УДК 517.946

КОРРЕКТНЫЕ ПОСТАНОВКИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

В.В.Хаблов (Новосибирск)

Рассматриваются граничные задачи для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза [1] :

$$u_t + D^3 u \pm u^2 D u = 0 \tag{1}$$

(здесь $D = \frac{\partial}{\partial x}$) в ограниченной и неограниченных областях. Доказывается однозначная разрешимость этих задач в пространствах Соболева.

Рассмотрим в плоскости R^2 прямоугольник

$$Q = \{(x,t) : x \in (0,1);\ t \in (0,T)\}.$$

Граничная задача 1. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области Q и принимающую значения

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = Du(1,t) = 0. \tag{3}$$

Теорема 1. <u>Для произвольного</u> $T > 0$ <u>и произвольной функции</u> $u_0 \in W_2^3(0,1)$, <u>удовлетворяющей равенствам</u> $u_0(0) = u_0(1) = u_0'(1) = 0$, <u>задача (1) - (3) имеет решение</u> u <u>в пространстве</u> W , <u>норма в котором задается</u>

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^\infty(0,T;W_2^3(0,1))} + \|u\|_{L^2(0,T;W_2^4(0,1))} +$$

$$+ \|u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \|u_t\|_{L^2(0,T;W_2^1(0,1))}.$$

Для доказательства теоремы 1 потребуются некоторые неравенства с параметром, которые выводятся в следующих леммах.

Лемма 1. <u>Для произвольной функции</u> $v \in W_2^4(0,1)$, <u>удовлетворяющей условиям</u> $v(0) = v(1) = v'(1) = v'''(1) = 0$, и <u>для произвольных чисел</u> $\nu, \lambda, \mu \in R$, $2 \le p < \infty$, <u>справедливо неравенство</u>

$$\| e^{\mu x} v^{(i)} \|_{L^p(0,1)} \le C(p,\lambda,\mu) \| e^{\lambda x} v^{(4)} \|^{\alpha_i}_{L^2(0,1)} \| v \|^{1-\alpha_i}_{L^2(0,1)}, \tag{4}$$

$$\alpha_i = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} + i\right), \quad i = 0,1,2,3.$$

Доказательство. Как известно [2], для произвольной функции $v \in W_2^4(0,1)$ имеет место оценка

$$\| v^{(i)} \|_{L^p(0,1)} \le C_1 \| v \|^{\alpha_i}_{W_2^4(0,1)} \| v \|^{1-\alpha_i}_{L^2(0,1)}.$$

Утверждение леммы будет доказано, если получить оценку

$$\| v \|_{L^2(0,1)} \le C_2 \| v^{(4)} \|_{L^2(0,1)}$$

с постоянной C_2, не зависящей от функции v, удовлетворяющей условиям леммы. Последнее неравенство получается из тождества

$$-\int_0^1 v^{(4)}(x)dx \int_0^x y v(y)dy = \int_0^1 x v'''(x) v(x) dx,$$

к левой части которого применяется неравенство Шварца, а правая часть преобразуется с помощью интегрирования по частям. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $2 \le p < \infty$. Существуют такие постоянные $\lambda_0 > 0$, $C_0(p) > 0$, что для произвольного $\lambda > \lambda_0$ и произвольной функции $u \in W_2^4(e^{-\lambda}, 1)$, удовлетворяющей условиям

$$u(e^{-\lambda}) = u'(e^{-\lambda}) = v'''(e^{-\lambda}) + \frac{9}{2} e^{\lambda} u''(e^{-\lambda}) = u(1) = 0,$$

справедлива оценка

$$\| u^{(i)} \|_{L^p(e^{-\lambda},1)} \le C_0(p) \| u^{(4)} \|^{\alpha_i}_{L^2(e^{-\lambda},1)} \| u \|^{1-\alpha_i}_{L^2(e^{-\lambda},1)}, \tag{5}$$

$$\alpha_i = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} + i\right), \quad i = 0,1,2,3.$$

Доказательство. Ввиду неравенства (см. [2])

$$\| u^{(i)} \|_{L^p(e^{-\lambda},1)} \le C_1(p) \| u \|^{\alpha_i}_{W_2^4(e^{-\lambda},1)} \| u \|^{1-\alpha_i}_{L^2(e^{-\lambda},1)},$$

справедливого для любой функции $u \in W_2^4(e^{-\lambda}, 1)$, утверждение леммы будет доказано, если для произвольной функции u, удовлетворяющей условиям, получить оценку

$$\| u \|_{W_2^4(e^{-\lambda},1)} \le C_2 \| u^{(4)} \|_{L^2(e^{-\lambda},1)}. \tag{6}$$

Пусть $h = u^{(4)}$. Тогда для некоторых $A_1, \ldots, A_4 \in R$ имеем

$$u(z)=A_1+A_2z+A_3z^2+A_4z^3+\int_{e^{-\lambda}}^{z}dz_1\int_{e^{-\lambda}}^{z_1}dz_2\int_{e^{-\lambda}}^{z_2}dz_3\int_{e^{-\lambda}}^{z_3}h(z_4)dz_4 .$$

Из условия леммы вытекает, что

$$A_1+e^{-\lambda}A_2+e^{-2\lambda}A_3+e^{-3\lambda}A_4=0,$$

$$A_2+2e^{-\lambda}A_3+3e^{-2\lambda}A_4=0,$$

$$3A_3+11e^{-\lambda}A_4=0,$$

$$A_1+A_2+A_3+A_4=-\int_{e^{-\lambda}}^{1}dz_1\int_{e^{-\lambda}}^{z_1}dz_2\int_{e^{-\lambda}}^{z_2}dz_3\int_{e^{-\lambda}}^{z_3}h(z_4)dz_4 .$$

Решая эту систему относительно $A_1,\dots,A_4$, получаем

$$A_4=-\left(1-\frac{11}{3}e^{-\lambda}+\frac{13}{3}e^{-2\lambda}-\frac{5}{3}e^{-3\lambda}\right)^{-1}\int_{e^{-\lambda}}^{1}dz_1\int_{e^{-\lambda}}^{z_1}dz_2\int_{e^{-\lambda}}^{z_2}dz_3\int_{e^{-\lambda}}^{z_3}h(z_4)dz_4,$$

$$A_1=-\frac{5}{3}e^{-3\lambda}A_4,\quad A_2=\frac{13}{3}e^{-2\lambda}A_4,\quad A_3=-\frac{11}{3}e^{-\lambda}A_4,$$

откуда и следует оценка (6) для достаточно больших λ. Лемма доказана.

Лемма 3. Для произвольных p, $2\le p<\infty$, и μ, $\mu>4\lambda_0$, существует такая постоянная $C(\mu)$, что для любой функции $v\in W_2^4(0,1)$, удовлетворяющей условиям леммы 1, имеет место оценка

$$\|e^{\alpha_i\mu x}v^{(i)}\|_{L^p(0,1)}\le 2C_0(p)\|e^{\mu x}v^{(4)}\|^{\alpha_i}_{L^2(0,1)}\|v\|^{1-\alpha_i}_{L^2(0,1)}+C(\mu)\|v\|_{L^2(0,1)},\quad (7)$$

$$\alpha_i=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+i\right),\quad i=0,1,2,3.$$

Доказательство. Пусть $\mu=4\lambda$; $z=e^{-\lambda x}$; $u(z)=e^{\frac{\lambda x}{2}}v(x)$. Тогда

$$u'(z)=-\left[\frac{1}{2}v(x)+\lambda^{-1}v'(x)\right]e^{\frac{3\lambda}{2}x},$$

$$u''(z)=\left[\frac{3}{4}v(x)+2\lambda^{-1}v'(x)+\lambda^{-2}v''(x)\right]e^{\frac{5\lambda x}{2}},$$

$$u'''(z)=-\left[\frac{15}{8}v(x)+\frac{23}{4}\lambda^{-1}v'(x)+\frac{9}{2}\lambda^{-2}v''(x)+\lambda^{-3}v'''(x)\right]e^{\frac{7\lambda}{2}x},$$

$$u^{(4)}(z)=\left[\frac{105}{16}v(x)+22\lambda^{-1}v'(x)+\frac{43}{2}\lambda^{-2}v''(x)+8\lambda^{-3}v'''(x)+\lambda^{-4}v^{(4)}(x)\right]e^{\frac{9\lambda}{2}x}.$$

Из этих равенств следует, что функция $u(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2 и для нее имеет место оценка (5). Возвращаясь к функции v и переменной

x , получаем

$$\|e^{\alpha_i \mu x} v^{(i)}\|_{L^p(0,1)} \le c_0(p)\|e^{\mu x} v^{(4)}\|^{\alpha_i}_{L^2(0,1)} \|v\|^{1-\alpha_i}_{L^2(0,1)} +$$

$$+\sum_{j<i} a_j(p,\mu)\|e^{\alpha_i\mu x} v^{(j)}\|_{L^p(0,1)} + \|v\|^{1-\alpha_i}_{L^2(0,1)} \sum_{k<4} b_k(p,\mu)\|e^{\mu x} v^{(k)}\|^{\alpha_i}_{L^2(0,1)}.$$

Нормы, стоящие в правой части этого неравенства под знаками сумм, оценим по неравенству (4) , а затем воспользуемся неравенством Юнга. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Решение задачи (1) - (3) будем искать по методу Галёркина. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ полную систему $\{\varphi_i\}_{i=1,2,\dots}$, элементы которой являются решениями спектральной задачи $\mathcal{L}\varphi_i = -(e^{2\mu x}\varphi_i''')''' = \rho_i\varphi_i$, $\varphi(0)=\varphi'''(0)=\varphi^{(4)}(0)=\varphi(1)=\varphi'(1)=\varphi'''(1)=0.$ Приближения Галёркина ищем в виде

$$u^n = \sum_{i=1}^{n} g_i^n(t)\varphi_i ,$$

где функции g_i^n находятся как решения задачи Коши

$$(u^n_t + D^3 u^n \pm (u^n)^2 D u^n, \varphi_i) = 0 , \quad i=1,\dots,n, \tag{8}$$

$$g_i^n(0) = K_i , \quad i=1,\dots,n. \tag{9}$$

Здесь $(\,,\,)$ - скалярное произведение в $L^2(0,1)$, K_i - коэффициенты Фурье функции u_0 в разложении по системе $\{\varphi_i\}$.

Из системы (8) очевидно получается оценка

$$\|u^n\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \le \|u_0\|_{L^2(0,1)} , \tag{10}$$

из которой следует разрешимость задачи (8) - (9) на всем интервале $(0,T)$. Умножим теперь уравнения системы (8) на $\rho_i g_i^n(t)$, просуммируем по i и проинтегрируем по $(0,t)$. Получим неравенство

$$\|e^{\mu x} D^3 u^n\|^2_{L^2(0,1)}(t) + \mu\int_0^t \|e^{\mu x} D^4 u^n\|^2_{L^2(0,1)}(\tau)d\tau \le$$

$$\le \|e^{\mu x} u_0'''\|^2_{L^2(0,1)} + 2\int_0^t |((u^n)^2 D u^n, D^3(e^{2\mu x} D^3 u^n))| d\tau + c_3(\mu).$$

Интегрируя выражение $((u^n)^2 D u^n, D^3(e^{2\mu x} D^3 u^n))$ по частям, применяя неравенство Гёльдера, пользуясь леммой 3 и оценкой (10) , получаем

$$\|e^{\mu x} D^3 u^n\|^2_{L^2(0,1)}(t) + \mu\int_0^t \|e^{\mu x} D^4 u^n\|^2_{L^2(0,1)}(\tau)d\tau \le$$

$$\leq \| e^{\mu x} u_0''' \|^2_{L^2(0,1)} + C_4 \int_0^t \| e^{\mu x} D^4 u^n \|^2_{L^2(0,1)}(\tau)\, d\tau + C_5(\mu). \qquad (11)$$

Поскольку постоянная C_4 в неравенстве (11) не зависит от $\mu > 4\lambda_0$, то из (11') следует оценка

$$\| e^{\mu x} D^3 u^n \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \| e^{\mu x} D^4 u^n \|^2_{L^2(Q)} \leq C_6 . \qquad (12)$$

Из системы (8) теперь легко получить неравенство

$$\| u_t \|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq C_7 . \qquad (13)$$

Осуществляя затем обычный предельный переход по подпоследовательности $\{u^{n_m}\}$, получаем решение u задачи (1) - (3) . Из оценок (10), (12) ,(13) и уравнения (1) следует, что $u \in W$. Теорема доказана.

Граничная задача $2^{\pm}$. Найти функцию $u(x,t)$,удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области $Q_л = R_- \times (0,T)$ и принимающую заданные значения

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad (14)$$

$$u(t,0) = Du(t,0) = 0. \qquad (15)$$

Граничная задача $3^{\pm}$. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области $Q_{пр} = R_+ \times (0,T)$ и принимающую заданные значения

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad (16)$$

$$u(t,0) = 0. \qquad (17)$$

Теорема 2. <u>Для произвольной функции</u> $u_0 \in W_2^3(R_{-(+)})$, <u>удовлетворяющей условиям</u> $u_0(0) = u_0'(0) = 0$. $(u_0(0) = 0)$, <u>и произвольного</u> $T > 0$ <u>существует решение</u> u <u>задачи</u> $2^{\pm}(3^{\pm})$ <u>из пространства</u> $W_{л(пр)}$, <u>норма в котором определена равенством</u>

$$\| u \|_{W_{л(пр)}} = \| u \|_{L^\infty(0,T;W_2^3(R_{-(+)}))} + \| u_t \|_{L^\infty(0,T;L^2(R_{-(+)}))} .$$

Доказательству теоремы 2 предпошлем две леммы.

Рассмотрим функцию $\eta \in C^\infty(R)$, удовлетворяющую равенствам

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Для произвольного $n \in N$ функции $\eta_л^n$ и $\eta_{пр}^n$ определим равенствами

$$\eta_л^n(x) = \eta(-x + n),$$

$$\eta_{пр}^n(x) = \eta(x - n).$$

Рассмотрим следующие уравнения:

$$-\varepsilon D^6 u + u_t + \eta^n_{\pi(n\pi)} D^3(\eta^n_{\pi(n\pi)} u) \pm (\eta^n_{\pi(n\pi)})^3 u^2 D(\eta^n_{\pi(n\pi)} u) = 0. \qquad (18)$$

Лемма 4. Для произвольного $\varepsilon > 0$ и $n \in N$ задача (18), (14) имеет решение u из пространства

$$W^{6,1}_{\pi} = L^2(0,T;\mathcal{H}^6_{\pi}) \cap W^1_2(0,T;L^2(R_-)),$$

$$(W^{6,1}_{n\pi} = L^2(0,T;\mathcal{H}^6_{n\pi}) \cap W^1_2(0,T;L^2(R_+))),$$

где подпространства $\mathcal{H}^6_{\pi} \subset W^6_2(R_-)$ и $\mathcal{H}^6_{n\pi} \subset W^6_2(R_+)$ выделяются равенствами $v(0) = v'(0) = v'''(0) = 0$ и $v(0) = v'''(0) = v^{(4)}(0) = 0$ соответственно.

Кроме того, для произвольного $n \in N$ имеет место оценка

$$\|u\|_{W^{6,1}_{\pi(n\pi)}} \le C\left(\varepsilon, \|u_0\|_{W^3_2(R_{-(+)})}\right). \qquad (19)$$

Доказательство. Построим такое семейство операторных уравнений, зависящее от параметра $\lambda \in [0,1]$, что решение уравнения при $\lambda = 1$ есть решение задачи (18), (14).

Из общей теории параболических уравнений [3] следует существование непрерывных отображений

$$M_{\pi} : L^2(Q_{\pi}) \times (W^3_2(R_-) \cap \overset{\circ}{W}{}^2_2(R_-)) \longrightarrow W^{6,1}_{\pi}$$

и

$$M_{n\pi} : L^2(Q_{n\pi}) \times (W^3_2(R_+) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(R_+)) \longrightarrow W^{6,1}_{n\pi},$$

ставящих в соответствие каждой паре $[f; v_0]$ решение задачи

$$-\varepsilon D^6 u + u_t = f, \qquad (20)$$

$$u(x,0) = v_0. \qquad (21)$$

Определим семейство операторов $B_{\pi(n\pi)}(\lambda, u)$ равенствами

$$B_{\pi(n\pi)}(\lambda,u) = \lambda M_{\pi(n\pi)}\left[-\eta^n_{\pi(n\pi)} D^3(\eta^n_{\pi(n\pi)} u) \mp (\eta^n_{\pi(n\pi)})^3 u^2 D(\eta^n_{\pi(n\pi)} u); u_0\right]$$

и рассмотрим семейство операторных уравнений

$$u = B_{\pi(n\pi)}(\lambda, u), \quad 0 \le \lambda \le 1, \qquad (22)$$

в пространстве $W^{6,1}_{\pi(n\pi)}$. Покажем, что для этого семейства выполнены условия теоремы Лерэ-Шаудера.

Докажем, что оператор B_{π} вполне непрерывен. Остановимся более подробно на нелинейном слагаемом.

Прежде всего, заметим, что для произвольного $n \in N$ имеет место непрерывное отображение, определяемое оператором сужения

$$W^{6,1}_{\pi} \longrightarrow L^2(0,T; W^6_2(-n,0)) \cap W^1_2(0,T;L^2(-n,0)).$$

Вложения $W_2^6(-n,0)\subset W_6^1(-n,0)\subset L^2(-n,0)$ компактны, следовательно, по лемме Лионса [4], компактно и вложение

$$L^2(0,T;W_2^6(-n,0))\cap W_2^1(0,T;L^2(-n,0))\subset L^6(0,T;W_6^1(-n,0)),$$

а значит, компактен оператор

$$k:L^2(0,T;W_2^6(-n,0))\cap W_2^1(0,T;L^2(-n,0))\longrightarrow (L^6((-n,0)\times(0,T)))^3,$$

задаваемый равенством

$$k(u)=(u;u;D(\eta_\ell^n u)).$$

Как известно [5], оператор $\mu:(u_1;u_2;u_3)\longrightarrow\eta_\ell^n u_1u_2u_3$ непрерывно отображает пространство $(L^6((-n,0)\times(0,T)))^3$ в пространство $L^2((-n,0)\times(0,T))$. Следовательно, отображение $\mu\circ k\circ j$ из пространства $W_\ell^{6,1}$ в пространство $L^2(Q_\ell^T)$ вполне непрерывно.

Из полной непрерывности операторов

$$u\longrightarrow\eta_\ell^n D^3(\eta_\ell^n u)\mp(\eta_\ell^n)^3u^2D(\eta_\ell^n u)$$

и непрерывности оператора M_ℓ следует полная непрерывность оператора $B_\ell(\lambda,u)$ для произвольного $\lambda\in[0,1]$.

Получим требуемые условиями теоремы Лерэ-Шаудера априорные оценки. Заметим, что по определению операторов $M_{\ell(np)}$ решения уравнения (22) являются решениями задачи (20), (21) при

$$f=\lambda\left(-\eta^n_{\ell(np)}D^3(\eta^n_{\ell(np)}u)\mp(\eta^n_{\ell(np)})^3u^2D^2(\eta^n_{\ell(np)}u)\right),$$

$$v_0=\lambda u_0.$$

Умножим уравнение (20) последовательно на u, D^6u и u_t, проинтегрируем по частям, применяя неравенство Гёльдера и мультипликативные оценки промежуточных производных [6], а также неравенство Юнга. Оценим, например, один из интегралов, получающихся от нелинейного члена:

$$\int_{R_-}(\eta_\ell^n)^4u^2DuD^6u\,dx\le\|D^6u\|_{L^2(R_-)}\|u\|^2_{L^6(R_-)}\|Du\|_{L^6(R_-)}\le$$
$$\le C_1\|D^6u\|^{4/3}_{L^2(R_-)}\|u\|^{8/3}_{L^2(R_-)}\le C_2\|D^6u\|^2_{L^2(R_-)}+C_3.$$

Остальные оцениваются аналогично. Таким образом, получается оценка (19) для решений уравнения (22). Теперь ясно, что семейство уравнений (22) удовлетворяет условиям теоремы Лерэ-Шаудера, что позволяет завершить доказательство леммы.

Пользуясь независимостью постоянной C от $n\in N$ в оценке (19) в уравнении (18) можно произвести обычный предельный переход по подпоследовательности $\{u_{n_m}\}$. Таким образом, имеет место

Лемма 5. Для произвольного $\varepsilon > 0$ и произвольной функции u_0, удовлетворяющей условиям теоремы 2, задача

$$-\varepsilon D^6 u^\varepsilon + u_t^\varepsilon + D^3 u^\varepsilon \pm (u^\varepsilon)^2 D u^\varepsilon = 0, \tag{23}$$

$$u^\varepsilon(x,0) = u_0(x) \tag{24}$$

имеет решение $u \in W^{6,1}_{Л(пр)}$.

Доказательство теоремы 2 проведем, используя предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в задаче (23), (24). Получим априорные оценки решений задачи (23), (24), не зависящие от ε. Умножим уравнение (23) на u^ε и проинтегрируем по частям. Получим оценку

$$\varepsilon \| D^3 u^\varepsilon \|^2_{L^2(Q_{Л(пр)})} + \| u^\varepsilon \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(R_{-(+)}))} \le \| u_0 \|^2_{L^2(R_{-(+)})}. \tag{25}$$

Для задач $2^{\pm}$ и 3^- умножим уравнение (23) на выражение

$$m(u^\varepsilon) = D^6 u^\varepsilon \pm \frac{7}{3}(u^\varepsilon)^2 D^4 u^\varepsilon \pm \frac{28}{3} u^\varepsilon D u^\varepsilon D^3 u^\varepsilon \pm$$

$$\pm 7 u^\varepsilon (D^2 u^\varepsilon)^2 \pm \frac{35}{3} (D u^\varepsilon)^2 D^2 u^\varepsilon +$$

$$+ \frac{35}{18} (u^\varepsilon)^4 D^2 u^\varepsilon + \frac{35}{9} (u^\varepsilon)^3 (D u^\varepsilon)^2$$

и проинтегрируем по области $R_{-(+)} \times (0,t)$.

Оценивая, как и раньше, нелинейные члены, приходим к оценке

$$\varepsilon \| D^6 u^\varepsilon \|^2_{L^2(Q_{Л(пр)})} + \| D^3 u^\varepsilon \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(R_{-(+)}))} \le C_8 . \tag{26}$$

Из уравнения (23) теперь оцениваем производную u_t^ε, что позволяет произвести предельный переход по последовательности $\{\varepsilon_k\}$ и получить утверждение теоремы относительно задач 2^-, 2^+ и 3^-.

Для оставшегося случая умножим уравнение (23) сначала на $D^6 u^\varepsilon$, затем на u_t^ε и для некоторого $t_1 > 0$ получим оценку

$$\varepsilon \| D^6 u^\varepsilon \|^2_{L^2(0,t_1;L^2(R_+))} + \| u_t^\varepsilon \|^2_{L^2(0,t_1;L^2(R_+))} \le C_9 \left(\| u_0 \|_{W_2^3(R_+)} \right). \tag{27}$$

Эта оценка позволяет произвести предельный переход к решению задачи 3^+ на интервале $t \in (0,t_1)$ по $\{\varepsilon_k\}$.

Умножим теперь уравнение (1) на выражение $D^2 u + \frac{1}{3} u^3$. Интегрируя по частям, получаем равенство

$$\frac{1}{2}\|Du\|^2_{L^2(R_+)}(t)+\frac{1}{12}\|u\|^4_{L^4(R_+)}(t)+\int_0^t|D^2u(0,\tau)|^2d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\|u_0'\|^2_{L^2(R_+)}+\frac{1}{12}\|u_0\|^4_{L^4(R_+)}, \tag{28}$$

справедливое $\forall t\in(0,t_1)$.

Теорема вложения [4] позволяет перенести оценку (28) на функции u^{ε_κ} для достаточно больших κ .

Умножим уравнение (23) на $m(u^\varepsilon)$ и проинтегрируем по области $R_+\times(0,t)$, $0<t\le t_1$. Имеем неравенство

$$\varepsilon\|D^6u^\varepsilon\|^2_{L^2(0,t_1;L^2(R_+))}+\|D^3u^\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,t_1;L^2(R_+))}\le C_8+C_9\int_0^{t_1}(Du^\varepsilon)^2(D^2u^\varepsilon)(0,t)dt,$$

откуда с учетом (28) получим

$$\varepsilon\|D^6u^\varepsilon\|^2_{L^2(0,t_1;L^2(R_+))}+\|D^3u^\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,t_1;L^2(R_+))}\le C_{10}. \tag{29}$$

Постоянная C_{10} в (29) зависит лишь от T и $\|u_0\|_{W_2^3(R_+)}$. Оценка (27) может быть теперь продолжена на интервал $(0,t_2)\supset(0,t_1)$. Итерируя описанную процедуру, за конечное число итераций получаем последовательность $\{u^{\varepsilon_{\kappa_s}}\}$, $s\in N$, сходящуюся в слабом смысле к решению u задачи 3^+ . Теорема доказана.

Пусть W_2^κ - одно из пространств $W_2^\kappa(0,1)$; $W_2^\kappa(R_-)$; $W_2^\kappa(R_+)$; $W^{2,1}$- пространство функций u с конечной нормой

$$\|u\|_{W^{2,1}}=\|u\|_{L^\infty(0,T;W_2^2)}+\|u_t\|_{L^\infty(0,T;W_2^{-1})}.$$

Теорема 3. Для произвольной функции $u_0\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ граничные задачи $1,2^+,2^-,3^+,3^-$ имеют не более одного обобщенного решения из соответствующих пространств $W^{2,1}$.

Доказательство. Докажем, например, единственность задачи 1.

Пусть $v_1,v_2\in W^{2,1}$ - два таких решения. Положим $v=v_1-v_2$. Тогда имеют место равенства:

$$\int_0^t<v_{1t},v>d\tau-\int_0^t d\tau\int_0^1\left(D^2v_1+\frac{1}{3}v_1^3\right)Dv\,dx=0, \tag{30}$$

$$\int_0^t<v_{2t},v>d\tau-\int_0^t d\tau\int_0^1\left(D^2v_2+\frac{1}{3}v_2^3\right)Dv\,dx=0. \tag{31}$$

Здесь символом $<\,,\,>$ обозначено отношение двойственности между пространствами $W_2^{-1}(0,1) = (\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))'$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$.

Вычитая (31) из (30), получаем

$$\int_0^t < v_t, v > d\tau \leq \frac{1}{6}\int_0^t d\tau \int_0^1 v^2 \left| D(v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2)\right| dx. \qquad (32)$$

Заметим, что для произвольной функции $\varphi \in W^{2,1} \cap C^1(\bar{Q})$ выполняется

$$\int_0^t < \varphi_t, \varphi > d\tau = \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(0,1)}(t) - \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(0,1)}(0).$$

Поскольку имеет место непрерывное вложение $W^{2,1} \subset C(0,T; L^2(0,1))$ (см. [4]), это равенство справедливо для всех функций $\varphi \in W^{2,1}$.

Учитывая это замечание, из оценки (32) с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$\|v\|^2_{L^2(0,1)}(t) \leq \frac{1}{6}\int_0^t \|v\|^2_{L^2(0,1)}(\tau)\|D(v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2)\|_{L^\infty(0,1)}(\tau)d\tau \leq C\int_0^t \|v\|^2_{L^2(0,1)}(\tau)d\tau. \quad (33)$$

Применяя к неравенству (33) лемму Гронуолла [7], заключаем, что $v \equiv 0$. Теорема доказана.

Литература

1. Нелинейные волны: [Сб.статей под ред. С.Лейбовича и А.Сибасса]. -М.: Мир, 1977.- 320 с.
2. Ильин В.П. Свойства некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных в n- мерных областях.- Тр.мат. ин-та АН СССР, 1962, т.16, с.227-362
3. Lions J.-L., Magenes E. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, II. - Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972,- 244 p.
4. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.-М.: Наука, 1971.- 372 с.
5. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.-М.: Гостехиздат, 1956.- 392 с.
6. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.- М.: Наука, 1977.- 456 с.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Мир, 1970.- 720 с.