УДК 517+518.392

О НОРМЕ В $L_2^{-m}[0,1]$ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ С РЕГУЛЯРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

В.Л.Васкевич (Новосибирск)

Введение

Известно, что одной из важнейших характеристик квадратурной формулы (к.ф.) над пространством функций $L_2^m[0,1]$ является норма функционала погрешности (ф.п.) этой к.ф. в сопряженном пространстве $(L_2^m[0,1])^*$. Нахождение какого-нибудь удобного представления для этой нормы связано с определенными затруднениями. Когда соответствующий ф.п. $\ell_m(x)$ есть ф.п. с регулярным пограничным слоем (р.п.с.), то в [1] доказано, что

$$\|\ell_m|(L_2^m(0,1))^*\|^2 = \sum_{\beta\neq 0}\frac{1}{(2\pi\beta)^{2m}}h^{2m} + O(h^{2m+1}),$$ где

$O(h^{2m+1})$ в общем случае зависит от m .

В настоящей работе найдено приближенное представление величины $O(h^{2m+1})$ как функции от m для конкретного ф.п. $\ell_m(x)$ с равномерной решеткой узлов на $[0,1]$: соответствующие ему локальные ф.п. строятся исходя из интерполяционных формул Лагранжа. В этой связи представляет интерес полученная здесь основная

Теорема. *Существует такая постоянная $M>0$, что при целом $m\geq M$ справедливо:*

$$\|\ell_m|L_2^{-m}[0,1]\|^2 = \sum_{\beta\neq 0}\frac{1}{(2\pi\beta)^{2m}}h^{2m} + h^{2m+1}\times\left|\int_0^1(-1)^m t^{(m+1)}/(\pi m!)\,dt\right|^2\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2m}\left|\int_0^1\frac{t^m}{(t-1/2)+i\,1/2\,\mathrm{ctg}\,x}\,dt\right|^2 dx\,[1+E_1(m,h)]\times[1+E_2(m,h)],$$

где $|E_1(m,h)|\leq Cm^2h$; $|E_2(m,h)|\leq C/\sqrt{m}$;

C *- постоянная, не зависящая от* m,h.

Замечание. Если ввести обозначение:

$$O_m\left(h^{2m+1}\right)=\| \ell_m | L_2^{-m}[0,1]\|^2-h^{2m}\sum_{\beta\neq 0}\frac{1}{(2\pi\beta)^{2m}},$$

то из теоремы следует асимптотическое равенство:

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{h\to 0} O_m\left(h^{2m+1}\right)\Big/\left[h^{2m+1}\left|\int_0^1\frac{(-1)^m t^{(m+1)}}{\pi m!}dt\right|^2\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2m}\left|\int_0^1\frac{t^m}{(t-1/2)+i\,1/2\,ctg\,x}dt\right|^2dx\right]\right\}=1.$$

Кроме того, на основании доказанных далее фактов можно получить неравенство

$$\left|O_m\left(h^{2m+1}\right)\right|\leq Ch^{2m+1}.$$

В дальнейшем будем использовать следующее обозначение для факториальных многочленов:

$$x^{(\gamma)}=x(x-1)\dots(x-\gamma+1)\,;\gamma\text{ - целое.}$$

§ 1. Функционал погрешности $\ell_m(x)$

Прежде чем построить ф.п. $\ell_m(x)$ с носителем на отрезке $[0,1]$, рассмотрим множество узлов $\{kh|\ k=0,1,\dots,N\}$, где $N=1/h$ - целое, h - шаг сетки. Определим ф.п. $\ell_m(x)$ следующим образом:

$$\ell_m(x)=\sum_{\gamma=0}^{m-1}\ell^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)+\sum_{\gamma=m}^{N-m-1}\ell^{(m)}\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)+\sum_{\gamma=N-m}^{N-1}\ell^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h}-\gamma\right),$$

здесь m - натуральное число, выбранное так, чтобы левый и правый пограничные слои не пересекались, т.е. при $4mh\leq 1$.

Локальные ф.п. $\ell^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)$ будем строить по-разному для левого и правого краев.

Обозначим через $i(x)$ индикатор отрезка $[0,1]$. Тогда:

если $\gamma=\overline{0,m}$, то $$\ell^{(\gamma)}(x)=i(x)-\sum_{\alpha=0}^{m+\gamma}c_\alpha^\gamma\,\delta(x-\alpha+\gamma);$$

если $\gamma'=\overline{N-m,N-1}$, γ - целое, и $\gamma+\gamma'=N$, то

$$\ell^{(\gamma')}(x)=i(x)-\sum_{\alpha=0}^{m+\gamma}{'c_\alpha^\gamma}\,\delta(x+\alpha-\gamma).$$

Во втором случае удобно переобозначить

$$'\ell^{(\gamma)}(x)=\ell^{(\gamma')}(x).$$

Коэффициенты C_α^γ и ${}'C_\alpha^\gamma$ будем определять из условий:

$$\gamma=\overline{0,m},\ \left(\ell^{(\gamma)}(x),x^\alpha\right)=\left({}'\ell^{(\gamma)}(x),x^\alpha\right)=0,\ \alpha=\overline{0,m+\gamma}. \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что при фиксированном γ единственным решением системы линейных уравнений, соответствующей номеру γ, являются векторы

$$\left\{C_\alpha^\gamma\right\}_{\alpha=0}^{m+\gamma} \qquad \text{или} \quad \left\{{}'C_\alpha^\gamma\right\}_{\alpha=0}^{m+\gamma}$$

со следующими компонентами:

$$\gamma=\overline{0,m},\quad C_\alpha^\gamma=(-1)^{m+\gamma-\alpha}\int_0^1\frac{(t+\gamma)^{(m+\gamma+1)}}{(t+\gamma-\alpha)\,\alpha!\,(m+\gamma-\alpha)!}\,dt,$$

$$\gamma=\overline{1,m},\quad {}'C_\alpha^\gamma=(-1)^\alpha\int_0^1\frac{(t+m)^{(m+\gamma+1)}}{(t-\gamma+\alpha)(m+\gamma-\alpha)!\,\alpha!}\,dt. \tag{2}$$

Тем самым $\ell_m(x)$ определен полностью, и для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ имеем:

$$\left(\ell_m(x),\varphi(x)\right)=\int_0^1\varphi(x)dx-\left[\sum_{\gamma=0}^{m-1}\left(\sum_{\alpha=0}^{m+\gamma}C_\alpha^\gamma h\varphi(\alpha h)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\gamma=0}^{N-2m-1}\left(\sum_{\alpha=0}^{2m}C_\alpha^m h\varphi\big((\alpha+\gamma)h\big)\right)+\sum_{\gamma=1}^{m}\left(\sum_{\alpha=0}^{m+\gamma}{}'C_\alpha^\gamma h\varphi\big((N-\alpha)h\big)\right)\right]. \tag{3}$$

Из (1) и (3) следует, что

$$\left(\ell_m(x),x^\alpha\right)=0 \qquad \text{при } \alpha=\overline{0,m},$$

поэтому $\ell_m(x)\in L_2^{-(m+1)}[0,1]$.

§ 2. Асимптотика значений ф.п. ℓ_m на базисе Фурье

Равенство (3) определяет глобальный ф.п. $\ell_m(x)$, и если обозначить через C_α его коэффициент в узле αh, то при целом $\beta\neq 0$ получаем:

$$L_\beta^m=\left(\ell_m,e^{-i2\pi\beta x}\right)=\int_0^1 e^{-i2\pi\beta x}dx-\sum_{\alpha=0}^{N}C_\alpha e^{-i2\pi\beta\alpha h}=-\sum_{\alpha=0}^{N}C_\alpha e^{-i2\pi\beta\alpha h}.$$

Из этой формулы очевидно следует, что

1) L_β^m периодично по β с периодом $1/h$;

2) если $N/2\leq\beta<N$ и $\beta'+\beta=N$, то $\quad L_\beta^m=\overline{L_{\beta'}^m}$; (4)

3) $L_\beta^m = 1$ при $\beta = \kappa N$, κ - целое, $\kappa \neq 0$.

Учитывая первые два утверждения, будем считать далее, что $0<\beta\leq N/2$, и искать оценки для L_β^m только для этих β. Из (3) следует:

$$L_\beta^m = -\Big[\sum_{\gamma=0}^{m-1}\Big(\sum_{\alpha=0}^{m+\gamma} c_\alpha^\gamma \cdot h e^{-i2\pi\beta\alpha h}\Big) + \Big(\sum_{\alpha=0}^{2m} c_\alpha^m h e^{-i2\pi\beta\alpha h}\Big)\times$$

$$\times\Big(\sum_{\gamma=0}^{N-2m-1} e^{-i2\pi\beta\gamma h}\Big) + \sum_{\gamma=1}^{m}\Big(\sum_{\alpha=0}^{m+\gamma} {}'c_\alpha^\gamma h e^{-i2\pi\beta(N-\alpha)h}\Big). \qquad (5)$$

Для дальнейших вычислений используем представление (5) и явные формулы (2) для c_α^γ и ${}'c_\alpha^\gamma$. Далее, при необходимости, без особых оговорок будем вводить нужные для сокращения записи обозначения.

Пусть $x=2\pi\beta h$. Тогда, по условию, $x\in(0,\pi]$. Далее имеем:

$$S_\gamma(x) = \sum_{\alpha=0}^{m+\gamma} c_\alpha^\gamma h e^{-ix\alpha} = h(-1)^{m+\gamma}\int_0^1 \frac{(t+\gamma)^{(m+\gamma+1)}}{(m+\gamma)!}\varphi_t^\gamma(x)\,dt,$$

где $$\varphi_t^\gamma(x) = \sum_{\alpha=0}^{m+\gamma}(-1)^\alpha\binom{m+\gamma}{\alpha}\frac{1}{t+\gamma-\alpha}e^{-ix\alpha}.$$

Функцию $\varphi_t^\gamma(x)$ разложим на два слагаемых, используя тот факт, что

$$D_x\varphi_t^\gamma(x) = i\big(1-e^{-ix}\big)^{m+\gamma} - i(t+\gamma)\varphi_t^\gamma(x).$$

Решая последнее как обыкновенное дифференциальное уравнение, получаем:

$$\varphi_t^\gamma(x) = e^{-i(t+\gamma)x}\varphi_t^\gamma(0) + i\int_0^x e^{-i(t+\gamma)(x-\tau)}\big(1-e^{-i\tau}\big)^{m+\gamma}d\tau =$$

$$= e^{-i(t+\gamma)x}\varphi_t^\gamma(0) + \psi_t^\gamma(x).$$

Имеем далее:

$$S_\gamma(x) = h(-1)^{m+\gamma}\int_0^1\frac{(t+\gamma)^{(m+\gamma+1)}}{(m+\gamma)!}\varphi_t^\gamma(0)e^{-i(t+\gamma)x}dt +$$

$$+ h(-1)^{m+\gamma}\int_0^1\frac{(t+\gamma)^{(m+\gamma+1)}}{(m+\gamma)!}\psi_t^\gamma(x)\,dt = A_\gamma(x)h + B_\gamma(x)h.$$

Аналогичным образом получаем соответствующие формулы для $S'_\gamma(x)$:

$$S'_\gamma(x) = \sum_{\alpha=0}^{m+\gamma}{}'c_\alpha^\gamma h e^{ix\alpha} = h\int_0^1\frac{(t+m)^{(m+\gamma+1)}}{(m+\gamma)!}\,{}'\varphi_t^{(\gamma)}(x)\,dt,$$

где $${}'\varphi_t^\gamma(x) = \sum_{\alpha=0}^{m+\gamma}(-1)^\alpha\binom{m+\gamma}{\alpha}\frac{1}{t-\gamma+\alpha}e^{ix\alpha}.$$

Так как при этом

$$D_x{}'\varphi_t^{\gamma}(x) = i\left(1-e^{ix}\right)^{m+\gamma} + i(\gamma-t)'\varphi_t^{\gamma}(x),$$

то

$$'\varphi_t^{\gamma}(x) = {}'\varphi_t^{\gamma}(0)e^{i(\gamma-t)x} + i\int_0^x e^{i(\gamma-t)(x-\tau)}\left(1-e^{i\tau}\right)^{m+\gamma}d\tau =$$

$$= {}'\varphi_t^{\gamma}(0)e^{i(\gamma-t)x} + {}'\psi_t^{(\gamma)}(x).$$

Поэтому

$$S_\gamma'(x) = h\int_0^1 \frac{(t+m)^{(m+\gamma+1)}}{(m+\gamma)!}\,'\varphi_t^{\gamma}(0)e^{i(\gamma-t)x}dt +$$

$$+ h\int_0^1 \frac{(t+m)^{(m+\gamma+1)}}{(m+\gamma)!}\,'\psi_t^{\gamma}(x)dt = A_\gamma'(x)h + B_\gamma'(x)h.$$

Далее, имея в виду полученные разложения, из (5) заключаем:

$$L_p^m = -h\left[\sum_{\gamma=0}^{m-1} A_\gamma + \sum_{\gamma=0}^{N-2m-1} A_m e^{-ix\gamma} + \sum_{\gamma=1}^{m} A_\gamma'\right] -$$

$$-h\left[\sum_{\gamma=0}^{m-1} B_\gamma + B_m\sum_{\gamma=0}^{N-2m-1} e^{-ix\gamma} + \sum_{\gamma=1}^{m} B_\gamma'\right]. \qquad (6)$$

Дальнейшие рассуждения достаточно провести для второго слагаемого в (6). Чтобы это показать, нам потребуется

Лемма 1. *Первое слагаемое в* (6) *есть тождественный нуль по* $x\in(0,\pi]$.

Доказательство. Согласно обозначению, имеем:

$$\sum_{\gamma=0}^{m-1} A_\gamma = \sum_{\gamma=0}^{m-1}\int_0^1 e^{-i(t+\gamma)x}(-1)^{\gamma+m}\frac{(t+\gamma)^{(m+\gamma+1)}}{(m+\gamma)!}\varphi_t^{\gamma}(0)dt.$$

Но

$$\varphi_t^{\gamma}(0) = \sum_{\alpha=0}^{m+\gamma}(-1)^{\alpha}\binom{m+\gamma}{\alpha}\frac{1}{t+\gamma-\alpha},$$

поэтому

$$(-1)^{\gamma+m}\frac{(t+\gamma)^{(m+\gamma+1)}}{(m+\gamma)!}\varphi_t^{\gamma}(0) = \sum_{\alpha=0}^{m+\gamma}(-1)^{m+\gamma+\alpha}\frac{(t+\gamma)^{(m+\gamma+1)}}{(m+\gamma-\alpha)!\,\alpha!\,(t+\gamma-\alpha)} = 1,$$

что следует из интерполяционных формул Лагранжа для полиномов степени $\leq m+\gamma$.

Поэтому

$$\sum_{\gamma=0}^{m-1} A_\gamma = \sum_{\gamma=0}^{m-1}\int_0^1 e^{-i(t+\gamma)x}dt = \frac{1}{ix}\left[1-e^{-imx}\right].$$

Из аналогичных соображений получаем

$$\sum_{\gamma=0}^{N-2m-1} A_m e^{-ix\gamma} = \frac{1}{ix}\left[e^{-imx} - e^{imx}\right];$$

$$\sum_{\gamma=1}^{m} A'_\gamma = -\frac{1}{ix}\left[1 - e^{imx}\right].$$

Лемма доказана.

Для оценки второго слагаемого в формуле (6) рассмотрим функцию $\psi_t^0(x)$. Прежде всего получим нужное для дальнейших рассуждений представление этой функции. Согласно обозначению, имеем

$$\psi_t^0(x) = (-i)\int_0^x e^{-it(x-\tau)}\left(1-e^{-i\tau}\right)^m d\tau.$$

Разлагаем $exp\{-it(x-\tau)\}$ в равномерно по τ сходящийся ряд и получаем

$$\psi_t^0(x) = (-i)\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-i)^\kappa}{\kappa!}t^\kappa\int_0^x (x-\tau)^\kappa\left(1-e^{-i\tau}\right)^m d\tau.$$

Полагаем

$$\psi_\kappa(x) = (-i)^{\kappa+1}\frac{1}{\kappa!}\int_0^x (x-\tau)^\kappa\left(1-e^{-i\tau}\right)^m d\tau.$$

Легко видеть, что

$$D_x\psi_{\kappa+1}(x) = (-i)\psi_\kappa(x); \quad \psi_{\kappa+1}(0) = 0.$$

Отсюда

$$\psi_{\kappa+1}(x) = (-i)\int_0^x \psi_\kappa(\tau)d\tau.$$

Тем самым получено представление:

$$\psi_t^0(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} t^\kappa\psi_\kappa(x) \quad \text{при } x\in(0,\pi],$$

где

$$\psi_{\kappa+1}(x) = (-i)\int_0^x \psi_\kappa(\tau)d\tau,$$
$$\psi_0(x) = (-i)\int_0^x \left(1-e^{-i\tau}\right)^m d\tau. \tag{7}$$

Теперь сформулируем лемму о функции $\psi_0(x)$.

Лемма 2. *Справедливы оценки:*

$$x\in(0,\pi/2],\quad K_1\frac{2^m}{m}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^m tg\, x/2 \le |\psi_0(x)| \le K_2\frac{2^m}{m}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^m tg\, x/2,$$

$$x\in[\pi/2,\pi),\quad K_1\frac{2^m}{m}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^m \le |\psi_0(x)| \le K_2\frac{2^m}{m}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^m,$$

где K_1, K_2 не зависят от m, x.

Доказательство этой леммы удобно разбить на ряд этапов.

Прежде всего, заметим, что при $x\in(0,\pi)$ для $\psi_0(x)$ справедливо:

$$\psi_0(x) = (2i)^m \left(\sin\frac{x}{2}\right)^m e^{-i\frac{x}{2}m} \int_0^1 \frac{t^m}{(t-1/2)+i\,1/2\,\mathrm{ctg}\,x/2}\,dt. \qquad (8)$$

В самом деле, по определению, имеем

$$\psi_0(x) = (-i)\int_0^x (1-e^{-i\tau})^m\,d\tau.$$

Используя тождество

$$(1-e^{-i\tau})^m = 1 - \sum_{\alpha=0}^{m-1} e^{-i\tau}\left(1-e^{-i\tau}\right)^{\alpha}$$

и учитывая, что

$$e^{-i\tau}\left(1-e^{-i\tau}\right)^{\alpha} = D_\tau\left(1-e^{-i\tau}\right)^{\alpha+1}\frac{(-i)}{\alpha+1},$$

получаем далее

$$\psi_0(x) = (-i)\left[x + \sum_{\alpha=0}^{m-1}\frac{i}{\alpha+1}\left(1-e^{-ix}\right)^{\alpha+1}\right] =$$

$$= (-ix) + \left(1-e^{-ix}\right)\int_0^1 \frac{1}{1-(1-e^{-ix})t}\,dt + \left(1-e^{-ix}\right)^m \int_0^1 \frac{t^m}{t-z(x)}\,dt,$$

где $z(x) = \left(1-e^{-ix}\right)^{-1} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}$.

Сосчитаем:

$$\left(1-e^{-ix}\right)\int_0^1 \frac{1}{1-(1-e^{-ix})t}\,dt = -\int_0^1 \frac{1}{t-z(x)}\,dt = \ln\left(e^{-ix}\right) = ix,$$

здесь $\ln$ - главная ветвь логарифма. Последнее равенство справедливо, так как, по условию, $0 < x \leqslant \pi$. Окончательно получаем:

$$\psi_0(x) = \left(1-e^{-ix}\right)^m \int_0^1 \frac{t^m}{(t-1/2)+i\,1/2\,\mathrm{ctg}\,x/2}\,dt =$$

$$= (2i)^m\left(\sin\frac{x}{2}\right)^m e^{-i\frac{x}{2}m}\int_0^1 \frac{t^m}{(t-1/2)+i\,1/2\,\mathrm{ctg}\,x/2}\,dt,$$

что и требовалось.

Введем в рассмотрение функцию

$$u_m(z) = \int_0^1 \frac{t^m}{t-z}\,dt \qquad \text{при } z = z(x) = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}.$$

Получим оценки $|u_m(z)|$ сверху и снизу. Сначала заметим, что при $x \in (0, \pi/2]$

справедливо:

$$K_1 \frac{1}{m} tg\frac{x}{2} \le |u_m(z(x))| \le K_2 \frac{1}{m} tg\frac{x}{2}, \tag{9}$$

где K_1, K_2 не зависят от m, x.

В самом деле, имеем

$$|u_m(z(x))| \le \int_0^1 \frac{t^m}{|t-z|}\,dt \le K_2 \frac{1}{m} tg\frac{x}{2},$$

так как

$$|t-z| = \sqrt{(t-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} ctg^2\frac{x}{2}} \ge \frac{1}{2} ctg\frac{x}{2}.$$

Теперь получим оценку снизу

$$\left|\int_0^1 \frac{t^m}{t-z}\,dt\right|^2 = \left|\int_0^1 \frac{t^m(t-\frac{1}{2})}{(t-1/2)^2 + 1/4\, ctg^2\frac{x}{2}}dt\right|^2 + \left|\int_0^1 \frac{t^m \frac{1}{2} ctg\frac{x}{2}}{(t-1/2)^2 + 1/4\, ctg^2\frac{x}{2}}dt\right|^2.$$

Отсюда

$$|u_m(z)| \ge \left|\int_0^1 \frac{t^m \frac{1}{2} ctg\frac{x}{2}}{(t-1/2)^2 + 1/4\, ctg^2\frac{x}{2}}dt\right| \ge K_1 \frac{1}{m} tg\frac{x}{2},$$

так как $(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} ctg^2\frac{x}{2} \le \frac{1}{4} ctg^2\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \le \frac{1}{2} ctg^2\frac{x}{2}$

при $0 < x/2 \le \pi/4$. Тем самым (9) доказано.

Для дальнейших рассмотрений нам понадобятся два вспомогательных утверждения:

1. *Существует $M \ge 0$ такое, что при $m > M$, m - целое, выполнено:*

$$\left|\frac{1}{2^m}\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{2^\alpha}{\alpha}\right| \le K\frac{1}{m}. \tag{10}$$

В самом деле, если $\varphi(\alpha) = \dfrac{2^\alpha}{\alpha}$, то

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\alpha+1)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \le \frac{3}{4}$$ при $\alpha \ge 2$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{2^m}\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{2^\alpha}{\alpha}\right| < \frac{\varphi(m)}{2^m}\left|\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(m)}\right| \le$$

$$< \frac{1}{m}\left[\frac{\varphi(1)}{\varphi(m)} + \sum_{\alpha=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^\alpha\right] \le K\frac{1}{m},$$

что и требовалось.

2. При $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ справедливо

$$|I_1(x)| = \left| \int_0^1 \frac{t^m \, 1/2 \, ctg \, x/2}{(t-1/2)^2 + 1/4 \, ctg^2 \, x/2} \, dt \right| \leq C \frac{1}{m}, \tag{11}$$

где C не зависит от m, x.

Докажем (11). Разложим $I_1(x)$ на два слагаемых:

$$I_1(x) = I_1'(x) + I_2'(x) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\left[t^m - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right] ctg \frac{x}{2} \, \frac{1}{2}}{(t-1/2)^2 + 1/4 \, ctg^2 \, x/2} \, dt + \left(\frac{1}{2}\right)^m \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} ctg \frac{x}{2}}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} ctg^2 \frac{x}{2}} \, dt.$$

Оценим по отдельности $|I_1'(x)|$ и $|I_2'(x)|$. Имеем

$$I_1'(x) = \frac{1}{2} ctg \frac{x}{2} \int_0^{1/2} \frac{t^m + (1-t)^m - 2\left(\frac{1}{2}\right)^m}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} ctg^2 \frac{x}{2}} \, dt.$$

Чтобы получить последнее, надо в определении $I_1'(x)$ разложить $\int_0^1$ на сумму $\int_0^{1/2}$ и $\int_{1/2}^1$ и во втором интеграле сделать замену $t = 1 - t'$. Далее,

$$I_1'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} ctg \frac{x}{2} \int_0^{1/2-\varepsilon} \frac{t^m + (1-t)^m - 2\left(\frac{1}{2}\right)^m}{(t-1/2)^2 + 1/4 \, ctg^2 \frac{x}{2}} dt.$$

При $\varepsilon > 0, t \in \left[0, \frac{1}{2} - \varepsilon\right]$ выполняются неравенства:

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} ctg^2 \frac{x}{2} \geq 2\left(\frac{1}{2} - t\right) \frac{1}{2} \, ctg \, \frac{x}{2} > 0,$$

$$t^m + (1-t)^m - 2\left(\frac{1}{2}\right)^m \geq 0.$$

Поэтому

$$|I_1'(x)| \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \int_0^{1/2-\varepsilon} \frac{t^m + (1-t)^m - 2\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1/2 - t} \, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \sum_{\alpha=0}^{m-1} (1-t)^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1-\alpha} dt - \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \sum_{\alpha=0}^{m-1} t^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1-\alpha} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}\right] - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1-\alpha} \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{2^m} \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{1}{\alpha+1}.$$

Теперь из (10) получаем

$$|I_1'(x)| \leq C \left| \frac{1}{2^m} \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{2^\alpha}{\alpha} \right| + \frac{C}{2^m} \ln m \leq C \frac{1}{m}.$$

Функция $I_2'(x)$ допускает простое представление:

$$\int_0^1 \frac{1}{(t-1/2)^2 + \frac{1}{4} ctg^2 \frac{x}{2}}\, dt = \frac{2x}{ctg \frac{x}{2}}; \quad I_2'(x) - x\left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Отсюда $\quad |I_2'(x)| \leq K \left(\frac{1}{2}\right)^m.$

Таким образом, (11) доказано. Для окончания доказательства леммы 2 осталось отметить, что при $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ справедливо:

$$0 < K_1 \frac{1}{m} \leq |u_m(z(x))| \leq K_2 \frac{1}{m}, \tag{12}$$

где K_1, K_2 не зависят от m, x.

Докажем этот факт. По определению, имеем

$$u_m(z) = \int_0^1 \frac{t^m (t-\frac{1}{2})}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} ctg^2 \frac{x}{2}}\, dt + i \int_0^1 \frac{t^m \frac{1}{2} ctg \frac{x}{2}}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} ctg^2 \frac{x}{2}}\, dt.$$

Отсюда

$$|u_m(z)|^2 = \left| \int_0^1 \frac{t^m (t-\frac{1}{2})}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} ctg^2 \frac{x}{2}}\, dt \right|^2 + \left| \int_0^1 \frac{t^m \frac{1}{2} ctg \frac{x}{2}}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} ctg^2 \frac{x}{2}}\, dt \right|^2.$$

Исследуем сначала поведение $|Re\, u_m(z(x))|$ в зависимости от $x \in [\pi/2, \pi)$. Имеем

$$|Re\, u_m(z)| = \left| \int_0^{1/2} \frac{\left[(1-t)^m - t^m\right](\frac{1}{2}-t)}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} ctg^2 \frac{x}{2}}\, dt \right|.$$

При $1/2 \geq t \geq 0$ подынтегральная функция ≥ 0, откуда ясно, что если $0 < x_1 \leq \leq x_2 \leq \pi$, то $|Re\, u_m(z(x_1))| \leq |Re\, u_m(z(x_2))|$. Поэтому если $x \in [\pi/2, \pi)$, то $|Re\, u_m(z(\pi/2))| \leq |Re\, u_m(z)| \leq |Re\, u_m(z(\pi))|$. Отсюда сразу получаем оценку снизу для $|u_m(z)|$:

$$|u_m(z)| \geq |Re\, u_m(z(\pi/2))| = \int_0^{1/2} \frac{\left[(1-t)^m - t^m\right](1/2 - t)}{(t-1/2)^2 + 1/4}\, dt \geq$$

$$\geq \int_0^{1/4} \frac{\left[(1-t)^m - t^m\right](\frac{1}{2}-t)}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}\, dt \geq \int_0^{1/4} \frac{\left[(1-t)^m - t^m\right]\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\, dt \geq C\frac{1}{m}.$$

Теперь получим оценку сверху для $|u_m(z)|$. Неравенство (11) означает, что $|\Im m\, u_m(z)| \leq C\frac{1}{m}$.

Кроме того,

$$|Re\,u_m(z)| \leq |Re\,u_m(z(\pi))| = \lim_{x\to\pi} |Re\,u_m(z(x))|,$$

и достаточно подсчитать последний предел. Имеем:

$$\int_0^1 \frac{t^m}{t-z(x)}dt = \int_0^1 \frac{t^m-(\frac{1}{2})^m}{t-z(x)}dt + \left(\frac{1}{2}\right)^m \int_0^1 \frac{1}{t-z}dt -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^m(-ix) + \int_0^1 \frac{(t-\frac{1}{2})\sum_{\alpha=0}^{m-1} t^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1-\alpha}}{(t-1/2)+i\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}dt;$$

$$\lim_{x\to\pi} u_m(z(x)) = \left(\frac{1}{2}\right)(-i\pi) + \sum_{\alpha=0}^{m-1}\int_0^1 t^m dt \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1-\alpha} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^m(-i\pi) + \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{\alpha=1}^{m} 2^\alpha/\alpha.$$

Отсюда $|u_m(z(\pi))| \leq C\frac{1}{m}$ (здесь использовалось неравенство (10)).

Лемма 2 теперь очевидно следует из (8),(9),(12).

Цель дальнейших рассуждений состоит в получении асимптотики функции $\psi_t^0(x)$. Используем вспомогательный факт: при $0<x<\pi$ справедливо

$$\int_0^x \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^m d\tau < C\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{m+1}. \tag{13}$$

Докажем (13). Обозначим

$$f(x) = \left[\int_0^x \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^m d\tau\right] \Big/ \left(\sin\frac{x}{2}\right)^{m+1} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\int_0^x \left(\frac{\sin\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^m d\tau.$$

Делаем замену $t = \dfrac{\sin \tau/2}{\sin x/2}$ и получаем

$$f(x) = 2\int_0^1 \left(t^m \Big/ \sqrt{1-t^2\sin^2\frac{x}{2}}\right)dt.$$

Из этой формулы ясно, что $f(x)$ монотонно возрастает по x при $x\in(0,\pi]$. Поэтому

$$\sup_{0<x\leq\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} f(x) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\tau)^m d\tau.$$

Последний интеграл считается явно с помощью замены $\sin^2\tau = u$:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin\tau)^m d\tau = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(m-1/2+1)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(m/2+1)} \sim C\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Последнее равенство следует из формулы Стирлинга. Окончательно имеем:

$$\sup_{0<x\leqslant\pi} f(x) \sim C\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Тем самым (13) доказано. Теперь докажем лемму об асимптотике $\psi_t^0(x)$ при $m\to\infty$.

Лемма 3. *Пусть $m\geqslant M>0$, m- целое, M достаточно большое. Тогда*

$$\left|\frac{\psi_t^0(x)}{\psi_0(x)}-1\right|\leqslant\frac{C}{\sqrt{m}} \text{ при } x\in(0,\pi],$$

где C не зависит от m, x.

Доказательство. Согласно (7), имеем

$$\psi_t^0(x)=\sum_{k=0}^{\infty} t^k\psi_k(x);\qquad \psi_k(x)=(-i)\int_0^x\psi_{k-1}(\tau)d\tau.$$

Используя эти соотношения и лемму 2, получаем для $|\psi_k(x)|$ систему оценок сверху. Пусть $x\in[\pi/2,\pi]$. Тогда, по лемме 2, имеем

$$|\psi_0(x)|\leqslant C2^m(\sin x/2)^m\frac{1}{m},$$

поэтому

$$|\psi_1(x)|\leqslant\int_0^x|\psi_0(\tau)|d\tau\leqslant C\frac{2^m}{m}\int_0^x(\sin\tau/2)^m d\tau\leqslant C\frac{2^m}{m^{3/2}}(\sin x/2)^{m+1}.$$

Последнее неравенство следует из (13). Далее индукцией получаем

$$|\psi_{k+1}(x)|\leqslant\int_0^x|\psi_k(\tau)|d\tau\leqslant C^k2^m\frac{1}{m}(\sin x/2)^{m+k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^{k+1}.$$

Используя оценки снизу для $|\psi_0(x)|$, имеем:

$$\left|\frac{\psi_k(x)}{\psi_0(x)}\right|\leqslant C\left(\frac{C}{\sqrt{m}}\right)^k(\sin x/2)^k;$$

$$\left|\frac{\psi_t^0(x)}{\psi_0(x)}-1\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}t^k\frac{\psi_k(x)}{\psi_0(x)}\right|\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{tC}{\sqrt{m}}\right)^k\leqslant\frac{C}{\sqrt{m}}.$$

(Последнее неравенство справедливо при достаточно больших m, так как $t\in[0,1]$.) В случае, если $0<x\leqslant\pi/2$, достаточно использовать соответствующие оценки $|\psi_0(x)|$, чтобы дословно повторить доказательство. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $x\in(0,\pi]$. Тогда $\psi_t^0(x)=\psi_0(x)(1+E_m(x,t))$, где $|E_m(x,t)|\leqslant C/\sqrt{m}$; $x\in(0,\pi]$; $t\in[0,1]$, C не зависит от m,x.*

Здесь

$$\psi_0(x) = (2i)^m \left(\sin x/2\right)^m e^{-i\frac{m}{2}x} \int\limits_0^1 \frac{t^m}{(t-1/2)+i\,1/2\,\mathrm{ctg}\,x/2}\,dt,$$

в частности, это справедливо, когда $x=2\pi\beta h$, β - целое, $0<\beta\leqslant N/2$.

Этих фактов вполне достаточно, чтобы получить асимптотику второго слагаемого в формуле (6). Отметим, что при $x\in(0,\pi]$ справедливы оценки:

$$\begin{gathered}
|B_\gamma(x)|\leqslant C\frac{1}{m^{3/2}}|B_0(x)|,\ \gamma=\overline{2,m-1};\ \ |B_1(x)|\leqslant\frac{C}{\sqrt{m}}|B_0(x)|;\\
|B_\gamma'(x)|\leqslant C\frac{1}{m^{3/2}}|B_0(x)|;\ \gamma=\overline{2,m};\ \ |B_1'(x)|\leqslant\frac{C}{\sqrt{m}}|B_0(x)|;\\
|B_m(x)|\leqslant C\frac{m^2}{2^m}\left(\sin x/2\right)^{m-1}|B_0(x)|.
\end{gathered}\tag{14}$$

Докажем этот факт. Согласно обозначению, имеем

$$B_0(x) = (-1)^m\int\limits_0^1 \left(t^{(m+1)}/m!\right)\psi_t^0(x)\,dt.$$

Используя следствие 1, получаем

$$B_0(x) = (-1)^m\int\limits_0^1 \frac{t^{(m+1)}}{m!}\,\psi_0(x)\,dt\left[1+E(m,x)\right].$$

Так как

$$\left|\int\limits_0^1 \frac{t^{(m+1)}}{m!}E_m(x,t)\,dt\right|\leqslant(-1)^m\int\limits_0^1\frac{t^{(m+1)}}{m!}\,dt\cdot\frac{C}{\sqrt{m}},$$

то

$$|E(m,x)|\leqslant\frac{C}{\sqrt{m}}\longrightarrow 0\qquad \text{при } m\longrightarrow\infty.$$

Таким образом, имеем

$$|B_0(x)|\geqslant q\int\limits_0^1(-1)^m\frac{t^{(m+1)}}{m!}\,dt\,|\psi_0(x)|>0.$$

Пусть теперь $\gamma\geqslant 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
|B_\gamma(x)| &= \left|\int\limits_0^1\frac{(t+\gamma)^{(m+\gamma+1)}}{(m+\gamma)!}\,\psi_t^\gamma(x)\,dt\right|\leqslant\\
&\leqslant C2^{m+\gamma}\frac{1}{\sqrt{m+\gamma}}\left(\sin x/2\right)^{m+\gamma}\int\limits_0^1\frac{(-1)^m(t+\gamma)^{(m+\gamma+1)}}{(m+\gamma)!}\,dt.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку

$$|\psi_t^\gamma(x)|\leqslant 2^{m+\gamma}\int\limits_0^x\left(\sin\tau/2\right)^{m+\gamma}d\tau\leqslant 2^{m+\gamma}\frac{C}{\sqrt{m+\gamma}}\left(\sin x/2\right)^{m+\gamma}.$$

Используя оценку снизу для $|B_0(x)|$ и оценки снизу для $|\psi_0(x)|$ из леммы 2, получаем

$$|B_\gamma(x)| \leq C\left(\sin x/2\right)^{\gamma-1} K_\gamma(m)\,|B_0(x)|,$$

где $K_\gamma(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{(t+\gamma)^{(m+\gamma+1)}(-1)^m}{(m+\gamma)!}\,dt\; 2^\gamma \frac{m}{\sqrt{m+\gamma}} \leq K_\gamma(m)\int_0^1 \frac{(-1)^m t^{(m+1)}}{m!}\,dt. \tag{15}$$

Ясно, что можно положить

$$K_\gamma(m) = 2^\gamma \frac{m}{\sqrt{m+\gamma}}\;\frac{m!\,(\gamma+1)!}{(m+\gamma)!}.$$

Отсюда получаем:

$$K_1(m) \sim C\frac{1}{\sqrt{m}};\quad K_2(m) \sim C\frac{1}{m^{3/2}};\quad K_m(m) \sim C\frac{m^2}{2^m};$$

$$K_{m-1}(m) \sim C\frac{m^3}{2^m} \leq C\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{1}{m}.$$

Кроме того, при $2\leq\gamma\leq m-2$ имеем $K_\gamma(m)\leq K_{\gamma-1}(m)$. В самом деле, это неравенство выполнено, если $2(\gamma+1)\leq m+\gamma$, что при $\gamma>0$ равносильно условию $2\leq\gamma\leq m-2$. Поэтому при $2\leq\gamma\leq m-2$ справедливо $K_\gamma(m)\leq K_2(m)=C\frac{1}{m^{3/2}}$. Полученные оценки для $K_\gamma(m)$ и оценки (15) делают очевидной справедливость первой группы оценок (14). Вторая группа оценок (14) доказывается аналогично. Чтобы это показать, достаточно отметить, что

$$|\psi_t^\gamma(x)| \leq 2^{m+\gamma}\frac{C}{\sqrt{m+\gamma}}\left(\sin x/2\right)^{m+\gamma} \quad \text{при} \quad \gamma=\overline{1,m}.$$

Наконец, последняя оценка в (14) следует из (15) и оценки для $K_m(m)$.

Оценки (14) позволяют доказать окончательное утверждение об асимптотике чисел L_β^m при $m\to\infty$.

Теорема 1. *Пусть* β *- целое,* $\beta\neq kN$ *, где* k *- целое,* $N=1/h$ *. Тогда:*

$$\left|\left(\ell_m(x), e^{-i2\pi\beta x}\right)\right| = h\,2^m\left(\sin\pi\beta h\right)^m \times \left|\int_0^1 \frac{t^m}{(t-1/2)+i\,1/2\,\mathrm{ctg}\,\pi\beta h}\,dt\right| \times$$
$$\times\int_0^1 \frac{(-1)^m t^{(m+1)}}{m!}\,dt\left[1+L(m,\beta)\right],$$

где $|L(m,\beta)|\leq C/\sqrt{m}$, C *не зависит от* m,β,h.

Доказательство. Обозначим $x=2\pi\beta h$. Тогда из формул (6) при $0<x\leq\pi$ получаем

$$L_\beta^m = -hB_0(x)\left[1+D(x,m)\right],$$

где

$$D(x,m) = \left[\sum_{\gamma=1}^{m-1}\frac{B_\gamma(x)}{B_0(x)} + \sum_{\gamma=1}^{m}\frac{B'_\gamma(x)}{B_0(x)} + \frac{B_m(x)}{B_0(x)}\sum_{\gamma=0}^{N-2m-1} e^{-i2\pi\beta\gamma h}\right].$$

При достаточно больших m из (14) вытекает

$$|D(x,m)| \leq C/\sqrt{m}.$$

При доказательстве оценок (14) было получено:

$$B_0(x) = \psi_0(x)\int_0^1 (-1)^m t^{(m+1)}/m!\,dt\,[1+E(m,x)],$$

где $|E(m,x)| \leq C/\sqrt{m}$. Используя этот факт, имеем:

$$L_\beta^m = -h\psi_0(x)\int_0^1 (-1)^m t^{(m+1)}/m!\,dt\,[1+L(m,\beta)],$$

где $|L(m,\beta)| \leq C/\sqrt{m}$.

Используя (4) в случае произвольного $\beta \neq kN$ (k - целое, $k \neq 0$), теорему можно считать доказанной.

§ 3. Норма в $L_2^{-k}[0,1]$ функционала $\ell_m(x)$

Функционал $\ell_m(x)$ строился таким образом, что $\ell_m(x) \in L_2^{-(m+1)}[0,1]$. Ясно, что $\ell_m(x) \in L_2^{-k}[0,1]$ для любого $k \leq m+1$ (k - целое). В следующей лемме находится явное выражение $\| \ell_m | L_2^{-k}[0,1] \|$ через систему чисел L_β^m.

Лемма 4. *Справедливо* $\| \ell_m | L_2^{-k}[0,1] \|^2 = \sum\limits_{\beta \neq 0} \dfrac{|L_\beta^m|^2}{(2\pi\beta)^{2k}}$ $(k \leq m)$;

$$\| \ell_m | L_2^{-(m+1)}[0,1] \|^2 = \sum_{\beta \neq 0} \frac{|L_\beta^m|^2}{(2\pi\beta)^{2m}} + \frac{|(\ell_m, x^{m+1})|^2}{[(m+1)!]^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2^k[0,1]$ со скалярным произведением:

$$(\varphi,\psi)_k = \int_0^1 D^k\varphi\,\overline{D^k\psi}\,dx \qquad \forall \varphi,\psi \in L_2^k[0,1].$$

Так как ф.п. является непрерывным над $L_2^k[0,1]$, то, по теореме Рисса, существует функция $U_k(x) \in L_2^k[0,1]$ со свойством:

$$(\ell_m,\varphi) = (U_k,\varphi)_k \qquad \forall \varphi \in L_2^k[0,1]. \tag{16}$$

Эта функция $U_k(x)$ будет экстремальной для ф.п. $\ell_m(x)$ (см. [1]), т.е.

$$\| \ell_m | L_2^{-k}[0,1] \|^2 = (\ell_m, U_k) = \| U_k | L_2^k[0,1] \|^2.$$

Равенство (16) справедливо, в частности, для $\varphi(x) = e^{-i2\pi\beta x}$, откуда получаем коэффициенты Фурье функции $D^k U_k(x)$ при $\beta \neq 0$:

$$(i\,2\pi\beta)^k\,(D^k U_k, e^{-i2\pi\beta x})_0 = (\ell_m, e^{i2\pi\beta x}) = \overline{L}_\beta^m$$

или, поскольку $D^{\kappa}u_{\kappa} \in L_2[0,1]$,

$$\int_0^1 D^{\kappa}u_{\kappa}(x)e^{i2\pi\beta x}dx = \frac{\overline{L_\beta^m}}{(i2\pi\beta)^{\kappa}} \quad (\beta \neq 0).$$

Полагая в равенстве (16) $\varphi(x) = x^{\kappa}$, получаем недостающий коэффициент Фурье:

$$\int_0^1 D^{\kappa}u_{\kappa}(x)dx = \frac{(\ell_m, x^{\kappa})}{\kappa!} = C_{\kappa}(m).$$

Тем самым

$$D^{\kappa}u_{\kappa}(x) = C_{\kappa}(m) + \sum_{\beta\neq 0} \frac{\overline{L_\beta^m}}{(i2\pi\beta)^{\kappa}} e^{-i2\pi\beta x}.$$

Здесь равенство понимается в смысле $L_2[0,1]$. Ряд справа сходится равномерно, и его сумма $S(x)$ непрерывна. Если обозначить теперь через $V_{\kappa}(x)$ какое-нибудь решение уравнения $D^{\kappa}V_{\kappa}(x) = S(x)$, то получим $D^{\kappa}(u_{\kappa} - V_{\kappa}) = 0$, где равенство понимается в смысле $L_2[0,1]$, т.е. почти всюду на $[0,1]$. Известно, что единственным обобщенным решением этого уравнения является полином степени $\leqslant(\kappa-1)$. Таким образом, получили представление:

$$x \in [0,1],\ u_{\kappa}(x) = P_{\kappa-1}(x) + \frac{C_{\kappa}(m)}{\kappa!}x^{\kappa} + \sum_{\beta\neq 0}\frac{\overline{L_\beta^m}}{(2\pi\beta)^{2\kappa}} e^{-i2\pi\beta x}.$$

Окончательно

$$\|\ell_m | L_2^{-\kappa}\|^2 = (\ell_m, u_{\kappa}) = \frac{C_{\kappa}(m)}{\kappa!}(\ell_m, x^{\kappa}) + \sum_{\beta\neq 0}\frac{|L_\beta^m|^2}{(2\pi\beta)^{2\kappa}}.$$

При $\kappa \leqslant m$ первое слагаемое исчезает. Лемма доказана.

Следствие. *Если κ - целое, $\kappa \leqslant m+1$, то при $x \in [0,1]$ справедливо следующее представление экстремальной функции в $L_2^{\kappa}[0,1]$ ф.п. $\ell_m(x)$:*

$$u_{\kappa}(x) = \sum_{\beta\neq 0}\frac{\overline{L_\beta^m}}{(2\pi\beta)^{2\kappa}} e^{-i2\pi\beta x} + \frac{(\ell_m, x^{\kappa})}{(\kappa!)^2}x^{\kappa} + P_{\kappa-1}(x).$$

Введем в рассмотрение функцию непрерывного параметра $x \in R$ при целом κ:

$$\varphi_{\kappa}(x) = \frac{(\sin x)^{2m}}{x^{2\kappa}}\left|\int_0^1 \frac{t^m}{(t-1/2)+i\,1/2\,\mathrm{ctg}\,x}dt\right|^2.$$

Лемма 4 и теорема 1 позволяют получить при $\kappa \leqslant m$:

$$\left|\ell_m | L_2^{-\kappa}[0,1]\right|^2 = \left[\sum_{\beta\neq 0}\frac{1}{(2\pi\beta)^{2\kappa}}\right]h^{2\kappa} + h^{2\kappa+1}2^{2(m-\kappa)} \times \left|\int_0^1 \frac{(-1)^m t^{(m+1)}}{\pi\, m!}dt\right|^2 \times$$

$$\times\left[\sum_{\beta\neq 0}\varphi_{\kappa}(\pi\beta h)\pi h\right] \times \left[1 + {}'E_2(m,h)\right], \qquad (17)$$

где $|'E_2(m,h)| \leqslant C/\sqrt{m}$. Очевидно, если зафиксировать здесь $K \leqslant m$, то

$$\sum_{\beta \neq 0} \varphi_K(\pi\beta h)\pi h \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_K(x)dx \;; \quad h \to 0, \tag{18}$$

где предельная величина не зависит от h. Получим теперь более подробную информацию о скорости сходимости в (18) при $K = m$. Прежде всего отметим следующие соотношения:

$$\varphi_m(\pi(x+y)) = \psi_m(\pi x)\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2m} \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \text{ - целое.}$$

Используя их, можно получить:

$$|'E_1(m,h)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x)\,dx - \sum_{\beta \neq 0} \pi h \varphi_m(\pi\beta h)\right| =$$

$$= 2\left[\int_0^1 \varphi_m(\pi x)\left(\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2m}\right)dx - \sum_{\beta=1}^{N} \pi h \varphi_m(\pi\beta h)\left(\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\beta h}{\beta h+y}\right)^{2m}\right)\right].$$

Если ввести обозначение:

$$\Phi_m(\pi x) = \varphi_m(\pi x)\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2m} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

то получаем

$$|'E_1(m,h)| \leqslant 2\sum_{\beta=0}^{N-1} \int_{\beta\pi h}^{(\beta+1)\pi h} |\Phi_m(\pi x) - \Phi_m(\pi(\beta+1)h)|\,dx.$$

Для дальнейших оценок понадобится следующее неравенство:

$$|\Phi_m'(\pi x)| \leqslant \frac{C}{m}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^{2m}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{19}$$

которое вытекает из представления (см. (8)):

$$\Phi_m(\pi x) = \frac{|\psi_0(2\pi x)|^2}{2^{2m}(\pi x)^{2m}}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2m}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2,$$

где

$$\psi_0(x) = \int_0^x \left(1 - e^{-i\tau}\right)^m d\tau, \quad 0 < x \leqslant \pi.$$

Чтобы это показать, достаточно отметить, что

$$\left|D_x\, |\psi_0(2\pi x)|^2\right| \leqslant C\, 2^m (\sin \pi x)^m\, |\psi_0(2\pi x)|$$

и вспомнить лемму 2.

Используем далее (19) и получаем

$$|'E_1(m,h)| \leqslant \frac{C}{m} h \sum_{\beta=0}^{N-1}\left(\frac{\sin \pi\beta h}{\pi\beta h}\right)^{2m} \pi h \leqslant \frac{C}{m} h. \tag{20}$$

Далее, используя (9) и известное неравенство:

$$\frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{\pi - x}{\pi}\ , \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi ,$$

легко получить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x)dx = 2\int_0^1 \Phi_m(\pi x)dx \geqslant \frac{C}{m^3} > 0 . \tag{21}$$

Из (17), (20), (21) вытекает справедливость теоремы, формулировка которой приведена во введении.

Получим теперь аналогичное представление для $\| \ell_m | L_2^{-(m+1)}[0,1] \|$. Из леммы 4 и теоремы 1 имеем

$$\| \ell_m | L_2^{-(m+1)} \|^2 = \sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{(2\pi\beta)^{2(m+1)}} h^{2(m+1)} + h^{2m+3} \times \left| \int_0^1 \frac{(-1)^m t^{(m+1)}}{2\pi m!} dt \right|^2 \times$$

$$\times \left[\sum_{\beta\neq 0} \varphi_{m+1}(\pi\beta h)\pi h \right] \times \left[1 + {}'E_2(m,h) \right] + \left| (\ell_m, x^{m+1}) \right|^2 \Big/ [(m+1)!]^2 , \tag{22}$$

где $|{}'E_2(m,h)| \leqslant C/\sqrt{m}$. При этом если $h \to 0$, то

$$\sum_{\beta\neq 0} \varphi_{m+1}(\pi\beta h)\pi h \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m+1}(x)dx .$$

Последний интеграл существует, поскольку оценки (9) делают очевидным существование $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_{m+1}(x) = \varphi_{m+1}(0)$.

Получим теперь удобное представление для величины (ℓ_m, x^{m+1}). По определению $\ell_m(x)$, используя (3), (1), (2), имеем

$$(\ell_m, x^{m+1}) = \left(\ell_m^{(0)}(x/h), x^{m+1}\right) = \int_0^h x^{m+1}dx - \sum_{\alpha=0}^{m} C_\alpha^0 h(\alpha h)^{m+1} =$$

$$= \frac{h^{m+2}}{m+2} - \int_0^1 \frac{(-1)^m t^{(m+1)}}{m!} \sum_{\alpha=0}^{m} (-1)^\alpha \binom{m}{\alpha} \frac{\alpha^{m+1}}{t-\alpha} dt \cdot h^{m+2} . \tag{23}$$

Далее,

$$\sum_{\alpha=0}^{m} (-1)^\alpha \binom{m}{\alpha} \frac{\alpha^{m+1}}{t-\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{m} (-1)^\alpha \binom{m}{\alpha} \frac{t^{m+1}}{t-\alpha} - \sum_{\alpha=0}^{m} (-1)^\alpha \binom{m}{\alpha} \sum_{j=0}^{m} \alpha^{m-j} t^j .$$

При доказательстве леммы 1 было показано, что

$$\frac{(-1)^m t^{(m+1)}}{m!} \sum_{\alpha=0}^{m} (-1)^\alpha \binom{m}{\alpha} \frac{1}{t-\alpha} = 1 .$$

Используя интерполяционные формулы Лагранжа для полиномов степени $\leqslant m$, получаем

$$\sum_{\alpha=0}^{m} \frac{\tau(\tau-1)\dots(\tau-m)}{\alpha!\,(m-\alpha)!\,(\tau-\alpha)} \alpha^{m-j}(-1)^{\alpha+m} = \tau^{m-j} , \qquad j = \overline{0, m-1} ,$$

отсюда

$$\sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^{\alpha}\binom{m}{\alpha}\alpha^{m-\gamma} = 0, \quad \gamma=\overline{1,m}.$$

Для подсчета

$$\sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^{\alpha}\binom{m}{\alpha}\alpha^{m}$$

рассмотрим функцию:

$$\varphi_m(s) = \sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^{\alpha}\binom{m}{\alpha}e^{s\alpha}.$$

Ясно, что

$$\sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^{\alpha}\binom{m}{\alpha}\alpha^{m} = \left[\left(\frac{d}{ds}\right)^{m}\varphi_m(s)\right]\Big|_{s=0} = \left[\left(\frac{d}{ds}\right)^{m}(1-e^{s})^{m}\right]\Big|_{s=0} = (-1)^{m}m!$$

Подставляя последнее равенство в (23), имеем:

$$(\ell_m, x^{m+1}) = \frac{h^{m+2}}{m+2} - \int_0^1 t^{m+1}dt\,h^{m+2} +$$
$$+ h^{m+2}(-1)^{m}\int_0^1 t^{(m+1)}dt - h^{m+2}(-1)^{m}\int_0^1 t^{(m+1)}dt. \tag{24}$$

Подставляя формулу (24) в (22), получаем окончательное представление для

$\|\ell_m|L_2^{-(m+1)}[0,1]\|$.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.-М.: Наука,1974.-803 с.