УДК 517.9

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА, СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРАМИ div и grad

М.Е.Боговский (Москва)

Для ограниченных и неограниченных областей $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$, как с компактными, так и некомпактными границами $\partial\Omega$ строится в явном виде семейство векторных полей $v = v(x)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ из пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega; R^n)$, являющихся решениями краевой задачи

$$\operatorname{div} v = f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega, \tag{1}$$

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

при произвольно заданных $f(x) \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, удовлетворяющих в случае, когда Ω - ограниченная область, необходимому условию согласования

$$\int_\Omega f(x)dx = 0. \tag{3}$$

При $p = 2$ задача (1),(2) рассматривалась в [1-3]. Результаты настоящей работы, касающиеся областей с компактными границами, были опубликованы в заметке автора [4].

Пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega; R^n)$ определяется здесь как пополнение $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega; R^n)$ в норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega; R^n)} = \sum_{|\alpha| = l} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L_p(\Omega; R^n)}, \quad u = (u_1, \ldots, u_n).$$

Для удобства положим

$$\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega; R^1) = \overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega), \quad L_p(\Omega; R^1) = L_p(\Omega).$$

В § 1 настоящей работы доказывается разрешимость задачи (1),(2) в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega; R^n)$ с любой $f(x) \in L_p(\Omega)$ при выполнении условия (3) для ограниченных областей Ω, удовлетворяющих условию конуса [5]. Условие конуса состоит в следующем. Существует конечный открытый выпуклый конус C

такой, что каждая точка $x \in \Omega$ является вершиной некоторого конечного конуса C_x, содержащегося в Ω и конгруэнтного конусу C.

В § 2 доказывается разрешимость задачи (1),(2) в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ с любой $f(x) \in L_p(\Omega)$ для неограниченных областей Ω с компактными границами, удовлетворяющих условию конуса.

Таким образом, для областей с компактными границами неразрешимость задачи (1),(2) при каких-либо $f(x) \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющих, если Ω ограничена, условию (3), возможна только в случае негладкости границы $\partial\Omega$. Оказывается, что для неограниченных областей с некомпактными границами разрешимость задачи (1),(2) зависит уже не только от гладкости границы, но и от геометрии области. В § 3 приводятся примеры областей со сколь угодно гладкими некомпактными границами, для которых задача (1),(2) разрешима уже не при любых $f(x) \in L_p(\Omega)$, $1<p<\infty$, $n \geqslant 2$. Такими областями являются, в частности, слой и цилиндр в $\mathbb{R}^n$. В связи с этим возникает необходимость сужения класса рассматриваемых областей с некомпактными границами. В § 3 доказана разрешимость задачи (1),(2) при любой $f(x) \in L_p(\Omega)$ для областей Ω, представимых в виде конечной суммы неограниченных специальных липшицевых областей [6] и ограниченных областей, удовлетворяющих условию конуса. Специальная липшицева область может быть определена следующим образом [7]. Существует открытый выпуклый полубесконечный конус Γ такой, что $\Omega + \Gamma \subset \Omega$. В § 3, так же как и в § 1,2, решение задачи (1),(2) строится в явном виде.

В § 4 рассматривается задача, связанная с задачей (1),(2). Точнее, пусть обобщенная функция $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$, где $\mathcal{D}'(\Omega)$- пространство Шварца, и пусть

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in W_p^{-1}(\Omega), \quad i=1,\ldots,n, \quad 1<p<\infty, \tag{4}$$

где $W_p^{-1}(\Omega)$- пространство линейных непрерывных функционалов на $\overset{\circ}{W}{}_{p'}^1(\Omega)$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Нетрудно убедиться, что для любой области Ω в $\mathbb{R}^n$ такая обобщенная функция φ будет функцией из $L_{p,loc}(\Omega)$. Возникает естественный вопрос: будет ли φ функцией из $L_p(\Omega)$, если Ω ограничена, и найдется ли функция ψ из $L_p(\Omega)$, отличающаяся от φ на константу, если Ω не ограничена?

В случае ограниченной области Ω с $\partial\Omega$ из C^2 и $p=2$ этот вопрос рассматривался в [8, см. сноску на с.320].

В § 4 доказывается, что для областей Ω с компактными границами, удовлетворяющих условию конуса, $\varphi \in L_p(\Omega)$, если Ω ограничена, и найдется $\psi \in L_p(\Omega)$, отличающаяся от φ на константу, если Ω не ограничена. В случае же, когда Ω - неограниченная область с некомпактной границей, ответ на поставленный вопрос усложняется, а именно: существуют области Ω в $\mathbb{R}^n$ (например, слой и цилиндр), для которых найдутся $\varphi \in L_{p,loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$,

удовлетворяющие условию (4) и такие, что любая функция ψ, отличающаяся от φ на константу, не принадлежит $L_p(\Omega)$. Ввиду этого, в § 4 рассматривается такой же класс областей Ω, как и в § 3. При этом выясняется, что для всякой обобщенной функции $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$, удовлетворяющей условию (4), найдется функция $\psi \in L_p(\Omega)$, отличающаяся от φ на константу, тогда и только тогда, когда $\overset{\circ}{J}{}_p^1(\Omega) = \hat{\overset{\circ}{J}}{}_p^1(\Omega)$, где $\overset{\circ}{J}{}_p^\ell(\Omega)$- замыкание в $\overset{\circ}{W}{}_p^\ell(\Omega;R^n)$ подпространства

$$\overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega) = \{v(x) : v(x) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega;R^n),\ div\, v = 0\}$$

и

$$\hat{\overset{\circ}{J}}{}_p^\ell(\Omega) = \{v(x) : v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^\ell(\Omega;R^n),\ div\, v = 0\}.$$

Вопрос об изучении областей Ω, для которых совпадают пространства $\overset{\circ}{J}{}_p^\ell(\Omega)$ и $\hat{\overset{\circ}{J}}{}_p^\ell(\Omega)$, был поставлен Дж.Хейвудом в [13]. Этот вопрос рассматривается также в § 1,2 настоящей работы для областей с компактными границами. В случае областей с некомпактными границами этот вопрос рассматривался в [2,14,19].

Автор выражает искреннюю признательность проф. В.Н.Масленниковой за внимание к работе и ценное обсуждение.

§ 1. Ограниченные области

Прежде чем сформулировать теорему о разрешимости задачи (1),(2), докажем следующую лемму, уточняющую, в чем именно состоит проблема разрешимости задачи (1),(2). Обозначим

$$\tilde{L}_p(\Omega) = \{f(x) : f(x) \in L_p(\Omega),\ \int_\Omega f(x)dx = 0\}.$$

Лемма 1. *Пусть Ω - произвольная область в R^n, $n \geq 2$, $1<p<\infty$. Тогда область значений $\mathcal{R}(div)$ линейного дифференциального оператора*

$$div : \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega;R^n) \longrightarrow L_p(\Omega) \tag{5}$$

плотна в $\tilde{L}_p(\Omega)$, если $m\Omega < \infty$, и плотна в $L_p(\Omega)$, если $m\Omega = +\infty$, где $m\Omega$ - мера области Ω.

Доказательство. Действительно, оператором, сопряженным к (5), является линейный оператор

$$grad : L_{p'}(\Omega) \longrightarrow W_{p'}^{-1}(\Omega;R^n), \tag{6}$$

если $m\Omega = +\infty$, и оператор

$$grad : \tilde{L}_{p'}(\Omega) \longrightarrow W_{p'}^{-1}(\Omega;R^n), \tag{7}$$

если $m\Omega < \infty$, поскольку $\mathcal{R}(div) \subset \tilde{L}_p(\Omega)$ и $(\tilde{L}_p(\Omega))^* = \tilde{L}_{p'}(\Omega)$.

Заметим, что операторы (6),(7) имеют тривиальные ядра, откуда сразу же и следует утверждение леммы.

В силу доказанной леммы, разрешимость задачи (1),(2) при любых $f(x) \in L_p(\Omega)$ (удовлетворяющих, если $m\Omega < \infty$, условию (3)) эквивалентна замкнутости области значений оператора (5) в $L_p(\Omega)$.

Однако существуют ограниченные области Ω в R^n, не удовлетворяющие условию конуса, для которых область значений оператора (5) не замкнута в $L_p(\Omega)$. Действительно, нетрудно убедиться, что для всякой ограниченной области Ω из разрешимости в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; R^n)$ уравнения (1) при любой $f(x) \in L_p(\Omega)$ следует выполнение в той же области Ω неравенства типа Пуанкаре с $p' = \frac{p}{p-1}$

$$\| g(x) - \frac{1}{m\Omega}\int_\Omega g(x)\,dx \|_{L_{p'}(\Omega)} \leq C \| \operatorname{grad} g \|_{L_{p'}(\Omega)}$$

для всех $g(x) \in W^1_{p'}(\Omega)$ с постоянной $C > 0$, зависящей только от n, p и Ω. Однако известны примеры ограниченных областей, не удовлетворяющих условию конуса (см., например, [9, с.494]), для которых такое неравенство не может выполняться для всех $g(x) \in W^1_{p'}(\Omega)$.

Замкнутость области значений оператора (5) для ограниченной Ω, удовлетворяющей условию конуса, доказывается путем построения в явном виде решения задачи (1),(2) с произвольной $f(x) \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющей условию (3). А именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, удовлетворяет условию конуса, $1 < p < \infty$. Тогда найдется постоянная $C > 0$, зависящая только от n, p и Ω, такая что для любой $f(x) \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющей условию (3), существует векторное поле $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; R^n)$, удовлетворяющее уравнению (1) и неравенству*

$$\| v \|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; R^n)} \leq C \| f \|_{L_p(\Omega)}. \tag{8}$$

Доказательство. Согласно лемме Гальярдо ([24, см.также [5, с.68]]), всякую ограниченную область, удовлетворяющую условию конуса, можно представить в виде конечной суммы ограниченных областей с липшицевой границей (в смысле определения в [5, с. 67]). В свою очередь, всякую ограниченную область с липшицевой границей можно представить в виде конечной суммы ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно некоторого содержащегося в ней шара.

Таким образом, для всякой ограниченной области Ω, удовлетворяющей условию конуса, найдется конечный набор $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$ ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно некоторого открытого шара K_i, $\bar{K}_i \subset \Omega_i$, $i = 1, \ldots, N$. Покажем теперь, что для доказательства теоремы будет достаточно показать справедливость утверждения теоремы для каждой из областей Ω_i,

$i=1,\ldots,N$. Действительно, предположим, что для каждой из областей Ω_i, $i=1,\ldots,N$, утверждение теоремы справедливо, и заметим, что всякую $f(x)\in\tilde{L}_p(\Omega)$, где Ω - ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса, можно представить в виде

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N} f_i(x), \tag{9}$$

где $f_i(x)\in\tilde{L}_p(\Omega)$, $\operatorname{supp} f_i\subset\bar{\Omega}_i$, а Ω_i- области, которые были определены выше, $i=1,\ldots,N$.

При $N=2$ для доказательства (9) достаточно положить

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x)-\dfrac{\chi(x)}{\mu}\displaystyle\int_{\Omega_1} f(x)dx, & x\in\Omega_1;\\ 0, & x\in\Omega_2\setminus\Omega_1;\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases} [1-\chi(x)]f(x)-\dfrac{\chi(x)}{\mu}\displaystyle\int_{\Omega_2\setminus\Omega_1} f(x)dx, & x\in\Omega_2;\\ 0, & x\in\Omega_1\setminus\Omega_2,\end{cases}$$

где $\chi(x)$ - характеристическая функция множества $\Omega_1\cap\Omega_2$, а $\mu>0$ - его мера.

При $N\geqslant 3$ представление (9) доказывается по индукции.

Ввиду предположения о справедливости утверждения теоремы для каждой из областей Ω_i, $i=1,\ldots,N$, найдутся векторные поля $\{v_i(x)\}_{i=1}^{N}$ такие, что для каждого $i=1,\ldots,N$ выполняется $v_i(x)\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_i;R^n)$, $\operatorname{div} v_i = f_i(x)$ в Ω_i

и

$$\|v_i\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_i;R^n)}\leqslant C_i\|f_i\|_{L_p(\Omega_i)}, \quad i=1,\ldots,N, \tag{10}$$

где для каждого $i=1,\ldots,N$ постоянная $C_i>0$ зависит только от n,p и Ω_i .

Продолжим для каждого $i=1,\ldots,N$ векторное поле $v_i(x)$ нулем на все R^n и, сохранив для продолжения прежнее обозначение, положим

$$v(x)=\sum_{i=1}^{N} v_i(x). \tag{11}$$

Очевидно, что $v(x)\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega;R^n)$ и, в силу (10), имеет место неравенство (8) с постоянной $C>0$, зависящей только от n,p и Ω . Кроме того, в силу (9), векторное поле (11) удовлетворяет в Ω уравнению (1).

Таким образом, теорема будет полностью доказана, если доказать справед-

ливость ее утверждения для произвольной ограниченной области Ω, звездной относительно некоторого открытого шара K, $\bar{K}\subset\Omega$.

В связи с этим рассмотрим векторное поле

$$v(x)=\int_{\Omega} f(y)\left\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int_{|x-y|}^{\infty} q\left(y+\xi\frac{x-y}{|x-y|}\right)\xi^{n-1}d\xi\right\}dy, \tag{12}$$

где $q(x)$ - любая функция из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(R^n)$ такая, что $supp\, q\subset K$ и

$$\int_K q(x)dx=1. \tag{13}$$

Справедливость теоремы непосредственно доказывает следующая

Лемма 2. *Пусть $\Omega\subset R^n$ - любая ограниченная область, звездная относительно некоторого открытого шара K, $\bar{K}\subset\Omega$, $n\geqslant 2$, $1<p<\infty$, $f(x)$ - произвольная функция из $L_p(\Omega)$.*

Тогда векторное поле (12) принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;R^n)$, удовлетворяет неравенству (8) с некоторой постоянной $C>0$, зависящей только от n,p и диаметров Ω и K. Если при этом для $f(x)$ выполняется условие (3), то векторное поле (12) удовлетворяет почти всюду в Ω уравнению (1).

Доказательство. Покажем сначала, что векторное поле (12) принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;R^n)$ при $n\geqslant 2$ и $1<p<\infty$. Для этого продолжим $f(x)$ в (12) нулем на все R^n, сохранив для продолжения прежнее обозначение. При этом область интегрирования Ω в (12) можно заменить на R^n. Тогда для $k=1,\dots,n$ имеет место

$$\frac{\partial v}{\partial x_k}(x)=f(x)\int_{R^n} q(x+y)\frac{yy_k}{|y|^2}dy+V_k(x), \tag{14}$$

где при $k=1,\dots,n$ выполняется

$$V_k(x)=\mathrm{V.p.}\int_{R^n} f(y)\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int_{|x-y|}^{\infty} q\left(y+\xi\frac{x-y}{|x-y|}\right)\xi^{n-1}d\xi\right\}dy.$$

Для получения (14) мы в (12) заменили переменную интегрирования y на $x-y$, а после дифференцирования провели интегрирование по частям и обратно заменили $x-y$ на y.

Обозначим

$$Q(x,y,\xi)=q\left(y+\xi\frac{x-y}{|x-y|}\right)-q\left(x+\xi\frac{x-y}{|x-y|}\right). \tag{15}$$

Тогда векторные поля $V_k(x)$ можно представить в виде

$$V_{\kappa}(x) = \sum_{j=1}^{3} V_{\kappa,j}(x), \quad \kappa = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

где для $\kappa = 1, \ldots, n$ выполняются:

$$V_{\kappa,1}(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int_0^{|x-y|} q\left(y+\xi\frac{x-y}{|x-y|}\right)\xi^{n-1}d\xi\right\}dy,$$

$$V_{\kappa,2}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int_0^{\infty} Q(x,y,\xi)\xi^{n-1}d\xi\right\}dy,$$

$$V_{\kappa,3}(x) = \mathrm{V.p.}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int_0^{\infty} q\left(x+\xi\frac{x-y}{|x-y|}\right)\xi^{n-1}d\xi\right\}dy.$$

Отметим, что функции $f(x)$ и $q(x)$ имеют компактные носители, вследствие чего интегралы, представляющие $V_{\kappa,1}(x)$ и $V_{\kappa,2}(x)$, сходятся абсолютно для всех $x \in K_R$, где K_R - любой открытый шар радиуса $R > 0$, центр которого совпадает с центром шара K и $\bar{\Omega} \subset K_R$. Что же касается интеграла, представляющего $V_{\kappa,3}(x)$, то ниже будет показано, что из теоремы Зигмунда-Кальдерона [11] для сингулярных интегралов с переменными ядрами следует сходимость интеграла, представляющего $V_{\kappa,3}(x)$, в смысле главного значения почти для всех $x \in K_R$.

Для всех $y, z \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\sum_{\kappa=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial z_\kappa}\left\{\frac{z}{|z|^n}\int_0^{|z|} q\left(y+\xi\frac{z}{|z|}\right)\xi^{n-1}d\xi\right\}\right| \leqslant C_1\|q\|_{C^1(\bar{K})}, \tag{17}$$

где $C^1(\bar{K})$ - банахово пространство непрерывно дифференцируемых на $\bar{K}$ функций и постоянная $C_1 > 0$ зависит лишь от n.

Без ограничения общности можно считать, что центр шара K совпадает с началом координат, при этом с началом координат будет совпадать также и центр шара K_R.

Выберем и зафиксируем какую-либо функцию $q_0(x)$ из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ с носителем в шаре $\{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}$, такую, что

$$\int_{|x|<1} q_0(x)dx = 1.$$

Пусть $q(x) = \tau^{-n}q_0\left(\frac{x}{\tau}\right)$, где τ - радиус шара K. Тогда, в силу (17), имеем

$$\sum_{\kappa=1}^{n}\|V_{\kappa,1}\|_{L_p(K_R;\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1'\|f\|_{L_p(\Omega)}, \tag{18}$$

где постоянная $C_1' > 0$ зависит лишь от n, p, R и r. Поскольку $\operatorname{supp} f \subset K_R$ и $\operatorname{supp} q \subset K$, то для всех $x \in K_R$ и $k=1,\ldots,n$ выполняется

$$|V_{k,2}(x)| \leq \int_{R^n} |f(y)| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{x-y}{|x-y|^n} \int_0^{R+r} Q(x,y,\xi)\xi^{n-1} d\xi \right\} \right| dy,$$

где r - радиус шара K.

Нетрудно убедиться, что для всех $x, y \in R^n$ и $\xi \in R^1$ верно

$$|Q(x,y,\xi)| \leq |x-y| \cdot \|q\|_{C^1(\bar{K})},$$

поэтому для всех $x \in K_R$ справедливо

$$\sum_{k=1}^{n} |V_{k,2}(x)| \leq C_2 \int_{R^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy, \tag{19}$$

где постоянная $C_2 > 0$ зависит только от n, R и r.

Так как $f(x)$ имеет компактный носитель, то из (19) следует

$$\sum_{k=1}^{n} \|V_{k,2}\|_{L_p(K_R;\, R^n)} \leq C_2' \|f\|_{L_p(\Omega)}, \tag{20}$$

где постоянная $C_2' > 0$ зависит лишь от n, p, R и r.

Рассмотрим теперь $V_{k,3}(x)$, $k=1,\ldots,n$. Удобно представить $V_{k,3}(x)$ в виде

$$V_{k,3}(x) = U_{k,1}(x) + U_{k,2}(x), \quad k=1,\ldots,n, \tag{21}$$

где для $k=1,\ldots,n$ справедливы

$$U_{k,1}(x) = \int_{R^n} f(y) \left\{ \frac{x-y}{|x-y|^n} \int_0^\infty \frac{\partial q}{\partial x_k}\left(x + \xi \frac{x-y}{|x-y|}\right) \xi^{n-1} d\xi \right\} dy,$$

$$U_{k,2}(x) = \mathrm{V.p.} \int_{R^n} f(y) N_k(x, x-y) dy,$$

и ядра $N_k(x,z)$, $k=1,\ldots,n$, $z \in R^n$, имеют вид

$$N_k(x,z) = \frac{\partial}{\partial z_k} \left\{ \frac{z}{|z|^n} \int_0^\infty q\left(x + \xi \frac{z}{|z|}\right) \xi^{n-1} d\xi \right\}.$$

Для $U_{k,1}(x)$, $k=1,\ldots,n$, так же как и для $V_{k,2}(x)$, сразу же получаем оценку вида (19) с постоянной, зависящей только от n, R, и r, из которой

с учетом компактности носителя $f(x)$ следует оценка

$$\sum_{k=1}^{n} \| U_{k,1} \|_{L_p(K_R;\, R^n)} \le C_3 \| f \|_{L_p(\Omega)} \tag{22}$$

с постоянной $C_3 > 0$, зависящей только от n, p, R и τ.

Поскольку $U_{k,2}(x)$, $k=1,\dots,n$, нужно оценить только в шаре K_R, то умножим $U_{k,2}(x)$, $k=1,\dots,n$, на характеристическую функцию $\chi_R(x)$ шара K_R и рассмотрим сингулярные интегралы

$$U_{k,2}^{(R)}(x) = \mathrm{V.p.} \int_{R^n} f(y) N_k^{(R)}(x, x-y)\, dy\,, \quad k=1,\dots,n\,, \tag{23}$$

где ядра

$$N_k^{(R)}(x,z) = \chi_R(x) N_k(x,z),\ z \in R^n,\quad k=1,\dots,n. \tag{24}$$

К сингулярным интегралам (23) с переменными ядрами (24) применим теорему Зигмунда-Кальдерона [11]. Предварительно убедимся, что все требования теоремы [11] выполняются. Для этого представим ядра $N_k^{(R)}(x,z)$ в виде

$$N_k^{(R)}(x,z) = |z|^{-n} \Omega_k^{(R)}\left(x, \frac{z}{|z|}\right),\quad z \in R^n,\quad k=1,\dots,n.$$

Выписав явное представление для $\Omega_k^{(R)}(x,z)$, можно убедиться, что для любого $q > 1$ следует

$$\sup_{x \in R^n} \sum_{k=1}^{n} \int_S |\Omega_k^{(R)}(x,z)|^q\, ds_z < A\,,$$

где $S = \{ z : z \in R^n,\ |z| = 1 \}$ - единичная сфера и постоянная $A > 0$ зависит только от n, q, R и τ.

Заметим теперь, что ядра $N_k^{(R)}(x,z)$ могут быть представлены также и в виде

$$N_k^{(R)}(x,z) = \chi_R(x) \frac{\partial}{\partial z_k}\left\{ |z|^{-n+1} \Omega_0\left(x, \frac{z}{|z|}\right)\right\},\ z \in R^n,\quad k=1,\dots,n\,,$$

где $\Omega_0\left(x, \frac{z}{|z|}\right)$ - бесконечно дифференцируемая по x и z при $z \neq 0$ вектор-функция. Поэтому (см. [12]) для любого $x \in R^n$ выполнено условие

$$\int_S \Omega_k^{(R)}(x,z)\, ds_z = 0\,,\quad k=1,\dots,n\,,$$

где S - единичная сфера.

Таким образом, ядра (24) удовлетворяют всем требованиям теоремы Зигмунда-Кальдерона (см. [11, теорема 2]), из которой следует сходимость интегралов

(23) почти для всех $x \in R^n$ и оценка

$$\sum_{k=1}^{n} \| U_{k,2} \|_{L_p(K_R;R^n)} = \sum_{k=1}^{n} \| U_{k,2}^{(R)} \|_{L_p(R^n;R^n)} \le C_4 \|f\|_{L_p(\Omega)} \tag{25}$$

с постоянной $C_4 > 0$, зависящей только от n, p, R и r для любого p, $1 < p < \infty$.

Из (14), (16), (18), (20)-(22), (25) получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|_{L_p(K_R;R^n)} \le C_5 \|f\|_{L_p(\Omega)} \tag{26}$$

с постоянной $C_5 > 0$, зависящей только от n, p, R и r для любого p, $1 < p < \infty$.

Поскольку в (26) $R > 0$ - любое число, для которого $\bar{\Omega} \subset K_R$, то из (26) следует, что векторное поле (12) принадлежит $W^1_{p,loc}(R^n; R^n)$. Заметим теперь, что для любого $x \notin K$ носитель интеграла

$$w(x,y) = \int_{|x-y|}^{\infty} \varphi\left(y + \xi \frac{x-y}{|x-y|}\right) \xi^{n-1} d\xi \tag{27}$$

как функции переменной y при фиксированном x содержится внутри полной конической поверхности с вершиной в точке x, описанной вокруг шара $K \supset \supset \operatorname{supp} \varphi$, и причем в той из двух ее полостей, которая не содержит шара K. Действительно, если $x \notin K$, а y не содержится внутри указанной полости полной конической поверхности, то $y + \xi \frac{x-y}{|x-y|} \notin K$ для любых $\xi \ge |x-y|$, а тогда для любых $\xi \ge |x-y|$ имеет место

$$\varphi\left(y + \xi \frac{x-y}{|x-y|}\right) = 0,$$

откуда следует равенство нулю интеграла (27).

Поэтому для любого фиксированного $x \notin \bar{\Omega}$ верно

$$\operatorname{supp} w(x,y) \cap \operatorname{supp} f(y) = \emptyset,$$

вследствие чего $\operatorname{supp} |v| \subset \bar{\Omega}$, т.е. векторное поле $v(x)$ аппроксимируется в норме $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; R^n)$ векторными полями из $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega; R^n)$, а значит, $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; R^n)$. В силу (26), для $v(x)$ справедлива оценка (8) с постоянной $C = C_5$.

Остается проверить, что векторное поле (12) удовлетворяет почти всюду в Ω уравнению (1), если выполнено условие (3).

Из (14) находим, что почти для всех $x \in R^n$ выполняется

$$\operatorname{div} v(x) = f(x) \int_{R^n} q(x)\,dx +$$

$$+ \mathrm{V.p.} \int_{R^n} f(y) \operatorname{div}_x \left\{ \frac{x-y}{|x-y|^n} \int_{|x-y|}^{\infty} q\left(y+\xi \frac{x-y}{|x-y|}\right) \xi^{n-1} d\xi \right\} dy.$$

Учитывая, что для всех $x, y \in R^n$ таких, что $x \neq y$,

$$\operatorname{div}_x \left\{ \frac{x-y}{|x-y|^n} \int_{|x-y|}^{\infty} q\left(y+\xi \frac{x-y}{|x-y|}\right) \xi^{n-1} d\xi \right\} = - q(x),$$

используя (13), почти для всех $x \in R^n$ получаем

$$\operatorname{div} v(x) = f(x) - q(x) \int_{\Omega} f(y)\,dy,$$

откуда при условии выполнения (3) следует, что векторное поле (12) удовлетворяет почти всюду в Ω уравнению (1).

Таким образом, лемма 2, а с нею и теорема 1 доказаны.

Для дальнейшего нам потребуется вспомогательная

Лемма 3. *Пусть, в дополнение к требованиям теоремы 1,* $\operatorname{supp} f \subset \Omega$. *Тогда существует решение* $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1 (\Omega ; R^n)$ *задачи* (1), (2), *удовлетворяющее неравенству* (8) *с постоянной* C, *зависящей только от* n, p, Ω, *и такое, что* $\operatorname{supp} |v| \subset \Omega$.

Доказательство. Существование решения $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1 (\Omega ; R^n)$ задачи (1), (2) такого, что $\operatorname{supp} |v| \subset \Omega$, очевидно. Основным в данной лемме является доказательство существования решения $v(x)$ с $\operatorname{supp} |v| \subset \Omega$ и постоянной C в (8), не зависящей от $\operatorname{supp} f$.

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, представим Ω в виде

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i ,$$

где для каждого $i=1,\dots,N$ область Ω_i звездна относительно некоторого открытого шара K_i, $\bar{K}_i \subset \Omega_i$, с центром в точке $x_i \in \Omega_i$. Через $\Omega_i^{(h)}$ обозначим сжатие области Ω_i с коэффициентом $h \in (0,1)$ относительно точки x_i, $i=1,\dots,N$, и положим

$$\Omega^{(h)} = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i^{(h)} .$$

Очевидно, что для каждого $i=1,\dots,N$ область $\Omega_i^{(h)}$ при любых $h\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ звездна относительно открытого шара K_i' с центром в точке x_i, имеющего радиус вдвое меньший радиуса шара K_i. При этом $\bar{\Omega}^{(h)}\subset\Omega$ для всех $h\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Заметим, что найдется такое число $h_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, что $\Omega^{(h)}$ связно и $\operatorname{supp} f\subset\Omega^{(h)}$ для всех $h\in(h_1,1)$. В точности таким же образом, как и при доказательстве теоремы 1, представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N} f_i^{(h)}(x),$$

где для каждого $i=1,\dots,N$ выполняется

$$f_i^{(h)}(x)\in\tilde{L}_p(\Omega_i^{(h)}),\quad \operatorname{supp} f_i^{(h)}\subset\Omega_i^{(h)}.$$

Применив к каждой из областей $\Omega_i^{(h)}$ лемму 2, положим

$$v^{(h)}(x)=\sum_{i=1}^{N} v_i^{(h)}(x),$$

где $v_i^{(h)}(x)\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_i^{(h)};R^n)$ - продолженное нулем на всю область Ω решение задачи (1),(2) в области $\Omega_i^{(h)}$, $i=1,\dots,N$, звездной относительно шара K_i'. Очевидно, $\operatorname{div} v^{(h)}=f(x)$ почти всюду в Ω.

Поскольку $h\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, то для каждого $i=1,\dots,N$ существует постоянная $C_i>0$, зависящая только от n,p и диаметров Ω_i и K_i, такая,что

$$\| v_i^{(h)}\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega;R^n)}\leq C_i\| f_i^{(h)}\|_{L_p(\Omega_i^{(h)})}. \tag{28}$$

Нетрудно убедиться, что найдется число $h_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, зависящее только от Ω, такое, что $\Omega^{(h)}$ связно для всех $h\in(h_2,1)$ и

$$\sum_{i=1}^{N}\| f_i^{(h)}\|_{L_p(\Omega_i^{(h)})}\leq C'\| f\|_{L_p(\Omega)} \tag{29}$$

с постоянной $C'>0$, зависящей только от n,p,Ω. При $N=2$ оценка (29) следует сразу же из явного вида разложения (9), а при $N\geq 3$ доказывается по индукции.

Полагая $h_0=\max\{h_1,h_2\}$, из (28),(29) для всех $h\in(h_0,1)$ по-

лучаем

$$\|v^{(h)}\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;R^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\Omega)}$$

с постоянной $C>0$, зависящей только от n,p и Ω. А так как для каждого $i=1,\dots,N$ имеет место $\operatorname{supp}|v_i^{(h)}| \subset \bar{\Omega}_i^{(h)}$, то $\operatorname{supp}|v^{(h)}| \subset \subset \bar{\Omega}^{(h)} \subset \Omega$ при любых $h\in(h_0,1)$.

Таким образом, лемма доказана.

Дж.Хейвуд [13] поставил вопрос об изучении классов областей, для которых совпадают пространства $\overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega)$ и $\hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega)$. Позднее этот вопрос изучался в [2,14] и в других работах тех же авторов. Простым следствием леммы 3 является следующая

Лемма 4. *Пусть ограниченная область $\Omega\subset R^n$, $n\geq 2$, удовлетворяет условию конуса, $1<p<\infty$. Тогда $\overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega)=\hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega)$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть $\overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega)\neq\hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega)$. Тогда $\overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega)$ - замкнутое подпространство в $\hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega)$, не совпадающее с $\hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega)$. Поэтому существует векторное поле $v(x)\in\hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega)$ такое, что

$$\|v-u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;R^n)} \geq 1 \tag{30}$$

для всех $u(x)\in\overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega)$.

В силу плотности $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega;R^n)$ и $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;R^n)$, для любого числа $\varepsilon>0$ найдется векторное поле $v_\varepsilon(x)\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega;R^n)$ такое, что

$$\|v-v_\varepsilon\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;R^n)}<\varepsilon. \tag{31}$$

Очевидно, что при этом

$$\|\operatorname{div} v_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)}<\varepsilon.$$

Из (30) ,(31) находим

$$\|v_\varepsilon-u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;R^n)}>1-\varepsilon \tag{32}$$

для всех $u(x)\in\overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega)$.

Поскольку $\operatorname{supp}|v_\varepsilon|\subset\Omega$, то, согласно лемме 3, существует век-

торное поле $w_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ такое, что $\operatorname{div} w_\varepsilon = \operatorname{div} v_\varepsilon(x)$, $\operatorname{supp}|w_\varepsilon| \subset \Omega$, и удовлетворяющее неравенству

$$\|w_\varepsilon\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leq C\|\operatorname{div} v_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} < C\varepsilon \tag{33}$$

с постоянной $C>0$, зависящей только от n, p и Ω.

Выбирая и фиксируя число $\varepsilon < \frac{1}{2(C+1)}$, из (32), (33) получаем

$$\|v_\varepsilon - w_\varepsilon - u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} > \frac{1}{2} \tag{34}$$

для всех $u(x) \in \overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega)$.

Заметим, что соленоидальное векторное поле $v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp}|v_\varepsilon - w_\varepsilon| \subset \Omega$. Обозначим через $v_{\varepsilon,\delta}(x)$ усреднение векторного поля $v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x)$ по Ω с радиусом $\delta>0$. Выбирая $\delta=\delta(\varepsilon)$ таким образом, чтобы $\operatorname{supp}|v_{\varepsilon,\delta}| \subset \Omega$ и

$$\|v_\varepsilon - w_\varepsilon - v_{\varepsilon,\delta}(x)\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} < \frac{1}{4},$$

из (34) получим

$$\|v_{\varepsilon,\delta} - u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} > \frac{1}{4}$$

для всех $u(x) \in \overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega)$, что невозможно, так как $v_{\varepsilon,\delta}(x) \in \overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega)$.

Из полученного противоречия следует совпадение $\overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega)$ и $\hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega)$.

Лемма доказана.

Из теоремы 1 вытекает ряд интересных следствий.

Следствие 1. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, удовлетворяет условию конуса, $1<p<\infty$. Тогда для любой $f(x) \in \widetilde{L}_p(\Omega)$ существует единственное решение $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ задачи* (1), (2) *такое, что*

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} = c_f,$$

где

$$C_f = \inf_{u \in \hat{\mathring{J}}{}_p^1(\Omega)} \| v + u \|_{\mathring{W}_p^1(\Omega;R^n)} .$$

Поскольку любые два решения задачи (1),(2) отличаются на соленоидальное векторное поле $\hat{\mathring{J}}{}_p^1(\Omega)$, то для доказательства следствия 1 достаточно заметить, что пространство Соболева $\mathring{W}_p^1(\Omega;R^n)$ является равномерно выпуклым банаховым пространством, и применить к замкнутому $\mathring{W}_p^1(\Omega;R^n)$ подпространству $\hat{\mathring{J}}{}_p^1(\Omega)$ теорему 2 из [15, с.110].

Из следствия 1 непосредственно вытекает, что для ограниченных областей Ω в R^n, удовлетворяющих условию конуса, линейный непрерывный оператор $div : \mathring{W}_p^1(\Omega;R^n)/\hat{\mathring{J}}{}_p^1(\Omega) \longrightarrow \tilde{L}_p(\Omega)$ является гомеоморфизмом фактор-пространства $\mathring{W}_p^1(\Omega;R^n)/\hat{\mathring{J}}{}_p^1(\Omega)$ на $\tilde{L}_p(\Omega)$, если $1<p<\infty$.

Следствие 2. *Пусть Ω - ограниченная область R^n, $n \geq 2$, с границей $\partial\Omega$ из класса C^1, $1<p<\infty$. Тогда найдется постоянная $C>0$, зависящая только от n, p и Ω, такая, что для любых $f(x) \in L_p(\Omega)$ и $a \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega; R^n)$, удовлетворяющих условию*

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{\partial\Omega} (a,m)ds,$$

где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в R^n и m - вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$, существует векторное поле $v(x) \in W_p^1(\Omega;R^n)$, удовлетворяющее почти всюду в Ω уравнению $div\, v = f(x)$, краевому условию $v|_{\partial\Omega} = a$ и неравенству

$$\|v\|_{W_p^1(\Omega;R^n)} \leq C \left\{ \|a\|_{W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega;R^n)} + \|f\|_{L_p(\Omega)} \right\} .$$

Это утверждение вытекает непосредственно из теоремы 1 настоящей работы и теоремы продолжения

$$W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega;R^n) \longrightarrow W_p^1(\Omega;R^n) \qquad \text{(см. [5])}.$$

Возникает естественный вопрос: если в задаче (1)-(3) правая часть $f(x) \in \mathring{W}_p^\ell(\Omega)$, $\ell \geq 1$, то существует ли решение этой задачи $v(x)$

из $\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell+1}(\Omega;R^n)$? Для ограниченных областей Ω, удовлетворяющих равномерному условию конуса [5], ответ на этот вопрос положительный. А именно, справедлива

Теорема 2. *Пусть ограниченная область $\Omega\subset R^n$, $n\geq 2$, удовлетворяет равномерному условию конуса, $1<p<\infty$ и ℓ - любое натуральное число. Тогда найдется постоянная $C>0$, зависящая только от n, p, ℓ и Ω, такая, что для любой $f(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega)$, удовлетворяющей условию* (3), *существует векторное поле $v(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^{\ell+1}(\Omega;R^n)$, удовлетворяющее уравнению* (1) *и неравенству*

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell+1}(\Omega;R^n)}\leq C\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega)}.$$

Доказательство. Если в дополнение к предположениям леммы 2 потребовать, чтобы $f(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega)$, то векторное поле (12) будет принадлежать $\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell+1}(\Omega;R^n)$, причем будет иметь место оценка

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell+1}(\Omega;R^n)}\leq C_1\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega)} \tag{35}$$

с постоянной $C_1>0$, зависящей только от n, p, ℓ и диаметров Ω и K.

Доказательство оценки (35) ничем не отличается от доказательства соответствующей оценки из леммы 2, и сама схема доказательства теоремы 2 целиком повторяет схему доказательства теоремы 1.

Таким образом, справедливость теоремы 2 вытекает непосредственно из следующей леммы.

Лемма 5. *Пусть ограниченная область $\Omega\subset R^n$, $n\geq 2$, удовлетворяет равномерному условию конуса, $1\leq p<\infty$, ℓ - любое натуральное число. Тогда найдется набор ограниченных областей $\{\Omega_i\}_{i=1}^{N}$ (каждая из которых звездна относительно некоторого открытого шара K_i, $\overline{K}_i\subset\Omega_i$, $i=1,\dots,N$), таких, что $\Omega=\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i$, а всякую функцию $f(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega)$, удовлетворяющую условию* (3), *можно представить в виде*

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N} f_i(x),$$

где для каждого $i=1,\dots,N$ $\operatorname{supp} f_i\subset\overline{\Omega}_i$, $f_i(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega_i)$,

$$\int_{\Omega_i} f_i(x)\,dx=0, \tag{36}$$

постоянная $C_i'>0$, зависящая только от n, p, ℓ и Ω_i, такая,

что

$$\|f_i\|_{\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_p(\Omega_i)} \leq C'_i \|f\|_{\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_p(\Omega)}, \quad i=1,\dots,N. \tag{37}$$

Доказательство. Прежде всего, используя тот факт, что Ω удовлетворяет равномерному условию конуса [5], построим для Ω разбиение единицы специального вида.

Нетрудно убедиться, что для всякой ограниченной области Ω, удовлетворяющей равномерному условию конуса [5], существует открытое покрытие, состоящее из ограниченных областей $\{\Omega'_i\}_{i=1}^{N}$ таких, что $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{N} \Omega'_i$ и каждая из областей $\Omega_i = \Omega \cap \Omega'_i$ звездна относительно некоторого открытого шара K_i, $\bar{K}_i \subset \Omega_i$, $i=1,\dots,N$, причем найдутся такие ограниченные замкнутые подмножества $\{A_i\}_{i=1}^{N}$, что $A_i \subset \Omega'_i$, $i=1,\dots,N$, и $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{N} \operatorname{Int} A_i$, т.е. $\Omega \subset\subset \bigcup_{i=1}^{N} A_i$.

Заметим (см., например, [5]), что существует набор функций $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{N}$ таких, что $\psi_i(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega}'_i)$, $\operatorname{supp} \psi_i \subset \bar{\Omega}'_i$, $\psi_i(x) \geq 0$ для всех $x \in \Omega'_i$ и $\psi_i(x) > 0$ для всех $x \in A_i$, $i=1,\dots,N$. Полагая теперь, как обычно, $\varphi_i(x) = \psi_i(x)/\psi(x), i=1,\dots,N$, где $\psi(x) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(x)$, получаем необходимое специальное разбиение единицы. Точнее, для всех $x \in \bar{\Omega}$ имеет место равенство $\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) = 1$, где $\varphi_i(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ и $\operatorname{supp}\varphi_i \subset \bar{\Omega}'_i$, причем области $\Omega_i = \Omega \cap \Omega'_i$ звездны относительно шаров K_i, $i=1,\dots,N$.

Полагая $g_i(x) = f(x)\varphi_i(x)$, $i=1,\dots,N$, получаем, что $f(x) = \sum_{i=1}^{N} g_i(x)$ для всех $x \in \bar{\Omega}$, причем $\operatorname{supp} g_i \subset \Omega_i$ и $g_i(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\ell}_p(\Omega_i)$, $i=1,\dots,N$. А так как $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$, то отсюда сразу же следует утверждение леммы. Действительно, при $N=2$ положим $f_i(x) = g_i(x) - \varphi(x)\int_{\Omega_i} g_i(x)\,dx$, $i=1,2$, где $\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ и $\int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \varphi(x)\,dx = 1$, а при $N \geq 3$ оставшаяся часть доказательства проводится по индукции. Оценка (37) очевидна.

Лемма, а вместе с ней и теорема 2 доказаны.

Доказательство двух следующих лемм почти не отличается от доказательства лемм 3,4.

Лемма 6. *Пусть в дополнение к требованиям теоремы 2* $\operatorname{supp} f \subset \Omega$. *Тогда существует решение* $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\ell+1}_p(\Omega; R^n)$ *задачи* (1), (2), *удовлетворяющее тому же, что и в теореме 2, неравенству с постоянной* C, *зависящей только от* n, p, ℓ, Ω, *и такое, что* $\operatorname{supp}|v| \subset \Omega$.

Лемма 7. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, удовлетворяет равномерному условию конуса, $1<p<\infty$, ℓ - любое натуральное число. Тогда* $\overset{\circ}{J}{}_p^{\ell+1}(\Omega) = \hat{J}_p^{\ell+1}(\Omega)$.

В заключение параграфа остановимся на одном важном приложении теорем 1,2, которое можно сформулировать как теорему о соленоидальном продолжении векторных полей из $W_p^{\ell}(\Omega; R^n)$ с сохранением класса.

Теорема 3. *Пусть Ω - ограниченная область в R^n, $n \geq 2$, удовлетворяющая равномерному условию конуса, и пусть Ω' - любая область, для которой $\bar{\Omega} \subset \Omega'$, $1<p<\infty$, ℓ - любое натуральное число, причем множество $R^n \setminus \bar{\Omega}$ связно.*

Тогда для любого соленоидального векторного поля $v(x) \in W_p^{\ell}(\Omega; R^n)$ найдется соленоидальное векторное поле $w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega'; R^n)$ такое, что $w(x) = v(x)$ в Ω и выполняется неравенство

$$\|w\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega'; R^n)} \leq C' \|v\|_{W_p^{\ell}(\Omega; R^n)} \tag{38}$$

с постоянной $C' > 0$, зависящей только от n, p, ℓ, Ω и Ω'.

Доказательство. Если Ω удовлетворяет требованиям теоремы, то открытое множество $R^n \setminus \bar{\Omega}$ связно, т.е. $R^n \setminus \bar{\Omega}$ является областью в R^n. Из определения равномерного условия конуса (см. [5 , с.66]) и рассуждений (см. [7, с.62]) следует, что область $R^n \setminus \bar{\Omega}$ также удовлетворяет равномерному условию конуса [5] . А так как $\bar{\Omega} \subset \Omega'$, то отсюда следует существование ограниченной области Ω'' такой, что $\bar{\Omega}'' \subset \Omega'$, $\bar{\Omega} \subset \Omega''$ и для нее область $\Omega' \setminus \bar{\Omega}''$ удовлетворяет равномерному условию конуса [5] .

Из теоремы продолжения $W_p^{\ell}(\Omega; R^n) \longrightarrow W_p^{\ell}(R^n; R^n)$ (см. [5]) следует, что найдется векторное поле $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega''; R^n)$ такое, что $u(x) = v(x)$ в Ω и выполняется неравенство

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega''; R^n)} \leq C_1 \|v\|_{W_p^{\ell}(\Omega; R^n)} \tag{39}$$

с постоянной $C_1 > 0$, зависящей только от n, p, ℓ, Ω и Ω''.

В силу соленоидальности $u(x)$ в Ω и очевидного равенства

$$\int_{\Omega''} \operatorname{div} u(x)\,dx = 0,$$

имеем

$$\int_{\Omega'' \setminus \bar{\Omega}} \operatorname{div} u(x)\,dx = 0.$$

Пользуясь теоремой 1, если $\ell = 1$, и теоремой 2, если $\ell \geq 2$, заключаем, что существует векторное поле $u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega'' \setminus \bar{\Omega}; R^n)$ такое, что $\operatorname{div} u_1 =$

$= \operatorname{div} u(x)$ почти всюду в $\Omega''\setminus\bar\Omega$ и выполняется неравенство

$$\|u_1\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega''\setminus\bar\Omega;R^n)} \le C\|\operatorname{div} u\|_{W_p^{\ell-1}(\Omega''\setminus\bar\Omega)} \tag{40}$$

с постоянной $C>0$, зависящей только от n,p,ℓ,Ω, Ω''.

Продолжим теперь $u_1(x)$ нулем с $\Omega''\setminus\bar\Omega$ на всю область $\Omega'\supset\Omega''\setminus\bar\Omega$, сохранив для продолжения прежнее обозначение, и положим $w(x)=u(x)-u_1(x)$. Тогда $w(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega';R^n)$, $\operatorname{div} w(x)=0$ почти всюду в Ω', $w(x)=$ $=v(x)$ в Ω, а из (39), (40) следует оценка (38).

Теорема доказана.

§ 2. Неограниченные области с компактными границами

Поскольку для неограниченной области $\Omega\subset R^n$ с компактной границей $m\Omega=+\infty$, то, в силу леммы 1, область значений линейного дифференциального оператора (5) плотна в $L_p(\Omega)$. Поэтому разрешимость задачи (1), (2) для неограниченных областей Ω с компактными границами при любых $f(x)\in$ $\in L_p(\Omega)$ эквивалентна замкнутости в $L_p(\Omega)$ области значений оператора (5). Так же, как и в § 1, замкнутость области значений оператора (5) при условии, что Ω удовлетворяет условию конуса, доказывается путем построения в явном виде решения задачи (1), (2) с произвольной правой частью $f(x)\in L_p(\Omega)$.

Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть Ω - неограниченная область в R^n с компактной границей $\partial\Omega$, удовлетворяющая условию конуса, $n\ge 2$, $1<p<\infty$. Тогда найдется постоянная $C>0$, зависящая только от n,p и Ω, такая, что для любой $f(x)\in L_p(\Omega)$ существует векторное поле $v(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^{1}(\Omega;R^n)$, удовлетворяющее уравнению* (1) *и неравенству* (8).

Доказательство. Поскольку граница области Ω компактна, то найдутся открытые шары K_1 и K_2, такие что $\bar K_2\subset K_1$ и $R^n\setminus\Omega\subset K_2$. Представим область Ω в виде $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, где $\Omega_1=\Omega\cap K_1$, а $\Omega_2=$ $=R^n\setminus\bar K_2$. Очевидно, что область Ω_1 ограничена и удовлетворяет условию конуса, а область Ω_2 является внешней к шару K_2. Для области Ω_1 справедлива теорема 1, поэтому утверждение теоремы 4 достаточно доказать только для области Ω_2. Действительно, пусть утверждение теоремы 4 справедливо для области Ω_2. Покажем, что тогда оказывается справедливой и сама теорема 4. Для этого представим $f(x)$ в виде $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x)-\varphi(x)\displaystyle\int_{\Omega_1} f(x)\,dx, & x\in\Omega_1;\\[2ex] 0, & x\in R^n\setminus\Omega_1;\end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in R^n \setminus K_1; \\ \varphi(x) \int\limits_{\Omega_1} f(x)dx, \ x \in \Omega_1 \cap \Omega_2; \\ 0, \ x \in K_2, \end{cases}$$

и $\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega_1 \cap \Omega_2), \int\limits_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \varphi(x)\, dx = 1.$

Поскольку $f_1(x) \in \tilde{L}_p(\Omega_1)$, то из теоремы 1 следует существование векторного поля $v_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_1; R^n)$ такого, что $\operatorname{div} v_1 = f_1(x)$ почти всюду в Ω_1, а из предположения о справедливости теоремы 4 для Ω_2 следует существование векторного поля $v_2(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_2; R^n)$ такого, что $\operatorname{div} v_2 = f_2(x)$ почти всюду в Ω_2. Продолжим $v_i(x)$, $i = 1, 2$, нулем на всю область Ω, сохранив для продолжений прежние обозначения, и положим $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$. Очевидно, что $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; R^n)$ и $\operatorname{div} v = f(x)$ почти всюду в Ω. Оценка (8) для $v(x)$ получается очевидным образом.

Таким образом, достаточно доказать справедливость утверждения теоремы 4 для случая $\Omega = \Omega_2$, т.е. для внешности произвольного шара в R^n.

Пусть $f(x)$ - произвольная функция из $L_p(\Omega_2)$. Доопределим $f(x)$ нулем в шаре K_2. Поскольку $R^n = \bar{K}_2 \cup \Omega_2$, то теперь $f(x) \in L_p(R^n)$. Заметим, что $f(x) \in S'$, где S' - пространство Шварца обобщенных функций медленного роста. Пусть $\hat{f}(\xi) = F[f(x)]$ - преобразование Фурье в S' функции $f(x)$.

Рассмотрим векторное поле

$$u(x) = F^{-1}\left[\frac{\xi}{|\xi|^2} \hat{f}(\xi)\right],$$

где $F^{-1}[\cdot]$ - обратное преобразование Фурье в S'. Вообще говоря, компоненты векторного поля $u(x)$ являются обобщенными функциями из S'. Однако из теоремы о мультипликаторах преобразования Фурье (см., например, [16]) следует, что $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \in L_p(R^n; R^n)$, $i = 1, \ldots, n$, и имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_p(R^n; R^n)} \le C_1 \|f\|_{L_p(R^n)} = C_1 \|f\|_{L_p(\Omega_2)}. \tag{41}$$

Отсюда следует, в частности, что $u(x) \in L_{p,loc}(R^n; R^n)$, т.е., в действительности, компоненты векторного поля $u(x)$ являются обычными функциями.

Таким образом, векторное поле $u(x) \in \overset{1}{L}_p (\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{div} u = f(x)$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$.

Из [17] следует существование $c \in \mathbb{R}^n$ такого, что векторное поле $w(x) = u(x) - c$ аппроксимируется в полунорме $L_p^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ векторными полями из $\overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, т.е. найдется такая последовательность $\{w_k(x)\}_{k=1}^\infty$ векторных полей из $\overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, что

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(w - w_k)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{42}$$

Очевидно, что $\operatorname{div} w = f(x)$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$.

Пусть K_3 - открытый шар в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\bar{K}_2 \subset K_3$. Обозначим $\Omega_3 = \Omega_2 \cap K_3$. Очевидно, $\Omega_3 = K_3 \setminus \bar{K}_2$. Поскольку $w(x) \in L_{p,loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, то $w(x) \in W_p^1(K_2; \mathbb{R}^n)$. А так как $\operatorname{div} w = f(x) = 0$ почти всюду в K_2 и $\bar{K}_2 \subset K_3$, то к шарам K_2, K_3 применима теорема 3 §1 о соленоидальном продолжении с сохранением класса. Согласно этой теореме, существует соленоидальное векторное поле $w_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(K_3; \mathbb{R}^n)$ такое, что $w_0(x) = w(x)$ в K_2. Продолжим $w_0(x)$ с K_3 нулем на все $\mathbb{R}^n$ и, сохранив для продолжения прежнее обозначение, положим $v_0(x) = w(x) - w_0(x)$. Очевидно, $v_0(x) \in \overset{1}{L}_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{div} v_0 = f(x)$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$ и $\operatorname{supp}|v_0| \subset \bar{\Omega}_2$. Покажем, что $v_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_2; \mathbb{R}^n)$. Действительно, представим $v_0(x)$ в виде $v_0(x) = v_1(x) + v_2(x)$, где $v_1(x) = \eta(x) v_0(x)$, $v_2(x) = [1 - \eta(x)]\, v_0(x)$ и $\eta(x)$ - любая функция из $\overset{\circ}{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, тождественно равная единице в шаре K_3. Поскольку $v_1(x)$ имеет компактный носитель $\operatorname{supp}|v_1| \subset \bar{\Omega}_2$, то $v_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_2; \mathbb{R}^n)$. Носитель $v_2(x)$ некомпактен, хотя и содержится в Ω_2, однако заметим, что $v_2(x) = [1 - \eta(x)] w(x)$, а тогда из (42) и [17] следует, что $v_2(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_2; \mathbb{R}^n)$.

Таким образом, $v_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_2; \mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{div} v_0 = f(x)$ почти всюду в Ω_2, т.е. разрешимость задачи (1),(2) в области Ω_2 с произвольной правой частью $f(x) \in L_p(\Omega_2)$ доказана, следовательно, доказано, что область значений оператора $\operatorname{div}: \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_2; \mathbb{R}^n) \longrightarrow L_p(\Omega_2)$ совпадает с $L_p(\Omega_2)$. А тогда из леммы 1 из [18, с.524] следует существование постоянной $C_2 > 0$, зависящей только от n, p и Ω_2 и такой, что для любой $f(x) \in L_p(\Omega_2)$ найдется векторное поле $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_2; \mathbb{R}^n)$ такое, что $\operatorname{div} v = f(x)$ почти всюду в Ω_2 и

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_2;R^n)} \leq C_2 \|f\|_{L_p(\Omega_2)} . \qquad (43)$$

Утверждение теоремы 4 для области Ω_2 доказано, а следовательно, доказана и сама теорема 4.

Необходимо отметить, что при доказательстве оценки (43) существенную роль сыграла упомянутая лемма из [18] об операторах с замкнутой областью значений. Из (41) оценка (43), вообще говоря, не следует. Для области Ω_2 можно было бы построить решение, для которого справедлива оценка (43), однако это усложнило бы доказательство теоремы 4.

Следствие 3. *Пусть неограниченная область $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, с компактной границей удовлетворяет условию конуса, $1<p<\infty$. Тогда для любой $f(x) \in L_p(\Omega)$ существует единственное решение $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;R^n)$ задачи* (1), (2) *такое, что $\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;R^n)} = C_f$, где C_f - постоянная, зависящая от f, определение которой было дано в следствии 1.*

Доказательство следствия 3 ничем не отличается от доказательства следствия 1. При этом, так же как и в § 1, линейный непрерывный оператор $\operatorname{div} : \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;R^n)/\hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega)$ является гомеоморфизмом фактор-пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;R^n)/\hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega)$ на $L_p(\Omega)$.

Следствие 4. *Пусть Ω - неограниченная область в R^n, $n \geq 2$, с компактной границей из класса C^1, $1<p<\infty$. Тогда найдется постоянная $C>0$, зависящая только от n, p, Ω, такая, что для любых $f(x) \in L_p(\Omega)$ и $a \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega;R^n)$ существует векторное поле $v(x) \in L^1_p(\Omega;R^n)$, удовлетворяющее почти всюду в Ω уравнению $\operatorname{div} v = f(x)$, краевому условию $v|_{\partial\Omega} = a$ и неравенству*

$$\|v\|_{L^1_p(\Omega;R^n)} \leq C \left\{ \|a\|_{W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega;R^n)} + \|f\|_{L_p(\Omega)} \right\} .$$

Это утверждение следует из теоремы 4 настоящей работы и теоремы продолжения [5] :

$$W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega;R^n) \longrightarrow W^1_p(\Omega;R^n).$$

Для неограниченных областей с компактными границами оказывается справедливой также и теорема, аналогичная теореме 2 из § 1. А именно, имеет место

Теорема 5. *Пусть неограниченная область $\Omega \subset R^n$ с компактной границей $\partial\Omega$ удовлетворяет равномерному условию конуса* [5] *, $n \geq \ell$, $1<p<\infty$ и $\ell \geq 1$ - целое число. Тогда найдется постоянная $C>0$, зависящая только от n, p, ℓ и Ω, такая, что для любой $f(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^\ell(\Omega)$ существует векторное поле $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^{\ell+1}(\Omega; R^n)$, удовлетворяющее в Ω уравнению* (1) *и неравенству*

$$\| v \|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell+1}(\Omega;R^n)} \leq C \| f \|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega)} .$$

Доказательство теоремы 5 отличается от доказательства теоремы 4, поскольку в доказательстве теоремы 4 используется тот факт, что $\ell=0$.Проще всего здесь воспользоваться теоремой 7 из § 3. Для этого заметим, что всякую область Ω , удовлетворяющую требованиям теоремы 5, можно всегда представить в виде суммы ограниченной области, удовлетворяющей равномерному условию конуса [5] , и конечного числа некоторых полупространств в R^n . Но для таких областей справедливо утверждение теоремы 7 из § 3 настоящей работы, откуда сразу же и следует справедливость утверждения теоремы 5.

Необходимо отметить, что теоремы 5 и 7 так же, как и теоремы 4 и 6,можно было бы объединить. Однако принятое в настоящей работе разделение неограниченных областей на два класса - с компактными и некомпактными границами, представляется более естественным, ввиду очень существенных различий между этими двумя классами в вопросах разрешимости задачи (1),(2), а также в других вопросах, упомянутых во введении к настоящей работе.

В заключение параграфа остановимся на вопросе о совпадении пространств $\hat{\overset{\circ}{J}}{}_p^\ell(\Omega)$ и $\overset{\circ}{J}{}_p^\ell(\Omega)$ для неограниченных областей Ω с компактными границами. Совпадение $\hat{\overset{\circ}{J}}{}_p^\ell(\Omega)$ и $\overset{\circ}{J}{}_p^\ell(\Omega)$ можно было бы доказывать путем построения для произвольного $v(x) \in \hat{\overset{\circ}{J}}{}_p^\ell(\Omega)$ последовательности векторных полей из $\overset{\circ}{J}{}^\infty(\Omega)$, аппроксимирующей $v(x)$ в норме пространства $\overset{\circ}{W}{}_p^\ell(\Omega;R^n)$. Однако для неограниченных областей с компактными границами этот путь доказательства оказывается сложным, поскольку необходимо рассматривать отдельно различные интервалы значений показателя p . Ниже приводится более простое и естественное доказательство, опирающееся на теорему Хана-Банаха и некоторые результаты § 4.

Справедлива следующая

Лемма 8. *Пусть неограниченная область $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, с компактной границей удовлетворяет условию конуса, $1<p<\infty$. Тогда*

$$\hat{\overset{\circ}{J}}{}_p^1(\Omega) = \overset{\circ}{J}{}_p^1(\Omega).$$

Доказательство. Пусть K_1 и K_2 - какие-либо открытые шары в R^n такие, что $\bar{K}_2 \subset K_1$ и $R^n \setminus \Omega \subset K_2$. Обозначим $\Omega_1 = \Omega \cap K_1$ и $\Omega_2 = R^n \setminus \bar{K}_2$. Тогда область Ω , удовлетворяющую требованиям леммы, можно

представить в виде $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где область Ω_1 ограничена и удовлетворяет условию конуса, а область Ω_2 является внешностью шара K_2.

Заметим, что всякое векторное поле $v(x) \in \hat{\mathring{J}}{}^1_p(\Omega)$ можно представить в виде $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$, где $v_i(x) \in \hat{\mathring{J}}{}^1_p(\Omega)$ и $\operatorname{supp}|v_i| \subset \bar{\Omega}_i$, $i=1,2$. Действительно, доопределим $v(x)$ нулем на $R^n \setminus \Omega$. Тогда, очевидно, $v(x) \in W^1_p(K_2; R^n)$, а так как $\bar{K}_2 \subset K_1$, то шары K_1 и K_2 удовлетворяют требованиям теоремы 3 из § 1. Согласно этой теореме, найдется векторное поле $w(x) \in \hat{\mathring{J}}{}^1_p(K_1)$ такое, что $w(x) = v(x)$ в K_2. Положим

$$v_1(x) = \begin{cases} w(x), & x \in K_1, \\ 0, & x \in R^n \setminus K_1, \end{cases}$$

$$v_2(x) = \begin{cases} v(x), & x \in R^n \setminus K_1, \\ v(x) - w(x), & x \in K_1 \setminus K_2, \\ 0, & x \in K_2. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$ в Ω, $v_i(x) \in \hat{\mathring{J}}{}^1_p(\Omega)$ и $\operatorname{supp}|v_i| \subset \bar{\Omega}_i$, $i=1,2$.

Так как ограниченная область Ω_1 удовлетворяет требованиям леммы 4 из § 1, то $\hat{\mathring{J}}{}^1_p(\Omega_1) = \mathring{J}{}^1_p(\Omega_1)$, откуда следует, что $v_1(x) \in \mathring{J}{}^1_p(\Omega)$. Необходимо показать, что и $v_2(x) \in \mathring{J}{}^1_p(\Omega)$. Поэтому лемма будет полностью доказана, если показать, что для области Ω_2, являющейся внешностью шара K_2, $\mathring{J}{}^1_p(\Omega_2)$ и $\hat{\mathring{J}}{}^1_p(\Omega_2)$ совпадают. При этом без ограничения общности можно считать, что $K_2 = \{x : |x| < 1\}$, т.е. область Ω_2 является внешностью шара единичного радиуса с центром в нуле.

Совпадение $\mathring{J}{}^1_p(\Omega_2)$ и $\hat{\mathring{J}}{}^1_p(\Omega_2)$ будем доказывать от противного, т.е. предположим, что $\mathring{J}{}^1_p(\Omega_2) \neq \hat{\mathring{J}}{}^1_p(\Omega_2)$. Поскольку $\mathring{J}{}^1_p(\Omega_2) \subset \hat{\mathring{J}}{}^1_p(\Omega_2) \subset \mathring{W}{}^1_p(\Omega_2; R^n)$, то из теоремы Хана-Банаха (см. [22, с.72]) следует существование векторного поля $v \in W^{-1}_{p'}(\Omega_2; R^n)$ такого, что

$$\langle v, u \rangle = 0 \tag{44}$$

для всех $u(x) \in \overset{\circ}{J}{}^{\infty}(\Omega_2)$ и

$$< v, u_0 > = 1 \tag{45}$$

для некоторого $u_0(x) \in \hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega_2)$.

Из (44) и рассуждений, использующихся в конце § 4 при доказательстве следствия 9, вытекает существование обобщенной функции $\psi \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ такой, что $v = \operatorname{grad} \psi$ в Ω_2. Но так как векторное поле $v \in W^{-1}_{p'}(\Omega_2; R^n)$, то из рассуждений, приведенных в самом начале § 4, следует, что $\psi \in L_{p',loc}(\Omega_2)$.

Покажем, что (45) не может выполняться ни для каких $u_0(x) \in \hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega_2)$. Для этого достаточно будет убедиться, что

$$|< \psi, \operatorname{div} u >| \leq C_1 \|\operatorname{div} u\|_{L_p(\Omega_2)} \tag{46}$$

для всех векторных полей $u(x) \in \mathcal{D}(\Omega_2; R^n)$ с постоянной $C_1 > 0$, зависящей только от n и p. Действительно, из (46), леммы 1 и теоремы Хана-Банаха (см. [22, с.70]) сразу же следует существование постоянной C такой, что $\psi - C \in L_{p'}(\Omega_2)$. Тогда $< v, u > = 0$ для всех $u(x) \in \hat{\overset{\circ}{J}}{}^1_p(\Omega_2)$, поскольку $v = \operatorname{grad} \psi = \operatorname{grad}(\psi - C)$. Но это противоречит (45). Таким образом, лемма будет полностью доказана, если будет доказана справедливость (46).

Условимся обозначать через B_R открытый шар радиуса $R > 1$ с центром в нуле, а через ω_R - шаровой слой $\omega_R = \Omega_2 \cap B_R$.

Пусть $u(x)$ - произвольное векторное поле из $\mathcal{D}(\Omega_2; R^n)$. Тогда найдется такое число $R > 1$, что $\operatorname{supp}|u| \subset \omega_R$. Рассмотрим сужение ψ на ω_R, которое по-прежнему будем обозначать через ψ. Очевидно, что $\operatorname{grad}\psi \in W^{-1}_{p'}(\omega_R; R^n)$. Поскольку область ω_R ограничена и удовлетворяет условию конуса, то из теоремы 1 и леммы 4 следует, что $\psi \in L_{p'}(\omega_R)$.

Покажем теперь, что найдется такая функция $\tilde{\psi} \in L_{p'}(B_R)$, что $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$ в ω_R и

$$\|\operatorname{grad}\tilde{\psi}\|_{W^{-1}_{p'}(B_R; R^n)} \leq C_2 \|\operatorname{grad}\psi\|_{W^{-1}_{p'}(\omega_R; R^n)} \tag{47}$$

с постоянной $C_2 > 0$, зависящей только от n и p. Действительно, без ограничения общности можно считать, что $R > 2$. Обозначим $\omega'_R = \omega_R \setminus B_{3/2}$. Тогда $\omega_R = \omega'_R \cup \omega_2$. Нетрудно убедиться, что существует такая постоянная $C_3 > 0$, зависящая только от n и p, что для всякого $u(x) \in \mathcal{D}(\omega_R; R^n) \subset \overset{\circ}{W}{}^1_p(\omega_R; R^n)$ найдутся $u_1 \in \mathcal{D}(\omega'_R; R^n)$, $u_2 \in \mathcal{D}(\omega_2; R^n)$, для которых имеет место оценка

$$\|u_1\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\omega'_R;R^n)}+\|u_2\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\omega_2;R^n)}\le C_3\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\omega_R;R^n)}. \tag{48}$$

В то же время для любой $\psi\in L_{p'}(\omega_2)$ найдется $\tilde{\psi}\in L_{p'}(B_2)$ такая, что $\tilde{\psi}(x)=\psi(x)$ в ω_2 и для которой справедлива оценка (47) с $R=2$. А тогда из (48) вытекает справедливость (47).

Заметим, что

$$<\psi,\operatorname{div}u>=\int\limits_{\omega_R}\psi(x)\operatorname{div}u(x)dx=\int\limits_{B_R}\tilde{\psi}(x)f(x)dx,$$

где $f(x)=\operatorname{div}u(x)$. А поскольку

$$\int\limits_{B_R}f(x)dx=0,$$

то, согласно лемме 2, найдется векторное поле $w(x)\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(B_R;R^n)$ такое, что $\operatorname{div}w=f(x)$ в B_R. Тогда

$$<\psi,\operatorname{div}u>=\int\limits_{B_R}\tilde{\psi}(x)\operatorname{div}w(x)dx=-<\operatorname{grad}\tilde{\psi},w>,$$

откуда и из леммы 2 следует оценка

$$|<\psi,\operatorname{div}u>|\le C_4\|\operatorname{grad}\tilde{\psi}\|_{W^{-1}_{p'}(B_R;R^n)}\|\operatorname{div}u\|_{L_p(\Omega_2)}. \tag{49}$$

Покажем, что векторное поле $w(x)$ может быть выбрано таким образом, что постоянная C_4 в (49) будет зависеть только от n и p. Для этого положим

$$w(x)=\left(\frac{2}{R}\right)^n\int\limits_{|y|<R}f(y)\left\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int\limits_{|x-y|}^{\infty}\varphi_0\left(\frac{2y}{R}+\frac{2\xi}{R}\cdot\frac{x-y}{|x-y|}\right)\xi^{n-1}d\xi\right\}dy,$$

где функция $\varphi_0(x)\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(R^n)$, $\operatorname{supp}\varphi_0\subset\{x:|x|<1\}$ и $\int\limits_{|x|<1}\varphi_0(x)dx=1$.

С помощью замен переменных интегрирования такое $w(x)$ можно представить в виде $w(x)=Rw_0\left(\frac{x}{R}\right)$, где

$$w_0(x)=2^n\int\limits_{|y|<1}f(Ry)\left\{\frac{x-y}{|x-y|^n}\int\limits_{|x-y|}^{\infty}\varphi_0\left(2y+2\xi\frac{x-y}{|x-y|}\right)\xi^{n-1}d\xi\right\}dy.$$

А тогда из оценки леммы 2 для $w_0(x)$ сразу же получим оценку

$$\|w\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(B_R;R^n)}\le C_4\|f\|_{L_p(B_R)}=C_4\|\operatorname{div}u\|_{L_p(\Omega_2)}$$

с постоянной C_4, зависящей только от n и p, откуда и следует оценка (49) с той же самой постоянной C_4.

Из (47), (49) вытекает справедливость (46). А тогда, как уже было показано выше, оказывается справедливым утверждение доказываемой леммы. Таким образом, лемма 8 доказана.

Отметим, что лемма 8 используется в § 4 и фактически, в силу теоремы 4 из § 2, утверждение леммы 8 эквивалентно утверждению теоремы 8 из § 4 для неограниченных областей с компактными границами. Поэтому весьма существенно то, что все использованные при доказательстве леммы 8 рассуждения из § 4 не опираются на саму лемму 8.

Аналогичным образом доказывается следующая

Лемма 9. *Пусть неограниченная область $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, с компактной границей удовлетворяет равномерному условию конуса, $1<p<\infty$, $\ell \geq 2$ - целое число. Тогда* $\overset{\circ}{J}{}^{\ell}_{p}(\Omega) = \hat{J}^{\ell}_{p}(\Omega)$.

§ 3. Неограниченные области с некомпактными границами

Как уже отмечалось в начале настоящей работы, разрешимость задачи (1), (2) для неограниченных областей с некомпактными границами зависит не только от гладкости границы, но уже и от геометрии области.

Покажем, что в случае, когда Ω - слой или цилиндр в R^n, задача (1), (2) разрешима в $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{p}(\Omega; R^n)$ не для любой правой части $f(x) \in L_p(\Omega)$. Для этого достаточно будет показать, что область значений оператора (6), сопряженного к оператору (5), не замкнута в $W^{-1}_{p'}(\Omega; R^n)$.

Пусть $\Omega = \{x = (x', x_n): x' \in R^{n-1},\ 0 < x_n < 1\}$ - слой в R^n. Выберем функцию $\rho(x) \in C^\infty(R^n)$ таким образом, чтобы $\rho(x) = 0$ при $|x'| \leq \frac{1}{2}$ и $\rho(x) = 1$ при $|x'| \geq 1$, и положим $\varphi(x) = \rho(x) \cdot |x'|^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$. Тогда при $\alpha > \frac{n-1}{p'} - 1$ векторное поле $\operatorname{grad} \varphi(x) \in L_{p'}(\Omega; R^n)$, и, следовательно, $\operatorname{grad} \varphi \in W^{-1}_{p'}(\Omega; R^n)$, поскольку область Ω имеет конечную толщину (см. [5, с. 158]). Нетрудно убедиться, что при $\alpha > \frac{n-1}{p'} - 1$ существует последовательность $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ функций из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \|\operatorname{grad} \varphi - \operatorname{grad} \varphi_k\|_{L_{p'}(\Omega; R^n)} = 0.$$

А так как Ω имеет конечную толщину (см. [5, с.158]), то

$$\lim_{k\to\infty} \|\operatorname{grad} \varphi - \operatorname{grad} \varphi_k\|_{W^{-1}_{p'}(\Omega; R^n)} = 0,$$

вследствие чего при $\alpha > \frac{n-1}{p'} - 1$ векторное поле $\operatorname{grad} \varphi$ принадлежит замыканию в $W^{-1}_{p'}(\Omega; R^n)$ области значений оператора (6). Но $\varphi(x) \notin L_{p'}(\Omega)$, если $\alpha \leq \frac{n-1}{p'}$. А поскольку при $n \geq 2$, $1<p<\infty$, всегда можно выбрать

число $\alpha > 0$ таким образом, чтобы $\frac{n-1}{p'} - 1 < \alpha \leq \frac{n-1}{p'}$, то заключаем, что область значений оператора (6) не замкнута в $W^{-1}_{p'}(\Omega; R^n)$, откуда следует незамкнутость в $L_p(\Omega)$ области значений оператора (5) при любых $n \geq 2$, $1 < p < \infty$.

Для цилиндра $\Omega = \{x = (x', x_n) : |x'| < 1,\ x_n \in R^1\}$ положим $\varphi(x) = \rho(x_n) \cdot |x_n|^{-\alpha}$ с $\alpha > 0$, где функция $\rho(x_n) \in C^\infty(R^1)$ выбрана таким образом, чтобы $\rho(x_n) = 0$ при $|x_n| \leq \frac{1}{2}$ и $\rho(x_n) = 1$ при $|x_n| \geq 1$. Приведенные выше рассуждения показывают, что при $0 < \alpha \leq \frac{1}{p}$ векторное поле $grad\,\varphi$ принадлежит замыканию в $W^{-1}_{p'}(\Omega; R^n)$ области значений оператора (6) и не принадлежит самой области значений этого оператора, откуда также следует незамкнутость для цилиндра Ω области значений оператора (5) в $L_p(\Omega)$ при любых $n \geq 2$, $1 < p < \infty$.

Таким образом, сужение класса рассматриваемых неограниченных областей с некомпактными границами, о котором говорилось в начале настоящей работы, оказывается вполне оправданным, и, более того, если неограниченную область Ω с некомпактной границей нельзя представить в виде конечной суммы областей специального липшицева типа и ограниченных областей, удовлетворяющих условию конуса, то задача (1),(2) разрешима $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; R^n)$, вообще говоря, не для любой $f(x) \in L_p(\Omega)$. А именно, пусть $\Omega_\beta = \{x = (x', x_n) : |x'| < 1 + x_n^\beta,\ x_n > 0\}$, где $0 < \beta < 1$. Рассмотрим ту же функцию $\varphi(x) = \rho(x_n) \cdot |x_n|^{-\alpha}$ с $\alpha > 0$, что и в случае цилиндра. Очевидно, при $\beta > 0$, $n \geq 2$ и $1 < p < \infty$ всегда можно выбрать число $\alpha > 0$ таким образом, чтобы $\frac{1+\beta(n-1)}{p'} - 1 < \alpha \leq \frac{1+\beta(n-1)}{p'}$. При таких α векторное поле $grad\,\varphi(x) \in L_{p'}(\Omega_\beta; R^n)$, а $\varphi(x) \notin L_{p'}(\Omega_\beta)$. В общем случае $grad\,\varphi \notin W^{-1}_{p'}(\Omega_\beta; R^n)$, но если $0 < \beta < 1$, то найдется такое $\alpha > 0$, что $\frac{1+\beta(n-1)}{p'} - 1 + \beta < \alpha \leq \frac{1+\beta(n-1)}{p'}$; при таких α для любого $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_\beta; R^n)$ имеет место оценка

$$\left| \int_{\Omega_\beta} (grad\,\varphi(x), v(x))\,dx \right| \leq C'' \|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_\beta; R^n)}$$

с постоянной $C'' > 0$, зависящей только от $\alpha, \beta, n, p, \varphi$. Из этой оценки следует, что $grad\,\varphi \in W^{-1}_{p'}(\Omega_\beta; R^n)$.

Пусть $\eta(\xi) \in C^\infty([0, \infty))$ выбрана таким образом, чтобы $\eta(\xi) = 0$ при $\xi \geq 1$ и $\eta(\xi) = 1$ при $\xi \leq \frac{1}{2}$. Нетрудно убедиться, что при

$$\frac{1+\beta(n-1)}{p'} - 1 < \alpha \leq \frac{1+\beta(n-1)}{p'},\quad \beta > 0,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\left\| \operatorname{grad}\varphi - \operatorname{grad}\{\eta(\delta x_n)\varphi\}\right\|_{L_{p'}(\Omega_\beta;R^n)} = 0,$$

а если $0<\beta<1$ и $\frac{1+\beta(n-1)}{p'} - 1+\beta < \alpha \leqslant \frac{1+\beta(n-1)}{p'}$, то

$$\lim_{\delta\to 0}\left\| \operatorname{grad}\varphi - \operatorname{grad}\{\eta(\delta x_n)\varphi\}\right\|_{W_{p'}^{-1}(\Omega_\beta;R^n)} = 0,$$

откуда следует, что $\operatorname{grad}\varphi$ принадлежит замыканию в $W_{p'}^{-1}(\Omega_\beta;R^n)$ области значений оператора (6) и не принадлежит самой области значений этого оператора, если $0<\beta<1$ и $\frac{1+\beta(n-1)}{p'} - 1+\beta < \alpha \leqslant \frac{1+\beta(n-1)}{p'}$. Следовательно, при $0<\beta<1$ задача (1),(2) для области Ω_β разрешима в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_\beta;R^n)$ не для любой правой части $f(x)\in L_p(\Omega_\beta)$.

Если же взять $\beta\geq 1$, то задача (1),(2) для области Ω_β оказывается разрешимой в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_\beta;R^n)$ уже для любой правой части $f(x)\in L_p(\Omega_\beta)$. Точнее, имеет место

Теорема 6. *Пусть неограниченная область* $\Omega\neq R^n$, $n\geqslant 2$, *может быть представлена в виде конечной суммы специальных липшицевых областей и ограниченных областей, удовлетворяющих условию конуса,* $1<p<\infty$ (*для простоты предполагается, что* $R^n\setminus\bar\Omega\neq\emptyset$). *Тогда найдется постоянная* $C>0$, *зависящая только от* n, p *и* Ω, *такая, что для любой* $f(x)\in L_p(\Omega)$ *существует векторное поле* $v(x)\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega;R^n)$, *удовлетворяющее уравнению* (1) *и неравенству* (8).

Доказательство. Сначала докажем теорему для случая, когда Ω - специальная липшицева область, т.е. $\Omega+\Gamma\subset\Omega$, где Γ - открытый выпуклый полубесконечный конус с вершиной в начале координат, содержащий положительную полуось $\{x: x'=0,\ x_n>0\}$.

Пусть S - единичная сфера в R^n с центром в начале координат. Выберем функцию $q(x)\in C^\infty(S)$ таким образом, чтобы $\operatorname{supp} q\subset S\cap\Gamma$ и $\int_S q\,ds=1$.

Заметим, что (12) напоминает представление Соболева [20] для дифференцируемых функций в области, звездной относительно шара. Точно так же, векторное поле

$$v(x) = \int_\Omega f(y)\frac{x-y}{|x-y|^n}\, q\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)dy \tag{50}$$

напоминает представление К.Т.Смита [7] для дифференцируемых функций в специальной липшицевой области Ω.

Продолжим $f(x)$ нулем на все R^n, сохранив для продолжения прежнее обозначение. Нетрудно убедиться, что для $i=1,\dots,n$ справедливо

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)=f(x)\int\limits_S \frac{y y_i}{|y|^2} q\left(\frac{y}{|y|}\right)ds_y+V.p.\int\limits_{R^n} f(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{x-y}{|x-y|^n} q\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)\right\} dy. \tag{51}$$

В силу [12] , ядро сингулярного интеграла в (51) будет удовлетворять требованиям теоремы Зигмунда-Кальдерона [21] , из которой следует, что при $1<p<\infty$ имеет место $v(x)\in L_p(R^n;R^n)$ и выполняется неравенство

$$\|v\|_{L_p^1(R^n;R^n)} \leqslant C\|f\|_{L_p(\Omega)} \tag{52}$$

с постоянной $C>0$, зависящей только от n, p и $q(x)$.

Заметим теперь, что $\operatorname{supp} q\left(\frac{x}{|x|}\right)\subset \Gamma$, поэтому для каждого фиксированного $x\in R^n$ носитель функции $q\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)$ как функции переменной y содержится в конусе $x-\Gamma$. Нетрудно убедиться, что для любой точки $x\notin\Omega$ пересечение $x-\Gamma\cap\Omega=\emptyset$. Действительно, если предположить противное, т.е. $x-\Gamma\cap$ $\cap\Omega\neq\emptyset$ для какой-либо точки $x\notin\Omega$, то из того, что Ω - область специального липшицева типа и Γ - открытый выпуклый конус, следовало бы, что $x\in\Omega$.

Поскольку $\operatorname{supp} f\subset\bar\Omega$, а для каждого фиксированного $x\notin\Omega$ пересечение $x-\Gamma\cap\Omega=\emptyset$, то и носитель векторного поля (50) $\operatorname{supp}|v|\subset\bar\Omega$. Отсюда, из (52) и [17] следует, что $v(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega;R^n)$ и имеет место оценка (8) с той же, что и в неравенстве (52), постоянной C . Действительно, поскольку $\operatorname{supp}|v|\subset\bar\Omega$ и Ω - область специального липшицева типа, то для доказательства принадлежности векторного поля (50) пространству Соболева $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega;R^n)$ достаточно установить, что при $1<p<\infty$ справедливо

$$\lim_{\eta\to 0}\|v-\psi_\eta(x)v\|_{L_p^1(R^n;R^n)}=0, \tag{53}$$

где $\psi_\eta(x)$ - срезающая функция из [17](без ограничения общности можно считать, что область Ω не содержит шара $\{x:|x|<3\}$).

Для доказательства (53) нужно воспользоваться оценками [17] и тем фактом, что $\operatorname{supp}|v|\subset\bar\Omega$.

Таким образом, для областей Ω специального липшицева типа утверждение теоремы 6 доказано.

Пусть теперь

$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i ,$$

где каждая из областей Ω_i - либо не ограничена и специального липшицева типа, либо ограничена и удовлетворяет условию конуса.

Предположим сначала, что $N=2$. Возможны два варианта: либо Ω_1 и Ω_2 - области специального липшицева типа, либо одна из этих областей (например, Ω_1) ограничена и удовлетворяет условию конуса, а другая - не ограничена и специального липшицева типа. В последнем случае представим $f(x)$ в виде $f(x)=$ $=f_1(x)+f_2(x)$ точно так же, как это было сделано при доказательстве тео-

ремы 4, и применим к области Ω_1 теорему 1, а к области Ω_2 - уже доказанное для Ω_2 утверждение теоремы 6, откуда будет следовать справедливость утверждения теоремы 6 для области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. В первом случае (т.е. Ω_1 и Ω_2 - специального липшицева типа) представим $f(x)$ в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega_1, \\ 0, & x \in \Omega_2 \setminus \Omega_1, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega_2 \setminus \Omega_1, \\ 0, & x \in \Omega_1. \end{cases}$$

Поскольку для областей Ω_1 и Ω_2 утверждение теоремы 6 уже доказано, то заключаем, что утверждение теоремы 6 справедливо также и для области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Таким образом, при $N=2$ теорема 6 доказана. При $N \geq 3$ доказательство проводится по индукции.

Теорема 6 доказана.

Следствие 5. *В предположениях теоремы 6 для любой $f(x) \in L_p(\Omega)$ существует единственное решение $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; R^n)$ задачи* (1), (2) *такое, что*

$$|v|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; R^n)} = c_f \,,$$

где c_f - постоянная, определение которой было дано в следствии 1. При этом линейный оператор

$$div: \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; R^n) / \hat{\mathcal{J}}{}^1_p(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega)$$

является гомеоморфизмом фактор-пространства

$$\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; R^n) / \hat{\mathcal{J}}{}^1_p(\Omega) \text{ на } L_p(\Omega).$$

При более сильных требованиях к области Ω оказывается справедливой следующая

Теорема 7. *Пусть неограниченная область $\Omega \neq R^n$, $n \geq 2$, может быть представлена в виде конечной суммы специальных липшицевых областей и ограниченных областей, удовлетворяющих равномерному условию конуса $1 < p < \infty$, $\ell \geq 1$ - целое число $(R^n \setminus \bar{\Omega} \neq \emptyset)$. Тогда найдется постоянная $C > 0$, зависящая только от n, p, ℓ и Ω, такая, что для любой $f(x) \in \overset{\circ}{W}{}^\ell_p(\Omega)$ существует решение $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\ell+1}_p(\Omega; R^n)$ задачи* (1), (2), *удовлетворяющее неравенству*

$$|v|_{\overset{\circ}{W}{}^{\ell+1}_p(\Omega; R^n)} \leq C |f|_{\overset{\circ}{W}{}^\ell_p(\Omega)} \,.$$

Доказательство теоремы 7 почти не отличается от доказательства теоремы 6.

§ 4. Потенциальные векторные поля в пространстве $W_p^{-1}(\Omega;R^n)$

В этом параграфе, опираясь на уже полученные результаты, мы дадим ответ на вопрос о том, когда обобщенная функция $\varphi\in\mathcal{D}'(\Omega)$, удовлетворяющая условию (4), является обычной функцией из $L_p(\Omega)$. Покажем сначала, что такая φ всегда будет функцией из $L_{p,loc}(\Omega)$. Действительно, пусть Ω - произвольная область в R^n, а $\varphi\in\mathcal{D}'(\Omega)$ и удовлетворяет условию (4). Для произвольных $\psi(x)\in\mathcal{D}(\Omega)$ рассмотрим функционал

$$<\varphi,\Delta\psi> = -<grad\,\varphi,\, grad\,\psi>.$$

Из условия (4) следует, что найдется $C_\varphi>0$, зависящая только от n,p,Ω,φ, такая, что

$$|<grad\,\varphi,\, grad\,\psi>|\leq C_\varphi \| grad\,\psi\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega;R^n)}$$

для всех $\psi(x)\in\mathcal{D}(\Omega)$.

Таким образом,

$$|<\varphi,\Delta\psi>|\leq C_\varphi \| grad\,\psi\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega;R^n)} \tag{54}$$

для всех $\psi(x)\in\mathcal{D}(\Omega)$. Продолжая $\psi(x)$ нулем на все R^n, получаем при $1<p<\infty$ (см. [6, с.73])

$$\| grad\,\psi\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega;R^n)}\leq\sum_{|\alpha|=2}\|\mathcal{D}^\alpha\psi\|_{L_{p'}(R^n)}\leq$$

$$\leq C_1\|\Delta\psi\|_{L_{p'}(R^n)} = C_1\|\Delta\psi\|_{L_{p'}(\Omega)},$$

где постоянная $C_1>0$ зависит только от n и p. А тогда из (54) находим

$$|<\varphi,\Delta\psi>|\leq C'_\varphi\|\Delta\psi\|_{L_{p'}(\Omega)}.$$

Отсюда и из теоремы Хана-Банаха (см., например, [22]), а также из теоремы Рисса об общем виде виде линейного непрерывного функционала над $L_{p'}(\Omega)$ следует существование $\tilde\varphi\in L_p(\Omega)$ такой, что

$$<\varphi,\Delta\psi> = <\tilde\varphi,\Delta\psi>$$

для всех $\psi(x)\in\mathcal{D}(\Omega)$ и $\|\tilde\varphi\|_{L_p(\Omega)}\leq C'_\varphi$, при этом

$$<\varphi-\tilde{\varphi},\Delta\psi>=0 \tag{55}$$

для всех $\psi(x)\in\mathcal{D}(\Omega)$.

Из (55) следует (см., например, [23 , с.211]), что $\varphi-\tilde{\varphi}$ является вещественно аналитической функцией в Ω и, следовательно, $\varphi-\tilde{\varphi}\in L_{p,loc}(\Omega)$. А так как $\tilde{\varphi}\in L_p(\Omega)$, то $\varphi\in L_{p,loc}(\Omega)$, что и требовалось показать.

Таким образом, для произвольной области Ω всякая $\varphi\in\mathcal{D}'(\Omega)$, удовлетворяющая условию (4), является функцией из $L_{p,loc}(\Omega)$. Но для произвольной Ω такая φ , вообще говоря, может и не быть функцией из $L_p(\Omega)$. Примерами таких областей могут служить ограниченные области, для которых в общем случае не имеет места неравенство Пуанкаре, а также неограниченные области с некомпактными границами, такие, как слой и цилиндр.

Прежде чем сформулировать основные результаты, условимся обозначать через $\hat{G}_p^{-1}(\Omega)$ аннулятор подпространства $\overset{\circ}{J}{}_p^1(\Omega)\subset\overset{\circ}{W}{}_{p'}^1(\Omega;R^n)$, а через $G_p^{-1}(\Omega)$ - подпространство в $W_p^{-1}(\Omega;R^n)$:

$$G_p^{-1}(\Omega)=\{v: v\in W_p^{-1}(\Omega;R^n),\ v=\mathrm{grad}\,\varphi,\ \varphi\in L_p(\Omega)\}.$$

Заметим, что из определения $\hat{G}_p^{-1}(\Omega)$ (см., например, [22])следует, что $\hat{G}_p^{-1}(\Omega)$ - замкнутое подпространство в $W_p^{-1}(\Omega;R^n)$. Подпространство $G_p^{-1}(\Omega)$, вообще говоря, может быть незамкнутым в $W_p^{-1}(\Omega;R^n)$. Очевидно, $G_p^{-1}(\Omega)\subset\hat{G}_p^{-1}(\Omega)$. Обратное включение имеет место не для всякой области Ω , поскольку, во-первых, $G_p^{-1}(\Omega)$ может быть незамкнутым, а во-вторых, замыкание $G_p^{-1}(\Omega)$ может не совпадать с $\hat{G}_p^{-1}(\Omega)$. Остановимся сначала на случае, когда $G_p^{-1}(\Omega)=\hat{G}_p^{-1}(\Omega)$. А именно справедлива

Теорема 8. *Пусть Ω - ограниченная или неограниченная область в R^n, $n\geqslant 2$, удовлетворяющая условию конуса и имеющая компактную границу, $1<p<\infty$. Тогда $G_p^{-1}(\Omega)=\hat{G}_p^{-1}(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $\bar{G}_p^{-1}(\Omega)$ - сильное замыкание $G_p^{-1}(\Omega)$ в $W_p^{-1}(\Omega;R^n)$. Заметим, что $\hat{\overset{\circ}{J}}{}_{p'}^1(\Omega)={}^{\perp}(G_p^{-1}(\Omega))$, т.е. $\hat{\overset{\circ}{J}}{}_{p'}^1(\Omega)$ является аннулятором подпространства $G_p^{-1}(\Omega)$. Тогда (см. [22]) $(\hat{\overset{\circ}{J}}{}_{p'}^1(\Omega))^{\perp}=$ $=\bar{G}_p^{-1}(\Omega)$. Но, в силу лемм 4 и 8, $\overset{\circ}{J}{}_{p'}^1(\Omega)=\hat{\overset{\circ}{J}}{}_{p'}^1(\Omega)$, поэтому $\bar{G}_p^{-1}(\Omega)=$ $=(\overset{\circ}{J}{}_{p'}^1(\Omega))^{\perp}$. А так как, по определению, $(\overset{\circ}{J}{}_{p'}^1(\Omega))^{\perp}=\hat{G}_p^{-1}(\Omega)$, то заключаем, что $\hat{G}_p^{-1}(\Omega)=\bar{G}_p^{-1}(\Omega)$.

Заметим, что $G_p^{-1}(\Omega)$ является областью значений оператора $\mathrm{grad}: L_p(\Omega)\to$ $\to W_p^{-1}(\Omega;R^n)$. Из теорем 1,4 следует замкнутость области значений оператора $\mathrm{div}:\overset{\circ}{W}{}_{p'}^1(\Omega;R^n)\to L_{p'}(\Omega)$, что эквивалентно (см.,например, [22]) замкнутости области значений оператора $\mathrm{grad}: L_p(\Omega)\to$ $\to W_p^{-1}(\Omega;R^n)$, т.е. $G_p^{-1}(\Omega)=\bar{G}_p^{-1}(\Omega)$.

Таким образом, $G_p^{-1}(\Omega)=\hat{G}_p^{-1}(\Omega)$, что и требовалось доказать.

Следствие 6. *В предположениях теоремы 8 для любого* $\sigma \in W_p^{-1}(\Omega; R^n)$ *такого, что* $\langle \sigma, u \rangle = 0$ *для всех* $u(x) \in \overset{\circ}{J}{}^{\infty}(\Omega)$ *, найдется* $\varphi(x) \in L_p(\Omega)$ *такая, что* $\sigma = \operatorname{grad} \varphi$.

Следствие 7. *В предположениях теоремы 8 любая* $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *, удовлетворяющая условию* (4) *, является функцией из* $L_p(\Omega)$*, если* Ω *ограничена, и существует постоянная* C *такая, что функция* $\varphi - C \in L_p(\Omega)$ *, если* Ω *не ограничена.*

Следствия 6 и 7 очевидным образом вытекают из теоремы 8.

Для неограниченных областей с некомпактными границами ситуация усложняется и начинает играть роль геометрия области, а именно справедлива

Теорема 9. *Пусть неограниченная область* $\Omega \neq R^n$ *,* $n \geq 2$ *, с некомпактной границей представима в виде конечной суммы неограниченных специальных липшицевых областей и ограниченных областей, удовлетворяющих условию конуса,* $1 < p < \infty$ *(для простоты предполагается* $R^n \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset$ *).*

Тогда для того чтобы $G_p^{-1}(\Omega) = \hat{G}_p^{-1}(\Omega)$ *, необходимо и достаточно, чтобы* $\hat{\overset{\circ}{J}}{}_{p'}^{1}(\Omega) = \overset{\circ}{J}{}_{p'}^{1}(\Omega)$.

Доказательство. Так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, нетрудно убедиться, что $\bar{G}_p^{-1}(\Omega) = (\overset{\circ}{J}{}_{p'}^{1}(\Omega))^{\perp}$. Из теоремы 6 следует замкнутость области значений оператора $\operatorname{div}: \overset{\circ}{W}{}_{p'}^{1}(\Omega; R^n) \to L_{p'}(\Omega)$, что эквивалентно замкнутости области значений $G_p^{-1}(\Omega)$ оператора $\operatorname{grad}: L_p(\Omega) \to$
$\to W_p^{-1}(\Omega; R^n)$, т.е. $G_p^{-1}(\Omega) = \bar{G}_p^{-1}(\Omega)$.

Таким образом, $G_p^{-1}(\Omega) = (\overset{\circ}{J}{}_{p'}^{1}(\Omega))^{\perp}$, а, по определению, $\hat{G}_p^{-1}(\Omega) =$
$= (\hat{\overset{\circ}{J}}{}_{p'}^{1}(\Omega))^{\perp}$, откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 8. *В предположениях теоремы 9 для всякого* $\sigma \in W_p^{-1}(\Omega; R^n)$ *такого, что* $\langle \sigma, u \rangle = 0$ *для всех* $u(x) \in \overset{\circ}{J}{}^{\infty}(\Omega)$ *, найдется* $\varphi \in L_p(\Omega)$ *такая, что* $\sigma = \operatorname{grad} \varphi$ *, тогда и только тогда, когда* $\hat{\overset{\circ}{J}}{}_{p'}^{1}(\Omega) = \overset{\circ}{J}{}_{p'}^{1}(\Omega)$.

Это вытекает непосредственно из теоремы 9.

Следствие 9. *В предположениях теоремы 9 для всякого* $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *, удовлетворяющего условию* (4)*, найдется постоянная* C *такая, что* $\varphi - C \in L_p(\Omega)$*, тогда и только тогда, когда* $\hat{\overset{\circ}{J}}{}_{p'}^{1}(\Omega) = \overset{\circ}{J}{}_{p'}^{1}(\Omega)$.

Доказательство. Если область Ω односвязна, то из теоремы двойственности Де Рама [24] следует, что $\hat{G}_p^{-1}(\Omega) = \{\sigma : \sigma \in W_p^{-1}(\Omega; R^n)$, $\sigma = \operatorname{grad} \varphi,\ \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)\}$, вследствие чего, утверждение следствия 9 для односвязных областей вытекает непосредственно из теоремы 9.

Пусть теперь Ω - произвольная область, удовлетворяющая требованиям теоремы 9. Нетрудно убедиться, что найдется последовательность $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ ограниченных областей, удовлетворяющих условию конуса, таких, что $\Omega_m \subset\subset \Omega$ и $\Omega_m \subset\subset \Omega_{m+1}$ для всех номеров $m \geq 1$, причем для любого компакта $K \subset \Omega$ существует такой номер N , что $K \subset \Omega_m$ для всех номеров $m \geq 1$.

Пусть v - какое-либо векторное поле из $\hat{G}_p^{-1}(\Omega)$. Тогда для сужения v_m векторного поля v на Ω_m имеет место

$$< v_m, u > = 0, \quad m=1,2,\ldots,$$

для всех $u(x) \in \overset{\circ}{J}{}^{\infty}(\Omega_m)$. Поэтому, в силу следствия 6, для любого m найдется функция $\varphi_m(x) \in L_p(\Omega_m)$ такая, что $v_m = \operatorname{grad} \varphi_m$ в Ω_m. Так как $\Omega_m \subset\subset \Omega_{m+1}$ при любых $m \geq 1$, то последовательность $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ может быть выбрана таким образом, что $\varphi_m(x) = \varphi_{m+1}(x)$ в Ω_m для всех $m \geq 1$.

Последовательность функций $\{\eta_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ выберем так, чтобы $\eta_m(x) = 1$ в Ω_m и $\operatorname{supp} \eta_m \subset \overline{\Omega}_{m+1}$ при $m \geq 1$.

Введем теперь последовательность функций $\{\psi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, положив $\psi_m(x) = \eta_m(x)\varphi_{m+1}(x)$ для всех $m \geq 1$. Очевидно, $\psi_m(x) \in L_p(\Omega_m)$ и $\psi_m(x) = \psi_{m+1}(x)$ в Ω_m для любых $m \geq 1$. Поэтому числовая последовательность $<\psi_m, \varphi>$ сходится для любой $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$. А тогда (см.,например, [23])существует обобщенная функция $\psi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} <\psi_m, \varphi> = <\psi, \varphi>$ для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, откуда сразу же следует, что $\lim\limits_{m\to\infty} <\operatorname{grad}\psi_m, u> = <\operatorname{grad}\psi, u>$ для всех векторных полей $u(x) \in \mathcal{D}(\Omega; R^n)$ При этом, в силу построения, $v = \operatorname{grad}\psi$ в Ω. Таким образом, $\hat{G}_p^{-1}(\Omega) \subset \{v : v \in W_p^{-1}(\Omega; R^n),\ v = \operatorname{grad}\psi,\ \psi \in \mathcal{D}'(\Omega)\}$. Поскольку обратное включение очевидно, то $\hat{G}_p^{-1}(\Omega) = \{v : v \in W_p^{-1}(\Omega; R^n),\ v = \operatorname{grad}\psi,\ \psi \in \mathcal{D}'(\Omega)\}$. А тогда из теоремы 9 вытекает справедливость следствия 9.

Следствие 9 доказано.

Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.- М.: Наука, 1970.- 288 с.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А. О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье-Стокса. Зап.научн.семинаров ЛОМИ, Наука, 1976, т.59, вып.9, Л., с.81-116.
3. Amick C.J. Decomposition Theorems for Solenoidal Vector Fields.- J. London Math. Soc.,1977, v. 15, p. 2, p. 288-296.
4. Боговский М.Е. Решение первой краевой задачи для уравнения неразрывности несжимаемой среды.- Докл.АН СССР, 1979, т.248, № 5, с.1037-1040.
5. Adams R.A. Sobolev Spaces. New York- London, Academic Press, 1975.- 268 p.

6. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.- М.: Мир, 1973.- 342 с.

7. Smith K.T. Formulas to Represent Functions by their Derivatives.-Math. Ann., 1970, v. 188, p. 53-77.

8. Magenes E., Stampacchia G. I Problemi al Contorno per le Equazioni Differenziali di Tipo Ellittico.-Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa, 1958, v.12, f. 3, p. 247-358.

9. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики.-М.-Л.: ГИТТЛ, 1951, т.2.- 544 с.

10. Gagliardo E. Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili.- Ricerche Mat., 1959, v. 8, f. 1, p.24-51.

11. Calderón A.P., Zygmund A. On singular integrals.- Amer. J. Math., 1956, v. 78, № 2, p.289-309.

12. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.-М.: Физматгиз, 1962.- 254 с.

13. Heywood J.G. On uniqueness questions in the theory of viscous flow.-Acta Math.,1976, v. 136, № 1-2, p. 61-102.

14. Боговский М.Е., Масленникова В.Н. О плотности финитных соленоидальных векторных полей.- Успехи мат.наук, 1978, т.33, вып.3. с.152

15. Wilansky A. Functional Analysis , New York, Blaisdell, 1964. - 291 p.

16. Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций.- Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1969, т.105, с.89-167.

17. Соболев С.Л. Плотность финитных функций в пространстве $L_p^{(m)}(E_n)$.-Сиб. мат.журн., 1963, т.4, № 3, с.673-682.

18. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория.- М.:ИЛ., 1962.-895 с.

19. Масленникова В.Н., Боговский М.Е. О плотности финитных соленоидальных векторных полей.- Сиб.мат.журн., 1978, т.19, №5, с.1092-1108.

20. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.- Л.: изд-во ЛГУ, 1950.- 255 с.

21. Calderón A.P., Zygmund A. On the existence of certain singular integrals. - Acta Math., 1952, v.88, p.88-139.

22. Рудин У. Функциональный анализ.- М.: Мир, 1975.- 443 с.

23. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике.- М.: Наука, 1979.- 318 с.

24. Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия.- М.: ИЛ,1956.- 250 с.