x}))\|_{L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})}+$$

$$+\|\chi_K(\hat{x})(\bar{\mathcal{L}}\mathcal{U}^{(l)}(\hat{x})-\bar{\vartheta}(\hat{x}))\|_Z+$$

$$+\|\chi_K(\hat{x})(\overset{1}{B}{}^*\mathcal{U}^{(l)}(\hat{x})-\overset{1}{W}{}^*(\hat{x}))\|_{L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})}+$$

$$+\|\chi_K(\hat{x})(\bar{B}\mathcal{U}^{(l)}(\hat{x})-\bar{W}(\hat{x}))\|_Z\Big)=0\,. \tag{27}$$

Поскольку сужения пространств $L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})$ и Z с $\hat{\omega}$ на K непрерывно вложены в пространства интегрируемых на K вектор-функций соответствующих размерностей, то из соотношений (25) и (27) следует, что 1) на K имеют место равенства

$$\overset{1}{W}{}^*(\hat{x})=\overset{1}{B}{}^*\mathcal{U}(\hat{x}),\ \ \bar{W}(\hat{x})=\bar{B}\mathcal{U}(\hat{x}); \tag{28}$$

2) вектор-функция $\mathcal{U}(\hat{x})$ имеет на K (а, значит, в силу произвольного выбора куба K, и на всем множестве $\hat{\omega}$) обобщенный в соболевском смысле дифференциальный оператор $\mathcal{L}=(\overset{1}{\mathcal{L}}{}^*,\bar{\mathcal{L}})$, и на K имеют место равенства

$$\overset{1}{\vartheta}{}^*(\hat{x})=\overset{1}{\mathcal{L}}{}^*\mathcal{U}(\hat{x}),\quad \bar{\vartheta}(\hat{x})=\bar{\mathcal{L}}\mathcal{U}(\hat{x}). \tag{29}$$

Таким образом, соотношения в) и г) из условия 5 выполнены.

Докажем выполнение соотношения д) из этого условия. Из полноты пространств $L_{\tilde{M}_i}(\hat{\omega})$, $i=1,2$, следует существование таких вектор-функций $\overset{i}{\Xi}{}^*(\hat{x})\in L_{\tilde{M}_i}(\hat{\omega})$, $i=1,2$, что

$$\lim_{l\to\infty}\Big(\|\overset{1}{\mathcal{L}}{}^*\mathcal{U}^{(l)}(\hat{x})+\overset{1}{B}{}^*\mathcal{U}^{(l)}(\hat{x})-\overset{1}{\Xi}{}^*(\hat{x})\|_{L_{\tilde{M}_1}(\hat{\omega})}+$$

$$+\|\overset{2}{B}{}^{*}\mathcal{U}^{(l)}(\hat{x})-\overset{2}{\Xi}{}^{*}(\hat{x})\|_{L_{\tilde{M}_2}(\hat{\omega})}\Big)=0,$$

откуда с учетом соотношений (25)-(29), справедливых для любого допустимого куба K, будем иметь следующие равенства на $\hat{\omega}$:

$$\overset{1}{\Xi}{}^{*}(\hat{x})=\overset{1}{\mathcal{L}}{}^{*}\mathcal{U}(\hat{x})+\overset{1}{B}{}^{*}\mathcal{U}(\hat{x}),\quad \overset{2}{\Xi}{}^{*}(\hat{x})=\overset{2}{B}{}^{*}\mathcal{U}(\hat{x}).$$

Мы доказали выполнение всех пунктов из условия 5*), и, значит, $\mathcal{U}(\hat{x})\in\mathcal{T}_0$ или, что то же самое, $\mathcal{U}(\hat{x})\in\mathcal{R}$.

Итак, пространство $\mathcal{R}$ полно относительно полунормы $\rho+\nu$, так что все нужные свойства полунормы ν установлены.

Предположим, что вместе с переменной $\mathcal{N}$-функцией $\tilde{M}$ Δ_2'-условию удовлетворяет переменная $\mathcal{N}$-функция $\tilde{M}^*$, что обеспечивает рефлексивность пространства $\mathcal{R}$ **).

Пусть $f\in\mathcal{R}^*$ - функционал внешних сил***), работа которых при деформации тела Ω подсчитывается по формуле $\langle f,\mathcal{U}\rangle$.

Пусть тело Ω подчинено некоторым связям, определящим в $\mathcal{R}$ некоторое непустое слабо замкнутое подмножество $\mathfrak{M}$.

Зададим оператор $\mathcal{B}:\mathfrak{M}\longrightarrow\Psi$, отображающий множество $\mathfrak{M}$ в непустое множество Ψ произвольной природы. Нас будут интересовать такие положения равновесия $\mathcal{U}(\hat{x})$ тела Ω, для которых

$$\mathcal{B}(\mathcal{U})=\psi, \tag{30}$$

где ψ - некоторый фиксированный элемент множества $\mathcal{B}(\mathfrak{M})$.

Функционал потенциальной энергии тела Ω задается равенством

$$\mathcal{Э}(\mathcal{U})=\int\limits_{\hat{\omega}}\hat{M}(\hat{x},\varepsilon^*(\hat{x}))d\hat{x}-\langle f,\mathcal{U}\rangle. \tag{31}$$

Будем искать абсолютный минимум функционала $\mathcal{Э}(\mathcal{U})$ на множестве $\mathfrak{M}$ при условии (30).

---

*) Выполнение пп. а) и б) было установлено выше.

**) Пространство $\mathcal{R}$ рассматривается как банахово с нормой $\rho+\nu$.

***) Этот функционал не зависит от $\mathcal{U}(\hat{x})\in\mathcal{R}$.

Пусть X - замкнутое векторное подпространство в $\mathcal{R}$ такое, что имеет место импликация

$$\{\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathfrak{M},\ \mathcal{B}(\mathcal{U})=\mathcal{B}(\mathcal{V})\}\Longrightarrow\{(\mathcal{U}-\mathcal{V})\in X\}.^{*)}$$

В п. 5° было отмечено, что размерность подпространства $X\cap\ker p$ конечна. Пусть X_0 - замкнутое векторное подпространство в X такое, что $X=X_0\oplus(X\cap\ker p)$.

Положим

$$X_1=\{\mathcal{U}\in(X\cap\ker p)\,|<f,\mathcal{U}>=0\}.$$

Пусть X_2 - такое векторное подпространство в $X\cap\ker p$, что $X\cap\ker p=X_1\oplus X_2$ и, значит, $X=X_0\oplus X_1\oplus X_2$. Пусть, далее, $I_X=\Pi_0+\Pi_1+\Pi_2$ - разложение тождественного оператора в сумму линейных проекционных операторов, соответствующее разложению подпространства X в прямую сумму:

$$X=X_0\oplus X_1\oplus X_2\,.$$

Выберем произвольный элемент $\mathcal{U}^{(0)}\in\mathfrak{M}^{(\phi)}$ (см. п.5°) и рассмотрим множество $\mathfrak{M}^{(\phi)}_{\mathcal{U}^{(0)}}=\mathfrak{M}^{(\phi)}-\mathcal{U}^{(0)}$, расположенное в X .

Как следствие из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Если множество $\Pi_2(\mathfrak{M}^{(\phi)}_{\mathcal{U}^{(0)}})$ ограничено в X , то

$$\exists\mathcal{U}(\hat{x})\in\mathfrak{M}^{(\phi)}:\ \mathcal{I}(\mathcal{U})=\inf_{\mathcal{V}(\hat{x})\in\mathfrak{M}^{(\phi)}}\mathcal{I}(\mathcal{V}).$$

Замечание 3. Аналогично может быть сформулирован результат о разрешимости вариационной задачи в случае, когда компоненты тензора деформации $E(x)$ содержат нелинейность; при этом нужно требовать выполнение условия А из пункта 5°.

8°. Пример 2. (Геометрически линейная теория деформации гибкого тела, не обязательно упругого.)

---

*) Например, в качестве X всегда годится все пространство $\mathcal{R}$, а если $\mathfrak{M}$ - векторное подпространство в $\mathcal{R}$, то в качестве X можно брать любое замкнутое векторное подпространство в $\mathcal{R}$, содержащее $\ker\mathcal{B}$.

Пусть $\mathscr{H}$ - лебегово пространство на $\hat{\omega}$ вектор-функций той же размерности, что и вектор-функции из $\mathscr{R}$, непрерывно вложенное в пространство локально интегрируемых на $\hat{\omega}$ вектор-функций и содержащее подпространство X. Предположим, что для всякой вещественной положительной в каждой точке множества $\hat{\omega}$ функции $\lambda(\hat{x}) \in L_\infty^{loc}(\hat{\omega})$ такой, что $\mathscr{U}(\hat{x})/\lambda(\hat{x}) \in \mathscr{H}$ $\forall \mathscr{U}(\hat{x}) \in X$, X является банаховым пространством относительно нормы $\rho(\cdot)+\|\cdot/\lambda(\hat{x})\|_{\mathscr{H}}$. Пусть $r \in \mathbb{N}$ и каждому $j=1,\dots,r$ поставлены в соответствие непустое открытое подмножество $\omega^{(j)} \subset \hat{\omega}$, натуральное число m_j, лебегово пространство $\mathscr{H}_j$ на $\omega^{(j)}$ вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^{m_j}$ и линейный оператор A_j, ставящий в соответствие каждой вектор-функции из X заданную на $\omega^{(j)}$ вектор-функцию со значениями в $\mathbb{R}^{m_j}$, такой, что для любого допустимого куба $K, \bar{K} \subset \omega^{(j)}$, вектор-функция $\chi_K(\hat{x}) A_j \mathscr{U}(\hat{x}) \in \mathscr{H}_j$. Предположим, что для любого $j=1,\dots,r$ выполнено хотя бы одно из следующих двух условий.

Условие 6. Каков бы ни был допустимый куб $K, \bar{K} \subset \omega^{(j)}$, с константой $\varepsilon(K) > 0$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(K)\|\chi_{K(\hat{x})} A_j \mathscr{U}(\hat{x})\|_{\mathscr{H}_j} \le \rho(\mathscr{U}(\hat{x})) \quad \forall \mathscr{U}(\hat{x}) \in X.$$

Условие 7. Множество $\omega^{(j)}$ имеет конечное число компонент связности. Пусть K - допустимый куб, $\bar{K} \subset \omega^{(j)}$. Найдется векторное подпространство $\mathscr{R}_j^{(K)}$ в пространстве $\mathscr{H}_j^{(K)}$ *) с полунормой $\rho_j^{(K)}: \mathscr{R}_j^{(K)} \to \mathbb{R}$, полное относительно нормы

$$\rho_j^{(K)}(\cdot) + \|\chi_K(\hat{x})\cdot\|_{\mathscr{H}_j}$$

и такое, что а) всякая последовательность из $\mathscr{R}_j^{(K)}$, ограниченная относительно этой нормы, содержит подпоследовательность, фундаментальную относительно нормы $\|\chi_K(\hat{x})\cdot\|_{\mathscr{H}_j}$; в) всякая вектор-функция $\mathscr{V}(\hat{x}) \in \ker \rho_j^{(K)}$, равная нулю на некотором допустимом кубе $K' \subset K$, равна нулю на K; с) с константой $\varepsilon(K) > 0$ имеет место неравенство

---

*) Здесь $\mathscr{H}_j^{(K)}$ - сужение $\mathscr{H}_j$ с $\omega^{(j)}$ на K.

$$\varepsilon(K)p_j^{(K)}(A_j\,\mathcal{U}(\hat{x}))\le p(\mathcal{U}(\hat{x}))+\|\chi_K(\hat{x})A_j\,\mathcal{U}(\hat{x})\|_{\mathcal{X}_j}\qquad \forall\mathcal{U}(\hat{x})\in X.$$

Введем понятие элементарного моста. Пусть задана пятерка объектов (g,a,b,A,h), где g - непустое открытое множество в $\hat{\omega}$, a и b - точки g; h - лебегово пространство на g вектор-функций со значениями в некотором $\mathbb{R}^{\ell}$, $\ell\in\mathbb{N}$; A - линейный оператор, ставящий в соответствие каждой вектор-функции из X вектор-функцию, заданную на g со значениями в $\mathbb{R}^{\ell}$, причем, каково бы ни было непустое открытое множество $\sigma\subset\hat{\omega}$ такое, что $\bar{\sigma}$ - компакт в g, имеет место $\chi_\sigma(\hat{x})A\,\mathcal{U}(\hat{x})\in h^{(\sigma)}$ $\forall\mathcal{U}(\hat{x})\in X$. Эта пятерка объектов называется элементарным мостом*) (при этом a называется началом, а b - концом моста), если для любой открытой окрестности σ точки a с компактным в g замыканием найдется открытая окрестность μ точки b с компактным в g замыканием, для которой с константой $\varepsilon(\sigma,\mu)>0$ имеет место неравенство:

$$\varepsilon(\sigma,\mu)\|\chi_\mu(\hat{x})A\,\mathcal{U}(\hat{x})\|_h\le p(\mathcal{U}(\hat{x}))+$$

$$+\|\chi_\sigma(\hat{x})A\,\mathcal{U}(\hat{x})\|_h\qquad\forall\mathcal{U}(\hat{x})\in X.$$

Приведем пример элементарного моста. Пусть g - непустое открытое множество в $\hat{\omega}$; ∇ - непустое выпуклое открытое множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ переменных $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_m)$; $\varphi:\nabla\to g$ - взаимно-однозначное и непрерывно дифференцируемое в обе стороны отображение множества ∇ на множество g; a' и b' - точки множества ∇, имеющие одну и ту же проекцию на гиперплоскость $\xi_m=0$; $a=\varphi(a')$, $b=\varphi(b')$; $h=L_q(g,\mathbb{R}^{\ell})$, $1\le q\le+\infty$, $\ell\in\mathbb{N}$; $A:X\to h$ - линейный оператор. Предположим, что вектор-функция $A\,\mathcal{U}(\varphi(\xi))$ имеет на ∇ обобщенную в смысле С.Л.Соболева производную

$$\frac{\partial}{\partial\xi_m}A\,\mathcal{U}(\varphi(\xi))\qquad\forall\mathcal{U}(\hat{x})\in X,$$

причем для некоторой квадратной матрицы-функции $T(\xi)$ порядка ℓ с элементами из $L_\infty(\nabla)$ дифференциальное выражение

---

*) Более точно, элементарным мостом относительно полунормы p.

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} A\mathcal{U}\big(\varphi(\xi)\big)+T(\xi)\,A\mathcal{U}(\varphi(\xi))\in L_q(\nabla,\mathbb{R}^\ell) \qquad \forall\,\mathcal{U}(\hat{x})\in X,$$

и с константой $\varepsilon>0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial \xi_m} A\mathcal{U}(\varphi(\xi))+T(\xi)A\mathcal{U}(\varphi(\xi))\right\|_{L_q(\nabla,\mathbb{R}^\ell)}\le p\big(\mathcal{U}(\hat{x})\big) \quad \forall\,\mathcal{U}(\hat{x})\in X.$$

Пятерка (g,a,b,A,h) является элементарным мостом. (Другие примеры мостов указаны в работе автора [8].)

Введем для каждой точки $\hat{x}\in\hat{\omega}$ множество

$$\Delta(\hat{x})=\{j\in N:\ j\le r \quad \text{и}\quad \hat{x}\in\omega^{(j)}\}.$$

Мост (g,a,b,A,h) назовем допустимым, если $\Delta(a)\ne\emptyset$, и найдется открытая окрестность σ точки a с компактным в $g\cap\big(\bigcap_{j\in\Delta(a)}\omega^{(j)}\big)$ замыканием такая, что с константой $\varepsilon>0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon\|\chi_\sigma(\hat{x})A\mathcal{U}(\hat{x})\|_h\le\sum_{j\in\Delta(a)}\|\chi_\sigma(\hat{x})A_j\,\mathcal{U}(\hat{x})\|_{\mathcal{H}_j} \qquad \forall\,\mathcal{U}(\hat{x})\in X.$$

Точка $b\in\hat{\omega}$ называется регулярной, если выполнено следующее

Условие 8. Найдется (зависящее от b) семейство допустимых мостов $\{(g^{(k)},a^{(k)},b,A^{(k)},h^{(k)})\}_{k=1,\dots,s}$ такое, что для любой открытой окрестности σ точки b, имеющей компактное в $\bigcap_{1\le k\le s} g^{(k)}$ замыкание с константой $\varepsilon(\sigma)>0$ выполняется неравенство

$$\varepsilon(\sigma)\|\chi_\sigma(\hat{x})\mathcal{U}(\hat{x})\|_{\mathcal{X}}\le\sum_{j\in\Delta(b)}\|\chi_\sigma(\hat{x})A_j\,\mathcal{U}(\hat{x})\|_{\mathcal{H}_j}+$$

$$+\sum_{k=1}^{s}\|\chi_\sigma(\hat{x})A^{(k)}\mathcal{U}(\hat{x})\|_{h^{(k)}} \qquad \forall\,\mathcal{U}(\hat{x})\in X.\ ^{*)} \tag{32}$$

---

*) Если в условии 8 множество $\Delta(b)$ пусто, то первая сумма в правой части неравенства (32) отсутствует; если же в семействе допустимых мостов все операторы $A^{(k)}$ нулевые, то $\Delta(b)\ne\emptyset$ и среди операторов A_j, $j\in\Delta(b)$, обязательно должны быть ненулевые.

Рассмотрим две ситуации:

1) Известно, что все точки множества $\hat{\omega}$ регулярны. Тогда легко показать, что найдется полунорма $\nu: X \longrightarrow \mathbb{R}$, о которой идет речь в п.5° перед условием A. Ее можно построить, например, так: полунорму вида $\|\chi_K(\hat{x})\cdot\|_{\mathcal{H}_j}$ на X, где K - допустимый куб, замыкание которого расположено в какой-нибудь компоненте связного множества $\omega^{(j)}$ для j, удовлетворяющего условию 7, просуммировать по всем указанным j и всем компонентам связности множества $\omega^{(j)}$ (которых, по условию 7,- конечное число).

Предполагая выполненным условие A, получ.ем теорему 1.

2) Известно, что регулярными являются все точки множества $\hat{\omega}\setminus\bar{g}$, где g - непустое открытое множество в $\hat{\omega}$ с компактным в $\hat{\omega}$ замыканием. Пусть g_* - открытое множество в $\hat{\omega}$ с компактным в $\hat{\omega}$ замыканием, содержащее множество $\bar{g}$. Положим $g^* = g_* - \bar{g}$, а через Z обозначим совокупность таких функций $z(\hat{x}) \in C^\infty(\hat{\omega})$, у которых $\operatorname{supp} z(\hat{x})$ - компакт в g_*, $z(\hat{x}) = 1$ в некоторой окрестности множества g и $0 \leq z(\hat{x}) \leq 1$. Предположим, что выполнено следующее

Условие 9. Найдется лебегово пространство $\mathcal{H}_*$ на g_*, непрерывно вложенное в пространство $\mathcal{H}^{(g_*)}$ такое, что $\forall z(\hat{x}) \in Z$ $\forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in X$, вектор-функция $z(\hat{x})\mathcal{U}(\hat{x}) \in \mathcal{H}_*$ на g_*, причем $\forall z(\hat{x}) \in Z$ с константой $\varepsilon(z) > 0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon(z)\|z(x)\mathcal{U}'(\hat{x})\|_{\mathcal{H}_*} \leq \rho(\mathcal{U}(\hat{x})) + \|\chi_{g^*}(\hat{x})\,\mathcal{U}(\hat{x})\|_{\mathcal{H}} \qquad \forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in X.$$

Тогда, очевидно, с константой $\varepsilon_0 > 0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon_0\|\chi_g(\hat{x})\mathcal{U}(\ddot{x})\|_{\mathcal{H}_*} \leq \nu(\mathcal{U}(\hat{x})) + \rho(\mathcal{U}(\hat{x})) \qquad \forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in X,$$

где ν - полунорма на X, построенная в ситуации 1). Эта полунорма обладает свойствами, указанными в п.5°, и, следовательно, при выполнении условия А имеет место теорема 1.

Замечание 4. Пусть $\mathcal{U}^{(1)}(\hat{x}), \ldots, \mathcal{U}^{(\mu)}(\hat{x})$ - все компоненты вектор-функции $\mathcal{U}(\hat{x})$. Отметим один конкретный случай, когда условие 9 выполнено: а) имеет место вложение $L_2^{(1)}(g^*) \subset L_2(g^*)$; б) пространство $L_2(g_*, \mathbb{R}^\mu)$ непрерывно вложено в пространство $\mathcal{H}^{(g_*)}$; с) каждой компоненте связности $g_*^{(k)}$, $k = 1, \ldots, \theta$, $\theta \in \mathbb{N}$, множества g_* и каждой компоненте $\mathcal{U}^{(j)}(\hat{x})$ вектор-функции $\mathcal{U}(\hat{x})$ поставлены в соответствие ненулевой линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}_{jk}$ с постоянными коэффициентами порядка $\varkappa_{jk}$ и неотрицательное целое число $\ell_{jk} \geq \varkappa_{jk} - 1$; д) $\forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in X$ компонента $\mathcal{U}^{(j)}(\hat{x})$ имеет в обобщенном смысле С.Л.Соболева на множестве $g_*^{(k)}$ оператор $\mathcal{L}_{jk}$ и на множестве $g_*^{(k)} \setminus g$ производные порядка ℓ_{jk} , причем $\mathcal{L}_{jk}\mathcal{U}^{(j)}(\hat{x}) \in L_2(g_*^{(k)})$ и $\mathcal{D}^\alpha \mathcal{U}^{(j)}(\hat{x}) \in L_2(g^{(k)})$ $\forall \alpha : |\alpha| = \ell_{jk}$; е) с константой $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon \left(\sum_{k=1}^{\theta} \sum_{j=1}^{\mu} \| \mathcal{L}_{jk} \mathcal{U}^{(j)}(\hat{x}) \|_{L_2(g_*^{(k)})} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\theta} \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{|\alpha| = \ell_{jk}} \| \mathcal{D}^\alpha \mathcal{U}^{(j)}(\hat{x}) \|_{L_2(g_*^{(k)} \setminus g)} \right) \leq$$

$$\leq p(\mathcal{U}(\hat{x})) + \| \chi_{g^*}(\hat{x}) \mathcal{U}(\hat{x}) \|_{\mathcal{H}} \qquad \forall \mathcal{U}(\hat{x}) \in X .$$

Условие 9 следует теперь из оценок Л.Хёрмандера [9,с.507] .

Литература

1. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости.- М.: Наука, 1969.-336 с.
2. Портнов В.Р. О разрешимости нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах.- Докл.АН СССР, 1975, т.225, №1, с.52-55.
3. Портнов В.Р. Пространства типа С.Л.Соболева с полунормой, имеющей конечномерное ядро.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 1975, вып. 32, с.114-138.
4. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича.-М.: Гос.изд-во физ.-мат. литературы, 1958.-271 с.
5. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.- Новосибирск.: Изд-во АН СССР, Сибирское отделение, 1962.- 251 с.
6. Решетняк Ю.Г. Оценки для некоторых дифференциальных операторов с конечномерным ядром.- Сиб.мат.журн., 1970, т.11, №2, с.414-428.

7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.- 2-е изд., перераб.- М.: Наука, 1977.-742 с.

8. Портнов В.Р. О минимуме функционалов, содержащих дифференциальные операторы.- В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика.- Новосибирск.: Наука, 1980, с.169-182.

9. Морен К. Методы гильбертова пространства.-М.: Мир, 1965.-570 с.

10. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике.- 2-е изд. перераб. и дополн.- М.: Наука, 1970.- 512 с.

11. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов.-М.: Наука, 1966.- 432 с.

12. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости.- М.: Мир, 1974.- 159 с.

13. Скрыпник И.В. Нелинейный эллиптические уравнения высшего порядка.- Киев: Наукова думка, 1973.-219 с.

14. Ворович И.И. О существовании решения в нелинейной теории оболочек.- Изв. АН СССР, сер.матем., 1955, т.19, № 4, с.173-186.

15. Никольский С.М., Лизоркин П.И. О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением на границе.- Докл.АН СССР, 1964, т.159, № 3, с.512-515.