УДК 517.947

РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

П.С.Филатов (Новосибирск)

Рассматриваются равномерные оценки решений уравнения

$$L(D)u(x) = \sum_{\substack{\alpha:\alpha\varkappa\leq 1,\\ \alpha\theta\geq 1}} a_\alpha D^\alpha u(x) = f(x) \tag{1}$$

во всем евклидовом пространстве R^n в предположении, что символ главной части

$$L_0(i\xi) = \sum_{\alpha\varkappa=1} a_\alpha (i\xi)^\alpha \tag{2}$$

и символ $L(i\xi)$ оператора L отличны от нуля при $\xi\in R^n\setminus 0$

Уравнение (1) в случае, когда оператор совпадает со своей главной частью, изучалось в [1,2]. Оценки решений в пространствах С.Л.Соболева со степенным весом для эллиптического уравнения (1) получены в [3]

В настоящей работе для обобщенных решений степенного роста уравнения (1), интегральные средние которых стремятся к нулю на бесконечности, устанавливаются оценки в норме типа Гёльдера во всем евклидовом пространстве R^n. Полученные оценки являются точными по порядку убывания решений на бесконечности.

§ 1. Обозначения и вспомогательные утверждения

Введем обозначения: $x, y, t,\dots$ - точки n-мерного евклидова пространства R^n; $\alpha, \beta, \gamma,\dots$ - мультииндексы, $|\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_n$; $\alpha\beta = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j$.

Если $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)$, ω_j - целые числа, $\omega_j\geq 1$, $j=1,2,\dots,n$

и $x\in R^n$, то обозначим через $|x|_w$ псевдометрику

$$|x|_w = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{2w_j}\right)^{1/2}.$$

Далее, $\langle x\rangle_w = (1+|x|_w^2)^{1/2}$;

$$x^\alpha=\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j};\quad x v^\alpha = (x_1 v^{\alpha_1},\dots,x_n v^{\alpha_n});$$

$$x v^{-\alpha} = (x_1 v^{-\alpha_1},\dots,x_n v^{-\alpha_n});\ D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n};$$

$$G(v,x) = (2\pi)^{-n}\, 2K \int (vL(i\xi))^{2K-1}\times$$

$$\times \exp\left\{-\left[vL(i\xi)\right]^{2K} - ix\xi\right\} d\xi; \qquad (3)$$

$$U^{(\rho)}(x) = (-1)^{|\rho|}\int_0^\infty\!\!\int D_t^\rho G(v,t-x) f(t)\,dt\,dv. \qquad (4)$$

Уточним условия на оператор L. Векторы $\varkappa$ и θ, входящие в определение оператора L (см. (1)), имеют следующий вид:

$$\varkappa=(\varkappa_1,\dots,\varkappa_n),\ \theta=(\theta_1,\dots,\theta_n),\ 0<\varkappa_j\le\theta_j\le 1,$$

$\varkappa_j=1/m_j,\ \theta_j=1/l_j,\ m_j,\ l_j$ - целые числа,

$$m_j\ge l_j\ge 1,\ j=1,2,\dots,n,\ m=(m_1,\dots,m_n),\ l=(l_1,\dots,l_n).$$

Оператор L удовлетворяет условиям:

$$|L(i\xi)|\ge C_1|\xi|_l \qquad (5)$$

для всех $\xi\in R^n$, где $C_1>0$

Символ главной части L, определенный в (2), удовлетворяет условию квазиэллиптичности

$$|L_0(i\xi)|\ge C_2|\xi|_m \qquad (6)$$

для всех $\xi\in R^n$, где $C_2>0$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу $C^{s,\lambda}(R^n)$, если $f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка s включительно (s - натуральное число) и конечную норму ($\lambda<\min\limits_{1\le j\le n}\varkappa_j$):

$$\|f, C^{s,\lambda}\| = \sum_{|\alpha|\le s} \sup_{x\in R^n} |D^\alpha f(x)| +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=s} \sup_{x,y\in R^n} |D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|\cdot|x-y|_m^{-\lambda} . \qquad (7)$$

Легко видеть, что при $\lambda < \min\limits_{1\le j\le n} x_j$ норма (7) эквивалентна обычной покоординатной норме Гёльдера.

В нижеследующих леммах устанавливаются равномерные оценки некоторых интегралов.

Лемма 1. Пусть K - достаточно большое целое число и $d \ge 0$ Тогда для любого числа k и любого мультииндекса ρ справедливо неравенство

$$\left|\int exp\left[-(\sigma L(i\xi))^{2K}\right]\cdot(\sigma L(i\xi))^d (i\xi)^\rho e^{-ix\xi} d\xi\right| \le$$

$$\le C_k \sigma^{-|\omega|-\rho\omega} \left(1+\sigma^{-1}|x|_w\right)^{-k}, \qquad (8)$$

где $\omega_j = w_j^{-1}$ и $w = \ell$ при $\sigma \ge 1$, $w = m$ при $\sigma < 1$. Константа C_k не зависит от x и σ

Доказательство. В интеграле, стоящем в левой части неравенства (8), произведем замену переменных $\xi = \sigma^{-\omega}\zeta$. Теперь легко видно, что для доказательства неравенства (8) достаточно показать справедливость неравенства

$$\int\left|D_\zeta^\beta\left\{exp\left[-\left(\sigma L(i\sigma^{-\omega}\zeta)\right)^{2K}\right]\cdot\left(\sigma L(i\sigma^{-\omega}\zeta)\right)^d (i\zeta)^\rho\right\}\right| d\zeta \le C_\rho \qquad (9)$$

для любого мультииндекса β

С помощью правила дифференцирования произведения несложно устанавливается равенство

$$D_\xi^\beta e^{\Phi(\xi)} = \sum_{\sigma^{(1)}+\ldots+\sigma^{(|\beta|)}=\beta} e^{\Phi(\xi)} \prod_{j=1}^{|\beta|}{}^* D^{\sigma^{(j)}} \Phi(\xi), \qquad (10)$$

где звездочка означает, что произведение осуществляется только по тем j, для которых $|\sigma^{(j)}| > 0$

Поскольку $|\xi_j| \leq |\xi|_w^{\omega_j}$, то

$$|D_\zeta^\beta(\sigma L(i\sigma^{-\omega}\zeta))| = \left|\sum_{\alpha\varkappa\leq 1} a_\alpha \sigma^{1-\omega\alpha} D^\beta(i\zeta)^\alpha\right| \leq c_3|\dot\zeta|^{q(\beta)}, \tag{11}$$

где $q(\beta) = \max_{\alpha\varkappa\leq 1} \alpha\omega - \beta\omega$ при $\beta\varkappa \leq 1$ и $q(\beta) = 0$ при $\beta\varkappa > 1$.

Из условия (5) при $\sigma \leq 1$ следует неравенство

$$|\sigma L(i\sigma^{-\varkappa}\zeta)| \geq \left|\sigma \sum_{\alpha\varkappa=1} a_\alpha (i\zeta)^\alpha \sigma^{-1}\right| -$$

$$- \left|\sum_{\alpha\varkappa<1} a_\alpha (i\zeta)^\alpha \sigma^{1-\alpha\varkappa}\right| \geq C_1 |\zeta|_m -$$

$$- \sum_{\alpha\varkappa<1} |a_\alpha| |\zeta|_m^{\alpha\varkappa} \sigma^{1-\alpha\varkappa} \geq C_1|\zeta|_m - c_4|\dot\zeta|_m^\delta, \tag{12}$$

где $\delta < 1$

Аналогично из условия (6) при $\sigma \geq 1$ следует

$$|\sigma L(i\sigma^{-\theta}\zeta)| \geq c_2 \sigma |\sigma^{-\theta}\zeta|_\ell = c_2|\zeta|_\ell .$$

Отсюда и из (10)-(12) вытекает справедливость неравенства (9). Лемма доказана.

Следствие. Неравенство (9) справедливо для ядра $D_x^\rho G(\sigma, x)$, определенного в (3).

Лемма 2. Пусть $\sigma \leq 1$ и k - достаточно большое положительное число. Тогда справедливо неравенство

$$\int |\dot t|_\ell^d (1 + |t - x|_{m/\sigma})^{-k} dt \leq c_5 \sigma^{|\varkappa|} |\dot x|_\ell^d . \tag{13}$$

Доказательство. Произведем в интеграле замену переменных $y = (t - x)\sigma^{-\varkappa}$.

Пусть $d > 0$. Используя неравенство, аналогичное неравенству треугольника

$$|x+y|_{\omega} \leqslant K\left(|x|_{\omega} + |y|_{\omega}\right), \tag{14}$$

и учитывая, что $\sigma \leqslant 1$, сразу получаем (13).

Пусть теперь $d < 0$. С помощью неравенства (14) легко получить неравенство

$$\frac{1+|x|_{\omega}}{1+|x+y|_{\omega}} \leqslant c_6\left(1+|y|_{\omega}\right), \tag{15}$$

откуда следует, что интеграл в (13) не превосходит

$$c_7 \sigma^{|x|} |\dot{x}|_{\ell}^{d} \int \left(1+|\sigma^{x} y|_{\ell}\right)^{-d} \left(1+|y|_m\right)^{-k} dy \leqslant$$
$$\leqslant c_8 \sigma^{|x|} |\dot{x}|_{\ell}^{d}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $\sigma \geqslant 1$ и k - достаточно большое положительное число. Тогда справедливы неравенства:

$$I = \int |\dot{t}|_{\omega}^{d} \left(1+|t-x|_{\omega}/\sigma\right)^{-k} dt \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} c_9 \sigma^{|\omega|}\left(\sigma+|\dot{x}|_{\omega}\right)^{d}, & \text{если } d > -|\omega|; \\ c_{10} \sigma^{|\omega|} \ln(2+\sigma)\cdot\left(\sigma+|\dot{x}|_{\omega}\right)^{d}, & \text{если } d = -|\omega|; \\ c_{11} \sigma^{-d}\left(\sigma+|\dot{x}|_{\omega}\right)^{d}, & \text{если } d < -|\omega|. \end{cases} \tag{16}$$

Доказательство. Если $d > 0$, то неравенство (16) легко получается с помощью замены $y = (t-x)\sigma^{-\omega}$ и неравенства (14).

Если $d < 0$, то, применяя неравенство (15), получаем:

$$I < c_{12}\left(1+|x|_{\omega}\sigma^{-1}\right)^{d} \int \left(1+|t|_{\omega}\sigma^{-1}\right)^{-d} |\dot{t}|_{\omega}^{d} \times$$

$$\times\left(1+\sigma^{-1}|t-x|\right)^{-d-k} dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{12}\left(1+|x|_{\omega}\sigma^{-1}\right)^{d}\left(I_1+I_2\right), \tag{17}$$

где I_1 - интеграл по области $|t|_{\omega} < \sigma$, а I_2 - по области $|t|_{\omega} \geqslant \sigma$.

В интеграле I_2 выполняется $(1+\sigma^{-1}|t|_{\omega})|\dot{t}|_{\omega}^{-1} \leqslant 2\sigma^{-1}$, следовательно,

$$I_2 \leqslant 2\sigma^{d}\int\left(1+\sigma^{-1}|t-x|_{\omega}\right)^{-d-k} dt = C_{13}\sigma^{d+|\omega|}. \tag{18}$$

Рассмотрим I_1. Поскольку $(1+\sigma^{-1}|t-x|_{\omega}) \geqslant 1$, то

$$I_1 \leqslant \int\limits_{|t|_{\omega}<\sigma}\left(1+\sigma^{-1}|t|_{\omega}\right)^{-d}\left(1+|t|_{\omega}\right)^{d} dt.$$

Произведя замену $|t|_{\omega}=\tau,\ t=\tau\cdot\xi,\ |\xi|_{\omega}=1$, получаем:

$$I_1 \leqslant C_{14}\int\limits_0^{\sigma}\left(1+\tau\sigma^{-1}\right)^{-d}(1+\tau)^{d}\tau^{|\omega|-1}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\int\limits_1^{\sigma}\tau^{|\omega|-1+d}d\tau + C_{16}\int\limits_0^{1}\tau^{|\omega|-1}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant\begin{cases} C_{17}\sigma^{|\omega|+d} + C_{18}, & \text{если } d > -|\omega|;\\ C_{19}\ln\sigma + C_{20}, & \text{если } d = -|\omega|;\\ C_{21}, & \text{если } d < -|\omega|.\end{cases}$$

Отсюда и из (17), (18) следует неравенство (16).

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $|\dot{x}|_{\ell}^{b} f(x) \in C^{s,\lambda}(R^n)$,

$$\sigma - \rho\theta + \min(b; |\theta|) - 1 > 0,\ \rho = \rho^{(1)} + \rho^{(2)},\ \rho^{(1)}x \leqslant 1,$$

$$|\rho^{(2)}| < s \ \text{ и } \ 0 < \lambda < \min_{1\leqslant j\leqslant n} x_j.$$

Обозначим

$$\Phi(x) = \begin{cases} |\dot{x}|_\ell^{-\sigma}, & \text{если } \quad b>\sigma, \ b\neq|\theta|; \\ |\dot{x}|_\ell^{-\sigma}\ln(1+|\dot{x}|_\ell), & \text{если } \quad b=\sigma, \ b\neq|\theta| \\ & \text{или } \quad b>\sigma, \ b=|\theta|; \\ |\dot{x}|_\ell^{-\sigma}\ln^2(1+|\dot{x}|_\ell), & \text{если } \quad b=\sigma, \ b=|\theta|; \\ |\dot{x}|_\ell^{-b}, & \text{если } \quad b<\sigma. \end{cases}$$

Тогда (см. (4))

$$|U^{(\rho)}(x)| \leq c_{22}\,\Phi(x)\,\| \,|\dot{x}|_\ell^{b} f(x), C^{s,\lambda}\|, \tag{19}$$

где константа c_{22} не зависит от x и f.

Доказательство. Интеграл $U^{(\rho)}(x)$ представим в виде:

$$U^{(\rho)}(x) = U_1^{(\rho)}(x) + U_2^{(\rho)}(x), \tag{20}$$

где в $U_1^{(\rho)}(x)$ интегрирование по переменной σ производится по промежутку $[0,1]$, а в $U_2^{(\rho)}(x)$ - по $[1,\infty)$.

Рассмотрим $U_1^{(\rho)}(x)$. Проинтегрировав по частям под знаком интеграла по t $|\rho^{(2)}|$ раз, умножив и разделив на $|\dot{t}|_\ell^{b}$, прибавляя и вычитая $|\dot{x}|_\ell^{b} D^{\rho^{(2)}} f(x)$, получаем

$$|U_1^{(\rho)}(x)| \leq \int_0^1\!\!\int |D^{\rho^{(1)}} G(\sigma, t-x)|\,|\dot{t}|_\ell^{-b} \times$$

$$\times \left|\,|\dot{t}|_\ell^{b} D^{\rho^{(2)}} f(t) - |\dot{x}|_\ell^{b} D^{\rho^{(2)}} f(x)\right| dt\,d\sigma +$$

$$+\int_0^1 \left| \int D^{\rho^{(1)}} G(\sigma, t-x) |\dot{t}|_\ell^{-b} \, dt \right| d\sigma \cdot |\dot{x}|_\ell^{b} \, |D^{\rho^{(2)}} f(x)| =$$

$$= U_{11}^{(\rho)}(x) + U_{12}^{(\rho)}(x). \qquad (21)$$

Применяя в $U_{11}^{(\rho)}(x)$ неравенство (8) , условие на f , очевидное неравенство $(1+\sigma^{-1}|\dot{t}-x|_m)^{-1}\,|t-x|_m \leq \sigma$ и оценку (13) , получаем

$$U_{11}^{(\rho)}(x) \leq C_{23} \int_0^1 \sigma^{-\rho^{(1)}\varkappa+\lambda} \, |\dot{x}|_\ell^{-b} d\sigma \times \| |\dot{x}|_\ell^{b} f(x), C^{s,\lambda} \|.$$

Отсюда, поскольку $\rho^{(1)}\varkappa - \lambda < 1$,

$$U_{11}^{(\rho)}(x) \leq C_{24} |\dot{x}|_\ell^{-b} \| |\dot{x}|_\ell^{b} f(x), C^{s,\lambda} \|. \qquad (22)$$

В интеграле $U_{12}^{(\rho)}(x)$ проинтегрируем по частям по t $|\rho^{(1)}|$ раз и применим неравенства (8) и (13) :

$$U_{12}^{(\rho)}(x) \leq C_{25} \int_0^1 d\sigma \, |\dot{x}|_\ell^{-b-\rho^{(1)}\theta} \| |\dot{x}|_\ell^{b} f(x), C^{s,\lambda} \| =$$

$$= C_{25} |\dot{x}|_\ell^{-b-\rho^{(1)}\theta} \| |\dot{x}|_\ell^{b} f(x), C^{s,\lambda} \|. \qquad (23)$$

Рассмотрим теперь $U_2^{(\rho)}(x)$. Выражение под знаком интеграла по t умножим и разделим на $|\dot{t}|_\ell^{b}$ и применим неравенства (8) и (16) :

$$|U_2^{(\rho)}(x)| \leq C_{26} \int_1^\infty \sigma^{-\rho\theta-|\theta|+max(b,|\theta|)} (\sigma+|\dot{x}|_\ell)^{-b} d\sigma \times$$

$$\times \| |\dot{x}|_\ell^{b} f(x), C \|$$

(выражение под знаком интеграла по σ следует умножить на $\ln(\sigma+1)$, если $b = |\theta|$).

Простые вычисления приводят к неравенству

$$|U_2^{(\rho)}(x)| \leq c_{27}\Phi(x)\| |\dot{x}|^{\ell} f(x), C\|.$$

Отсюда и из (20) - (23) следует оценка (19) .

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 4 и $\lambda' \leq \lambda + 1 - \rho^{(1)} x$, $0 < \lambda' < \min\limits_{1\leq j\leq n} x_j$. Тогда

$$\Phi^{-1}(x) U^{(\rho)}(x) \in C^{\lambda'}(R^n).$$

Доказательство. В силу леммы 4, функция $U_2^{(\rho)}(x)$ (см.(20)) бесконечно дифференцируема, отсюда, как легко видеть, для доказательства леммы достаточно установить оценку

$$|U_1^{(\rho)}(x+\delta e_j) - U_1^{(\rho)}(x)| \leq$$

$$\leq c_{28}|\delta|^{\lambda' m_j}\Phi(x)\| |\dot{x}|_{\ell}^{\ell} f(x), C^{s,\lambda}\|, \tag{24}$$

где $0 < |\delta| < 1$, e_j - j-й координатный вектор, $j=1,2,\ldots,n$, и константа C_{28} не зависит от x , δ и f .

Интеграл $U_1^{(\rho)}(x)$ представим в виде:

$$U_1^{(\rho)}(x) = U_{13}^{(\rho)}(x) + U_{14}^{(\rho)}(x), \tag{25}$$

где в $U_{13}^{(\rho)}(x)$ интегрирование по $\mathcal{T}$ производится по промежутку $[|\delta|^{m_j}, 1]$, а в $U_{14}^{(\rho)}(x)$ - по $[0, |\delta|^{m_j}]$.

Тогда,очевидно,

$$|U_1^{(\rho)}(x+\delta e_j) - U_1^{(\rho)}(x)| \leq$$

$$\leq |U_{13}^{(\rho)}(x+\delta e_j) - U_{13}^{(\rho)}(x)| +$$

$$+ |U_{14}^{(\rho)}(x+\delta e_j)| + |U_{14}^{(\rho)}(x)|. \tag{26}$$

Рассмотрим первое слагаемое в (26) . Поскольку

$$D^{\rho}G(v,t-x-\delta e_j)-D^{\rho}G(v,t-x)=\delta\frac{\partial}{\partial t}D^{\rho}G(v,t-x-\tilde{\delta}e_j),$$

то, повторяя рассуждения леммы 4, получаем:

$$|U_{13}^{(\rho)}(x+\delta e_j)-U_{13}^{(\rho)}(x)|\leq$$

$$\leq C_{29}|\delta|\int_{|\delta|^{m_j}}^{1} v^{-\rho^{(1)}\varkappa-\varkappa_j+\lambda}dv\cdot|\dot{x}|_{\ell}^{-b}\,\||\dot{x}|_{\ell}^{b}f(x),C^{s,\lambda}\|\leq$$

$$\leq C_{30}|\dot{x}|_{\ell}^{-b}\left(|\delta|\cdot|\ln|\delta||+|\delta|^{m_j(1-\rho^{(1)}\varkappa+\lambda)}\right)\||\dot{x}|_{\ell}^{b}f,C^{s,\lambda}\|. \qquad (27)$$

Два последних слагаемых в (26) оцениваются совершенно одинаково. Рассмотрим $U_{14}^{(\rho)}(x)$. Снова повторяя рассуждения леммы 4, получаем:

$$|U_{14}^{(\rho)}(x)|\leq C_{31}\int_{0}^{|\delta|^{m_j}} v^{-\rho^{(1)}\varkappa+\lambda}dv\cdot|\dot{x}|_{\ell}^{-b}\,\||\dot{x}|_{\ell}^{b}f,C^{s,\lambda}\|\leq$$

$$\leq C_{32}|\dot{x}|_{\ell}^{-b}|\delta|^{m_j(1-\rho^{(1)}\varkappa+\lambda)}\||\dot{x}|_{\ell}^{b}f(x),C^{s,\lambda}\|.$$

Отсюда и из леммы 4, а также из (25) - (27) следует неравенство (24) . Лемма доказана.

§ 2. Основные результаты

Обозначим через S_N множество бесконечно дифференцируемых функций, для которых

$$\sup_{x\in R^n}|D^{\rho}\varphi(x)|(1+|x|)^{N+2n}<\infty.$$

Будем говорить, что $u(x)\in S_N'$, если $u(x)\in L_p^{loc}(R^n)$, $1<p<\infty$, и для почти всех $x\in R^n$ выполняется

$$|u(x)|(1+|x|)^{-N} \leqslant W(x), \quad \text{где } W(x) \in L_1(R^n).$$

Определение. Функция $u(x)$ называется обобщенным решением степенного роста уравнения (1), если найдется такое N (зависящее от $u(x)$), что $u(x) \in S'_N$, и для любой $\varphi \in S_N$ выполняется равенство $(L^{(*)}\varphi, u) = (\varphi, f)$, где $L^{(*)}$ - формально сопряженный к L оператор.

В работах С.В. Успенского [1, 4] строится интегральное представление функций класса S'_N, которые удовлетворяют условию

$$\lim_{|t| \to \infty} \left(\prod_{j=1}^{n} t_j\right)^{-1} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} u(y)dy = 0. \tag{28}$$

Повторяя рассуждения С.В. Успенского (с некоторыми понятными изменениями), и учитывая оценки (8), получаем: если $u(x) \in S'_N$ и условие (28) выполнено для $D^\rho u(x)$, то при достаточно большом K для почти всех $x \in R^n$ справедливо равенство

$$D^\rho u(x) = \lim_{\substack{h \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} u^{(\rho)}_{h\varepsilon}(x), \tag{29}$$

где

$$u^{(\rho)}_{h\varepsilon}(x) = (2\pi)^{-n} 2K \int_\varepsilon^h \int D^\rho_t \int \sigma^{2K-1} (L(i\xi))^{2K} \times$$

$$\times \exp\left\{-(\sigma L(i\xi))^{2K} - i(t-x)\xi\right\} d\xi\, u(t)dtd\sigma.$$

Поскольку $L(i\xi)\exp(-it\xi) = L^{(*)}(D)\exp(-it\xi)$, то отсюда следует справедливость равенства (29) для почти всех $x \in R^n$, где

$$u^{(\rho)}_{h\varepsilon}(x) = (-1)^{|\rho|} \int_\varepsilon^h \int D^\rho_t G(\sigma, t-x) f(t)dtd\sigma,$$

если $u(x)$ - обобщенное решение степенного роста уравнения (1) и (28) выполнено для $D^\rho u(x)$

При выполнении условий лемм 4 и 5 из оценок, установленных в этих леммах, следует, что функции $u^{(\rho)}_{h\varepsilon}(x)$ при $h \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ равномерно схо-

дятся к функции $U^{(\rho)}(x)$, определенной в (4). Отсюда и из (29) вытекает, что для почти всех $x \in R^n$ $D^\rho u(x) = U^{(\rho)}(x)$.

Таким образом, в силу лемм 4 и 5 справедлива

Теорема. Пусть $|\dot{x}|_\ell^{b} f(x) \in C^{s,\lambda}(R^n)$,

$$\sigma = \rho\theta + \min(b; |\theta|) - 1 > 0, \quad \rho = \rho^{(1)} + \rho^{(2)}, \quad \rho^{(1)} x \le 1,$$

$$|\rho^{(2)}| \le s, \quad 0 < \lambda < \min_{1 \le j \le n} x_j, \quad \lambda' \le \lambda + 1 - \rho^{(1)} x, \quad 0 < \lambda' < \min_{1 \le j \le n} x_j \quad \text{и}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} |\dot{x}|_\ell^{-\sigma}, & \text{если} \quad b > \sigma,\ b \ne |\theta|; \\ |\dot{x}|_\ell^{-\sigma} \ln(1 + |\dot{x}|_\ell), & \text{если} \quad b = \sigma,\ b \ne |\theta| \\ |\dot{x}|_\ell^{-\sigma} \ln^2(1 + |\dot{x}|_\ell), & \begin{matrix}\text{или} \\ \text{если}\end{matrix} \quad \begin{matrix} b > \sigma,\ b = |\theta|; \\ b = \sigma = |\theta|; \end{matrix} \\ |\dot{x}|_\ell^{-b}, & \text{если} \quad b < \sigma. \end{cases}$$

Пусть $u(x)$ - обобщенное решение степенного роста уравнения (1), для которого выполняется равенство

$$\lim_{|t| \to \infty} \left(\prod_{j=1}^{n} t_j \right)^{-1} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} u(y)\, dy = 0.$$

Тогда (с точностью до значений на множестве меры нуль)

$$\Phi^{-1}(x) D^\rho u(x) \in C^{\lambda'}(R^n)$$

и справедливы оценки:

$$\| \Phi^{-1}(x) D^\rho u(x), C^{\lambda'} \| \le C \| |\dot{x}|_\ell^{b} f(x), C^{s,\lambda} \|,$$

$$| D^\rho u(x) | \le c\, \Phi(x) \| |\dot{x}|_\ell^{b} f(x), C^{s,\lambda} \|. \tag{30}$$

Приведем пример, показывающий точность оценки (30).

Как известно, решение уравнения $\Delta w = f$, равное нулю на бесконечности, где $f \in C_0^\infty(R^n)$, удовлетворяет оценке:

$$| D^\rho w(x) | \le c^{(1)} |x|^{2 - |\rho| - n}. \tag{31}$$

Функция $u(x) = \varphi(x)\,w(x)\,\ln|x|^2$, где $\varphi(x) = 0$ в некоторой окрестности начала координат и $\varphi(x) = 1$ при $|x| > 2$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = g$, где правая часть $g(x)$ при $|x| > 2$ равна

$$4|x|^{-2} \sum_{j=1}^{n} x_j w_j + (2n-4)|x|^{-2} w.$$

Учитывая (31), получаем (при $|x| > 2$)

$$|g(x)| \leq c^{(2)} |x|^{-n}$$

и

$$|D^{\rho} u(x)| \leq C^3 |x|^{2-n-|\rho|} \ln|x|. \tag{32}$$

В наших обозначениях $m_j = \ell_j = 2$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $|x|_\ell \sim |x|^2$; $|\theta| = n/2$, $b = |\theta|$ и $\Phi(x) = |\dot{x}|^{2-n-|\rho|} \ln(1+|\dot{x}|)$ при $|\rho| < 2$, т.е. оценка (32) совпадает с оценкой (30) теоремы.

Литература

1. Успенский С.В. О дифференциальных свойствах решений одного класса псевдодифференциальных уравнений на бесконечности.- Сиб.мат.журн.,1972, т.13, №3, с.665-678; №4, с.903-909.
2. Успенский С.В., Чистяков Б.Н. О выходе на полином при стремлении $|x| \to \infty$ решений одного класса псевдодифференциальных уравнений.- Сиб.мат.журн., 1975, т.16, №5, с.1053-1070.
3. Багиров Л.А., Кондратьев В.А. Об одном классе эллиптических уравнений в R^n.- В кн.: Дифференц. уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л. Соболева), Новосибирск, 1978, №2, с.5-16.
4. Успенский С.В. О представлении функций, определенных одним классом гипоэллиптических операторов.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1972, т.117, с. 292-299.