УДК 517.946

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ВО ВНЕШНОСТИ ТОНКОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

М.В.Федорюк (Москва)

Введение

Рассмотрим в R^3 семейство $\{S_\varepsilon\}, \varepsilon>0$, гладких замкнутых поверхностей вращения, диффеоморфных сфере. Пусть S_{ε_1} лежит внутри S_{ε_2} при $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ и S_ε при $\varepsilon\to 0$ стягивается к отрезку $I: r=0, |z|\leq \ell$ (r, φ, z - цилиндрические координаты).

Поставим задачу Дирихле:

$$\Delta u(x)=0, x\in D_\varepsilon; u(x)=f(x), x\in S_\varepsilon; u(\infty)=0, x=(x_1, x_2, x_3), \tag{0.1}$$

где D_ε - внешность S_ε . Поверхности S_ε при $\varepsilon>0$ и функция $f(x)$ (в окрестности I),по предположению, принадлежат классу C^∞ . Требуется исследовать асимптотику решения задачи (0.1) при $\varepsilon\to 0$.

В теории тонкого профиля рассматривается задача об обтекании равномерным потоком невязкой несжимаемой жидкости тонкого тела вращения $(n=3)$ или тонкого цилиндра $(n=2)$. При этом на S_ε ставится условие Неймана для потенциала скорости [1-3] . При $n=2$ задача для условий Дирихле и Неймана и для равномерно эллиптических дифференциальных операторов второго порядка полностью исследована в [4] . При $n=3$ в работах по гидро- и аэромеханике [1-3] построен главный член асимптотики решения, но строгие математические результаты, по-видимому, отсутствуют. Аналогичные задачи возникают в электродинамике (см.§2). Задача Дирихле оказывается существенно более сложной, чем задача Неймана.

Уточним вид семейства $\{S_\varepsilon\}$. В [1-3] оно задается уравнением

$$r=\varepsilon F(z), \ |z|<\ell, \tag{0.2}$$

где F - гладкая функция при $z\neq\pm\ell$, $F(\pm\ell)=0$ и на концах тела $(r=0, z=\pm\ell)$ радиусы кривизны ненулевые. Мы зададим семейство тонких тел иначе - в других координатах (ξ, η, φ) , которые аналогичны вытянутым сфероидальным координатам [5] . Уравнение такого семейства имеет вид

$$\xi=1+\varepsilon f(\eta,\varepsilon), -1\leq\eta\leq 1, \tag{0.3}$$

где f - гладкая функция, $f>0$. Если (ξ,η,φ) - сфероидальные координаты и $f(\eta,\varepsilon)\equiv const$, то уравнение (0.3) задает семейство софокусных сфероидов, которые при $\varepsilon\to 0$ стягиваются к отрезку I.

С точки зрения гидромеханики оба способа задания семейства тонких тел вращения адекватны, но вариант (0.3) имеет определенные преимущества перед вариантом (0.2), что будет показано в § 1,2.

Если краевое условие не зависит от r: $h=h(z)$, то главный член асимптотики ищется, как и в [1-3], в виде потенциала простого слоя, сосредоточенного на отрезке I:

$$u_0(x)=\int_{-l}^{l}\frac{\nu(t,\varepsilon)dt}{\sqrt{(t-z)^2+r^2}}\,.$$

В §1 исследована асимптотика $u_0(x)$ при $r\to 0$ и получено интегральное уравнение для неизвестной плотности $\nu(t,\varepsilon)$. При этом в случае (0.2) $u_0(x)$ обязательно имеет особенности на кромках тела в точках $r=0$, $z=\pm l$, и возникает сложная задача об их "ликвидации". Для этого S_ε заменяется в [1-3] вблизи кромки параболоидом вращения Π_ε, и исследуется асимптотика решения задачи типа (0.1) вне Π_ε.

Для семейства (0.3) особенности $u_0(x)$ лежат внутри S_ε, что существенно упрощает задачу. В §2 показано, что этот метод пригоден и для задачи Неймана. Кроме того, этим же методом можно получить асимптотику задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца.

Основные результаты этой работы были доложены автором на семинаре С.Л.Соболева.

Автор благодарит В.П.Мясникова за полезные дискуссии.

§1. Асимптотика потенциала простого слоя, сосредоточенного на отрезке

1. Главный член асимптотики.

Введем координаты ξ,η,φ, связанные с цилиндрическими координатами соотношениями

$$r=d\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\,\Phi(\xi,\eta),\quad z=d\xi\eta\Psi(\xi,\eta),\tag{1.1}$$

где $1\leqslant\xi<\infty$, $-1\leqslant\eta\leqslant 1$. При $\Phi=\Psi\equiv 1$ это вытянутые сфероидальные координаты. Координаты вводятся в малой окрестности V отрезка I: $r=0$, $|z|\leqslant d$; возьмем V в виде $1\leqslant\xi\leqslant 1+\delta$, где $\delta>0$ мало. Координатные поверхности $\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0$, $\varphi=\varphi_0$ предполагаются бесконечно гладкими при $\xi_0>1$, $|\eta_0|<1$; при $\xi_0=1$ и при $\eta_0=\pm 1$ они вырождаются в отрезок I и в полуоси $\{r=0,\ z\geqslant d\}$, $\{r=0,\ z\leqslant -d\}$ соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $\Psi(1,\eta)\equiv 1$. В дальнейшем положим $d=1$ и введем условие

1.1. В малых окрестностях $U_{\pm}$ точек $\xi=1, \eta=\pm 1$ выполняется

$$\Phi(\xi,\eta) = \Psi(\xi,\eta) \equiv 1.$$

Это означает, что в областях $U_{\pm}$ координаты ξ,η,φ сфероидальные. Окрестности $U_{\pm}$ возьмем в виде $1 \leq \xi \leq 1+\delta$, $|\eta \mp 1| \leq \delta$.

Рассмотрим потенциал простого слоя, сосредоточенный на отрезке I :

$$\Pi(\nu)(\xi,\eta) = \int_{-1}^{1} \frac{\nu(t)}{R}\,dt, \quad R=\sqrt{(t-z)^2+r^2}. \tag{1.2}$$

Лемма 1.1. *Если* $\nu(t) \in C^1(-1,1)$ *, то*

$$\Pi(\nu)(\xi,\eta) = (K\nu)(\eta) + \nu(\eta)\int_{-1}^{1}\frac{dt}{R} + H. \tag{1.3}$$

Здесь K *- интегральный оператор:*

$$(K\nu)(\eta) = \int_{-1}^{1}\frac{\nu(t)-\nu(\eta)}{|t-\eta|}\,dt, \tag{1.4}$$

и для остаточного члена справедлива оценка

$$|H| \leq \sqrt{\xi-1}\,\|\nu'(t)\|_C. \tag{1.5}$$

Доказательство. Из (1.2)-(1.4) имеем

$$H = \int_{-1}^{1}\frac{\nu(t)-\nu(\eta)}{R_0}\left|1-\frac{R_0}{R}\right|dt,$$

где $R_0 = |t-\eta|$, так что

$$|H| < c_0 J,\ c_0 = \|\nu'(t)\|_C,\ J = \int_{-1}^{1}\left|\frac{R_0}{R}-1\right|dt =$$
$$= f(1)+f(-1)-2f(\eta)-2, \tag{1.6}$$
$$f = R-(\eta-z)\ln(t-z+R).$$

При $(\xi,\eta) \in U_+$ в силу условия 1.1 имеем

$$R(1)=\xi-\eta,\ R(-1)=\xi+\eta,\ R^2(\eta)=(\xi-1)\times$$
$$\times(\xi+1-2\eta^2),\ 1-z+R(1)=(\xi+1)(1-\eta),$$
$$-1-z+R(-1)=(\xi-1)(1-\eta),\ \eta-z+R(\eta)=$$
$$=\sqrt{\xi-1}\left(-\eta\sqrt{\xi-1}+\sqrt{\xi+1-2\eta^2}\right). \tag{1.7}$$

Поэтому

$$R(1)+R(-1)-2=2(\xi-1),\ R(\eta)=O\left(\sqrt{\xi-1}\right),$$
$$\ln\left(1-z+R(1)\right)+\ln\left(-1-z+R(-1)\right)-$$
$$-2\ln\left(\eta-z+R(\eta)\right)=-\ln\left[(\xi+1)(1+\eta)^2\right]+$$
$$+2\ln h,\quad h=\eta\sqrt{\xi-1}+\sqrt{\xi+1-2\eta^2}.$$

Из неравенства $\sqrt{\xi-1}/2\leqslant h\leqslant 1$ (в U_+) следует, что $\ln h=O(\ln(\xi-1))$ при $\xi\to 1$. Так как все логарифмы умножаются на $\xi-1$ (см.(1.6)), то(1.5) доказано.

Пусть $\eta\in[-1+\delta,1-\delta]$. Тогда
$$R^2-R_0^2=(\eta-z)(2t-\eta-z)+z^2.$$
Так как $\Psi(1,\eta)\equiv 1$, то
$$\eta-z=\eta\left[1-\xi+\xi\left(\Psi(\xi,\eta)-1\right)\right]=O(\xi-1),$$
и потому $R^2-R_0^2=O(\xi-1)$. Имеем
$$J=\int_{-1}^{1}\frac{R^2-R_0^2}{R(R_0+R)}dt\leqslant c(\xi-1)\int_{-1}^{1}\frac{dt}{R^2}=$$
$$=\frac{\pi c}{2\Phi}\sqrt{\frac{\xi-1}{(\xi+1)(1-\eta^2)}}<c\sqrt{\xi-1}.$$

Лемма 1.2. *Пусть условие 1.1 выполнено. Тогда*
$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{R}=-\ln(\xi-1)+a(\xi,\eta),\tag{1.8}$$
где функция a бесконечно дифференцируема в области V.

Доказательство. Имеем
$$a(\xi,\eta)=\ln\frac{(1-\xi\eta\Psi+R(1))(1+\xi\eta\Psi+R(-1))}{(\xi+1)(1-\eta^2)\Phi^2}.$$

В области U_+ имеем из (1.7) $a(\xi,\eta)=\ln(\xi+1)$. В области $\tilde V=V\setminus(U_+\cup U_-)$ знаменатель в формуле для a - строго положительная функция класса C^∞. В области $\tilde V$ имеем $1-z\geqslant\delta_0>0$, так что $R(1)\geqslant\delta_0$, $1-\xi\eta\Psi\geqslant\delta_1>0$, и потому функция $\ln(1-\xi\eta\Psi+R(1))$ принадлежит классу $C^\infty(\tilde V)$. Аналогично исследуется оставшийся логарифм.

2. Свойства оператора K.

Этот оператор определен на функциях из $C^1(-1,1)$.

Лемма 1.3. *Оператор K симметричен и неположителен в пространстве $L_2(-1,1)$.*

Доказательство. Имеем

$$(K\varphi,\psi)-(\varphi,K\psi)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\overline{\psi(\eta)}-\varphi(\eta)\overline{\psi(t)}}{|t-\eta|}\,dt\,d\eta .$$

Если в последнем интеграле заменить t на η, а η на t, то получится тот же интеграл, умноженный на -1, поэтому интеграл равен нулю. Далее,

$$(K\varphi,\varphi)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\overline{\varphi}(\eta)(\varphi(t)-\varphi(\eta))}{|t-\eta|}\,dt\,d\eta=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\overline{\varphi}(t)(\varphi(\eta)-\varphi(t))}{|t-\eta|}\,dt\,d\eta ,$$

так что

$$(K\varphi,\varphi)=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{|\varphi(t)-\varphi(\eta)|^2}{|t-\eta|}\,dt\,d\eta\le 0 .$$

Нетрудно также проверить, что оператор K отображает пространство $C^\infty(-1,1)$ в себя и сохраняет четность функции. Его основное свойство описывает

Теорема 1.1. *Собственные функции оператора K - полиномы Лежандра $P_n(\eta)$, $n=0,1,2,\ldots$, а его спектр имеет вид*

$$\lambda_0=0;\ \lambda_n=-2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right),\quad n=1,2,\ldots \tag{1.9}$$

В частности, справедлива формула

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_n(t)-P_n(\eta)}{|t-\eta|}\,dt=-2P_n(\eta)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \tag{1.10}$$

а собственные значения оператора K равны

$$\lambda_n=-2C-2\psi(n+1),\quad n\ge 1, \tag{1.11}$$

где C - постоянная Эйлера, ψ есть пси-функция.

Доказательство. Если $\nu(\eta)$ - постоянная, то $(K\nu)(\eta)\equiv 0$. Пусть $\nu(\eta)=a_0\eta^n+a_1\eta^{n-1}+\ldots+a_n$, где $n\ge 1$, $a_0\ne 0$.
Тогда

$$(K\nu)(\eta) = \lambda_n a_0 \eta^n + Q_{n-1}(\eta), \tag{1.12}$$

где $Q_{n-1}(\eta)$ - полином степени не выше чем $n-1$. Следовательно, множество L_n полиномов степени не выше n - инвариантное подпространство оператора K при любом n. Сужение K_n оператора K на пространство L_n - симметрический оператор, поэтому его собственные функции ортогональны. В силу (1.12) оператор K_n имеет собственную функцию (которая есть полином степени n) с собственным значением λ_n. Из ортогональности этих полиномов следует, что они пропорциональны полиномам Лежандра.

Формулу (1.10) можно доказать непосредственно, используя рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра и пример 25 из [5, с.154].

Следствие. *Оператор K можно расширить до самосопряженного в $L_2(-1,1)$ и представить его в виде интегрального оператора с симметричным ядром:*

$$(K\nu)(\eta) = \int_{-1}^{1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n(\eta) P_n(t) \nu(t)\, dt. \tag{1.13}$$

Так как $\lambda_n \sim -2\ln n \ (n \to \infty)$, то оператор K неограничен в $L_2(-1,1)$.

3. Исследование оставшихся членов разложения потенциала (2.3).

Лемма 1.4. *Пусть $\nu(t) \in C^{\infty}(-1,1)$. Тогда при любом целом $m \geq 0$ справедливо представление*

$$\begin{aligned} \Pi(\nu)(\eta) = &-\nu(\eta)\ln(\xi-1) + (K\nu)(\eta) + \\ &+ a(\xi,\eta)\nu(\eta) + (\xi-1)a_m(\xi,\eta) + \\ &+ (\xi-1)\ln(\xi-1)\, b_m(\xi,\eta) + O((\xi-1)^m) \end{aligned} \tag{1.14}$$

в области $-1 \leq \eta \leq 1$, $1 \leq \xi \leq 1+\delta$, где $a_m, b_m \in C^{\infty}$ при указанных ξ, η. Разложение (1.14) можно $N(m)$ раз дифференцировать по ξ, η, где $N(m) \to \infty$ при $m \to \infty$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$\nu_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{\nu^{(j)}(\eta)}{j!}(t-\eta)^j, \quad R_0 = (t-\eta),$$

выберем m достаточно большим и представим потенциал $\Pi(\nu)$ в виде

$$\Pi(\nu)(\xi,\eta) = \int_{-1}^{1} \frac{\nu(t)-\nu_m}{R}\, dt + \int_{-1}^{1} \frac{\nu_m}{R}\, dt. \tag{1.15}$$

По формуле Тейлора имеем

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + (R^2 - R_0^2)}} = \sum_{j=0}^{N} \binom{j}{-1/2} \frac{(R^2-R_0^2)^j}{R_0^{2j+1}} + \tilde{R}_N,$$

$$|\tilde{R}_N| \leq c_N \left(R^2 - R_0^2\right)^{N+1} R_0^{\;2N-3}.$$

В лемме 1.2 показано, что $R^2 - R_0^2 = (\xi-1)g(t,\xi,\eta)$, где g - гладкая функция, так что

$$\int_{-1}^{1} \frac{\nu(t)-\nu_m}{R}\,dt = \sum_{j=0}^{N} \binom{j}{-1/2} (\xi-1)^j \int_{-1}^{1} \frac{\nu(t)-\nu_m}{R_0^{2j+1}} g^j\,dt + O\left((\xi-1)^{N+1}\right). \qquad (1.16)$$

Оценка остаточного члена следует из оценки для $\tilde{R}_N$ и из того, что $(\nu(t)-\nu_m)\,R_0^{-2N-3}$ - ограниченная функция при $m \geq 2N+3$. Далее,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\nu(t)-\nu_m}{R_0}\,dt + \int_{-1}^{1} \frac{\nu_m}{R}\,dt = (K\nu)(\eta) + \nu(\eta)\int_{-1}^{1}\frac{dt}{R} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\nu^{(j)}(\eta)}{j!} V_j, \qquad (1.17)$$

где
$$V_j = \int_{-1}^{1} (t-\eta)^j \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right) dt.$$

Для интегралов V_j справедлива рекуррентная формула [6]

$$V_j = \frac{(z-\eta)(2j-1)}{j} V_{j-1} + \frac{(1-j)\left[(z-\eta)^2 + r^2\right]}{j} V_{j-2} + f_j,$$

$$f_j = \frac{(z-\eta)(2j-1)}{j}\tilde{V}_{j-1} + \frac{(1-j)\left[(z-\eta)^2 + r^2\right]}{j}\tilde{V}_{j-2} + \frac{1}{j}\left[(t-\eta)^{j-1}(R-R_0)\right]\Big|_{-1}^{1}, \qquad (1.18)$$

где
$$\tilde{V}_j = \frac{(1-\eta)^j + (-1-\eta)^j}{j}.$$

Имеем $f_j = (\xi-1)g_j(\xi,\eta)$, где $g_j \in C^\infty$. Из соотношения (1.18) и явного вида интеграла V_0 следует, что

$$V_j = (\xi-1)\left[\alpha_j(\xi,\eta) + \ln(\xi-1)\,\beta_j(\xi,\eta)\right],$$

где $\alpha_j, \beta_j \in C^\infty$. Из этого соотношения и из (1.15) - (1.17) следует утверждение леммы.

Из доказательства леммы 1.4 вытекает

Следствие 1.1. *Функции a_m, b_m представимы в виде*

$$a_m = A_m \nu, \quad b_m = B_m \nu,$$

где A_m, B_m – линейные интегродифференциальные операторы, отображающие пространство $C^\infty(-1,1)$ в себя.

Заметим, что разложение (1.14) состоит из двух частей: регулярной по $\xi-1$ (т.е. не содержащей $\ln(\xi-1)$) и сингулярной. Регулярная часть выражается через интегралы от функции $\nu(\eta)$ и ее производных. Сингулярная часть – только через значения функции $\nu(\eta)$ и ее производных, т.е. имеет вид

$$\ln(\xi-1) \times \sum_{j=0}^{M(m)} c_j(\xi,\eta)\,\nu^{(j)}(\eta),$$

где c_j не зависят от функции ν. Такая структура разложения типична для интегралов, которые зависят от малого параметра ε и расходятся при $\varepsilon = 0$ (см., например, [7, гл.1, §4]).

§2. Асимптотика решения задачи Дирихле

1. Основное интегральное уравнение.

Рассмотрим семейство гладких тел вращения $\{S_\varepsilon\}$, которое зависит от параметра $\varepsilon>0$ и стягивается к отрезку $I: r=0, |z|\leqslant d$ при $\varepsilon\to 0$. Всякое такое семейство задается уравнением $\Phi(r^2, z, \varepsilon) = 0$, где $\Phi \in C^\infty$. Имеем $(\Phi'_{r^2}, \Phi'_z) \neq (0,0)$ при $\varepsilon \neq 0$; можно считать также, что $\Phi'_{r^2} \neq 0$ при $r=0$, $\varepsilon \neq 0$ (это случай общего положения). Введем очевидное условие $\Phi'_\varepsilon < 0$ при $\varepsilon=0$, $(r,z)\in I$ и запишем уравнение семейства в вытянутых сфероидальных координатах

$$\Phi(r^2, d\xi\eta, \varepsilon) = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $r^2 = d^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)$, переменные лежат в области

$$V: 1\leqslant \xi \leqslant 1+\delta_0, \quad |\eta|\leqslant 1, \quad 0\leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_0>0$, $\delta_0>0$ малы. По условию, при $\varepsilon=0$ уравнение (2.1) определяет отрезок $I: \xi=1, |\eta|\leqslant 1$, поэтому $\Phi(0, d\eta, 0)\equiv 0$. Отсюда

$$\Phi(r^2, d\xi\eta, \varepsilon) = \Phi(r^2, d\xi\eta, \varepsilon) - \Phi(r^2, d\eta, \varepsilon) =$$

$$= (\xi^2-1)(1-\eta^2)\alpha + (\xi-1)\eta\beta + \varepsilon\gamma,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(V)$, $\alpha\neq 0$, $\gamma\neq 0$, $\alpha(1,1)\beta(1,1)>0$.

Исследуем структуру $\{S_\varepsilon\}$ вблизи концевой точки $\xi=1$, $\eta=1$. Для этого потребуем, чтобы радиус кривизны поверхности S_ε при $\eta=1$ (т.е. на

правом носике тела) был отличен от нуля. Поскольку $\Phi'_{\tau z} \neq 0$ при $\tau = 0$, то это условие эквивалентно следующему: $\Phi'_z \neq 0$ на S_ε при $\tau = 0$, или $\Phi'_z(0,d,0) \neq 0$. Поэтому $\beta \neq 0$ в V. Уравнение (2.1) можно записать в виде

$$(\xi - 1)(1 - \eta + \tilde{\beta}) = \varepsilon\tilde{\gamma},$$

где $\tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in C^\infty$ и отличны от нуля в V, $\tilde{\beta}(1,1) > 0$.

По теореме о неявной функции, получаем, что уравнение семейства $\{S_\varepsilon\}$ при $\xi \approx 1$, $\eta \approx 1$ записывается в виде

$$\xi = 1 + \varepsilon f(\eta, \varepsilon), \tag{2.2}$$

где f - гладкая строго положительная функция. Введем условие

2.1. Семейство $\{S_\varepsilon\}$ задается уравнением (2.2) в координатах ξ, η, φ, введенных в §1. При $|\eta| \leq 1, 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ функция $f \in C^\infty$ и строго положительна.

Рассмотрим случай, когда краевое условие не зависит от x, y, т.е.

$$\Delta u = 0,\ x \in D_\varepsilon;\quad u|_{S_\varepsilon} = h(z). \tag{2.3}$$

Учитывая (2.2), можно записать краевое условие в виде

$$u|_{S_\varepsilon} = h(\eta, \varepsilon).$$

Будем искать асимптотику решения задачи (2.3) в виде потенциала (1.2) с неизвестной плотностью ν. Отбрасывая остаточный член в формуле (1.3) и учитывая лемму (1.2) и соотношение (2.2), получаем для ν интегральное уравнение

$$(K\nu)(\eta) - \nu(\eta)\ln\varepsilon + b(\eta,\varepsilon)\nu(\eta) = h(\eta,\varepsilon), \tag{2.4}$$

где

$$b(\eta,\varepsilon) = -\ln f(\eta,\varepsilon) + a(1 + \varepsilon f(\eta,\varepsilon), \eta). \tag{2.5}$$

2. Пример.

Покажем на простейшем примере трудности, возникающие при исследовании уравнения (2.4). Пусть ξ, η, φ - сфероидальные координаты, а поверхности S_ε - сфероиды $\xi = 1 + \varepsilon$. Тогда уравнение (2.4) примет вид

$$(K\nu)(\eta) - \nu(\eta)\ln\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} = h(\eta,\varepsilon). \tag{2.6}$$

Разложим функцию h в ряд по полиномам Лежандра:

$$h(\eta,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\varepsilon) P_n(\eta).$$

Тогда, в силу теоремы 1.1, формально получим

$$v(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(\varepsilon)}{\lambda_n - \ln\varepsilon + \ln(2+\varepsilon)} P_n(\eta). \qquad (2.7)$$

Так как $\lambda_n \sim -2\ln n \; (n \to \infty)$, то при $\varepsilon \to +0$ знаменатели в (2.7) будут обращаться в нуль при $\varepsilon_n \sim n^{-2}$ и уравнение неразрешимо при малых ε.

Для того чтобы построить асимптотику решения задачи (2.3) с точностью, например, до $O(\varepsilon^{\alpha}), \alpha > 0$, достаточно с такой же точностью удовлетворить краевому условию на S_ε, так как функция $\Pi(\nu)$ удовлетворяет вне S_ε уравнению Лапласа и $\Pi = 0$ на бесконечности. Поэтому интегральное уравнение (2.4) достаточно решить приближенно.

Так как $h \in C^{\infty}$, то коэффициенты $h_n(\varepsilon)$ убывают с ростом n быстрее любой степени n, т.е.

$$|h_n(\varepsilon)| \leqslant c_m (n+1)^{-m} \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0), \qquad (2.8)$$

где m может быть выбрано любым. Поэтому "обрежем" спектр функции h, а именно заменим ее функцией

$$h_N(\eta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} h_n(\varepsilon) P_n(\eta) \qquad (2.9)$$

и решим уравнение (2.6) с правой частью h_N вместо h. Положим

$$N = \left[\varepsilon^{\frac{\delta-1}{2}}\right], \quad 0 < \delta < 1. \qquad (2.10)$$

Тогда модули всех знаменателей в (2.7) будут больше чем $a|\ln\varepsilon|$, где $a > 0$ и не зависит от ε, n, и

$$|h(\eta,\varepsilon) - h_N(\eta,\varepsilon)| \leqslant c_{m+1} \sum_{N=1}^{\infty} (n+1)^{-m-1} \leqslant c'_{m+1} \varepsilon^{\frac{m(1-\delta)}{2}}. \qquad (2.11)$$

Следовательно, функция

$$v_N(\eta) = \sum_{n=0}^{N} \frac{h_n(\varepsilon)}{\lambda_n - \ln\varepsilon + \ln(2+\varepsilon)} P_n(\eta)$$

удовлетворяет уравнению (2.6) с точностью до $O(\varepsilon^{M})$ при любом M, если $M = M(N)$ велико.

Этот же метод пригоден и для уравнения (2.4).

3. Главный член асимптотики.

Пусть L - оператор Лежандра:

$$Lv = (pv')', \quad p = 1 - t^2.$$

Обозначим через $\|v\|, \|v\|_C$ нормы в пространствах $L_2(-1,1)$, $C(-1,1)$ соответственно и введем гильбертово пространство $H_m(L)$ с нормой

$$\|v\|_m^2 = \|v\|^2 + \|Lv\|^2 + \ldots + \|L^m v\|^2.$$

Если $v(t)$ - гладкая функция, то она разлагается в ряд по полиномам Лежандра:

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \tilde{P}_n(t).$$

Полиномы $\tilde{P}_n(t)$ нормированы так, что

$$\int_{-1}^{1} \tilde{P}_n^2(t)dt = 1. \tag{2.12}$$

Тогда для $\|v\|_m^2$ получаем выражение

$$\|v\|_m^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + (n(n+1))^2 + (n(n+1))^4 + \ldots + (n(n+1))^{2m}\right] v_n^2. \tag{2.13}$$

Лемма 2.1. *Пусть $b(t) \in C^{\infty}(-1,1)$. Тогда оператор B умножения на функцию $b(t)$ ограничен из $H_m(L)$ в $H_m(L)$ при любом m.*

Доказательство. При $m=0$ ограниченность $\|B\|$ очевидна. Пусть $m=1$. Для гладких функций v имеем:

$$L(bv) = vLb + bLv + 2pb'v',$$

$$\|vLb + bLv\|_0 \leq C\|v\|_1,$$

и остается оценить норму функции $pb'v'$. Покажем, что

$$\|pv'\|_0 \leq C\|v\|_1. \tag{2.14}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-1}^{1} p^2 v'^2 dt = -\int_{-1}^{1} v(p^2 v')' dt =$$

$$= -\int_{-1}^{1} pvLv dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (pp'')' v^2 dt.$$

Последний интеграл не превосходит $C\|v\|_0^2$, а предпоследний - величины $C\|v\|_1^2$ в силу неравенства Шварца. Тем самым неравенство (2.14) доказано.

Докажем лемму при $m=2$. Имеем

$$L^2(bv) = bL^2v + vL^2b + 2Lv\cdot Lb +$$
$$+ 2pb'(Lv)' + 2pv'(Lb)' + 2pv'Lb' +$$
$$+ 4pb''Lv + 2pb'L(pv').$$

В силу (2.14) в оценке нуждается лишь последнее слагаемое. Имеем

$$pL(pv') = pp'Lv + p^2(Lv)',$$

и из (2.11) вытекает ограниченность оператора B в пространстве $H_2(L)$. Аналогично доказывается его ограниченность при $m > 2$.

Фиксируем пространство $H_m(L)$ и введем проекционный оператор

$$P^N : \sum_{n=0}^{\infty} f_n \tilde{P}_n(\eta) \longrightarrow \sum_{n=0}^{N} f_n \tilde{P}_n(\eta),$$

который коммутирует с оператором K. Заменим уравнение (2.4) уравнением

$$Kv_N - \ln\varepsilon\cdot v_N + P^N(bv_N) = h_N, \tag{2.15}$$

где $v_N = P^N v_N$,

т.е.

$$v_N = \sum_{n=0}^{N} v_n(\varepsilon)\tilde{P}_n(\eta).$$

Число N выберем в соответствии с (2.10).

Лемма 2.2. *Если $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ и $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, то уравнение (2.15) имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$\| v_N \|_m \le c_m |\ln\varepsilon|^{-1}. \tag{2.16}$$

Доказательство. Пусть $f = P^N f$. Тогда

$$(K - I\ln\varepsilon)^{-1} f = \sum_{n=0}^{N} \tilde{f}_n \tilde{P}_n(\eta), \quad \tilde{f}_n = \frac{f_n}{\lambda_n - \ln\varepsilon}.$$

В силу выбора N и асимптотики $\lambda_n \sim -2\ln n\ (n \to \infty)$ имеем

$$|\tilde{f}_n| \le c\,|f_n|\,|\ln\varepsilon|^{-1}, \quad 0 \le n \le N,$$

где c не зависит от ε. Из (2.13) следует, что

$$\|(K - I\ln\varepsilon)^{-1} f\|_m \le c_m |\ln\varepsilon|^{-1} \|f\|_m.$$

Оператор умножения на функцию b ограничен в $H_m(L)$ в силу лемм 1.2 и 2.1, $\|p^N\|_m \leq 1$, поэтому уравнение (2.15) принимает вид

$$\nu_N(\eta) + (A\nu_N)(\eta) = (K - I\ln\varepsilon)^{-1}\nu_N,$$

где

$$\|A\nu_N\|_m \leq c\,|\ln\varepsilon|^{-1}\,\|\nu_N\|_m .$$

Отсюда следует (2.16).

Теорема 2.1. *Пусть* $\nu_N(\eta)$ *- решение уравнения (2.15) и*

$$u_0(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\nu_N(t)}{R}\,dt. \tag{2.17}$$

Тогда всюду в области D_ε *справедлива оценка*

$$|u(x) - u_0(x)| \leq C\sqrt{\varepsilon}, \tag{2.18}$$

где $u(x)$ *- решение задачи (2.3).*

Доказательство. Функция $u_0(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в D_ε и $u_0(\infty) = 0$. Докажем, что оценка (2.18) выполняется на S_ε; тогда по принципу максимума она будет выполнена всюду в D_ε.

В силу лемм 1.1 и 2.2, имеем на S_ε :

$$\Pi(\nu_N)(\eta) = (h_N - h) + (b\nu_N - P^N(b\nu_N)) + \sqrt{\varepsilon}H,$$

$$|H| \leq c\max_{|\eta|\leq 1} |\nu_N'(\eta)|. \tag{2.19}$$

Для разности $h_N - h$ справедлива оценка (2.11). Из леммы 2.2 и определения нормы (2.13) следует, что

$$|(\nu_N)_n| \leq c\,|\ln\varepsilon|^{-1}(1+n^{2m})^{-1}. \tag{2.20}$$

Так как, в силу леммы 2.1, $\|b\nu_N\|_m \leq C\,\|\nu_N\|_m$, то оценки вида (2.20) справедливы для коэффициентов $(b\nu_N)_n$.

Полиномы $\tilde{P}_n(t)$, нормированные условиями (2.12), связаны с полиномами Лежандра $P_n(t)$, нормированными условием $P_n(1)=1$, соотношением $\tilde{P}_n(t) = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\,P_n(t)$. Используя неравенства [8] :

$$|P_n(t)| \leq 1, \quad |P_n'(t)| \leq \frac{1}{2}n(n+1) \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

получаем, что если

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n \tilde{P}_n(t),$$

то

$$\|f\|_C \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+\frac{1}{2}}\, |f_n|, \quad \|f'\|_C \leq \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)\sqrt{2n+1}\, |f_n|.$$

Из этих оценок и из (2.20) при $m \geq 2$ получаем $\|v'_N\|_C \leq c\,|\ln\varepsilon|^{-1}$. Последнее слагаемое в (2.19) имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|^{-1})$. Наконец, при $m \geq 2$ выполняется

$$\|\mathcal{B}v_N - P^N(\mathcal{B}v_N)\|_C \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sqrt{n+\frac{1}{2}}\, |(\mathcal{B}v_N)_n| \leq$$

$$\leq \frac{c}{|\ln\varepsilon|} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m-1/2}} \leq \frac{c'}{|\ln\varepsilon|\, N^{2m-3/2}}.$$

Выбирая $m \geq 3$ и $\delta > 0$ в (2.10) достаточно малым, получаем, что

$$\|\Pi(v_N) - h\|_{C(S_\varepsilon)} \leq c\sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|^{-1}. \tag{2.21}$$

Оценка (2.18) доказана.

Из теоремы 2.1 можно получить более грубую, логарифмическую асимптотику решения. Поставим в соответствие функции $v(\eta)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n P_n(\eta)$ вектор $\tilde{v}=(v_0, v_1, \ldots)$.

Тогда

$$(\mathcal{B}v)_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} v_k,$$

где $\mathcal{B}$ - функция из (2.5), и уравнение (2.4) сводится к бесконечной системе

$$(\lambda_n - \ln\varepsilon)v_n + \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} v_k = h_n.$$

Поставим в соответствие функциям v_N, h_N векторы $\tilde{v}_N=(v_0,\ldots,v_N)$, $\tilde{h}_N = (h_0,\ldots,h_N)$ и введем $(N+1)\times(N+1)$-матрицу $B_N=(b_{nk})$. Тогда уравнение (2.15) примет вид

$$(\Lambda_N + B_N)\tilde{v}_N = \tilde{h}_N,$$

где B_N - симметрическая, а Λ_N - диагональная матрицы с элементами

$$(\Lambda_N)_{nn} = \lambda_n - \ln\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\tilde{\nu}_N = \left(I_N + B_N \Lambda_N^{-1}\right)^{-1} \Lambda_N^{-1} \tilde{h}_N . \qquad (2.22)$$

Матрицы Λ_N^{-1}, $(I_N+B_N\Lambda_N^{-1})^{-1}$ можно разложить в ряды по степеням $(\ln\varepsilon)^{-1}$; нетрудно показать, что эти ряды асимптотические, и мы получим разложение

$$\nu_n(\eta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{Nn}}{(\ln\varepsilon)^n} P_n(\eta) \quad (\varepsilon \to 0).$$

Главный член разложения равен

$$\nu_N(\eta) = \frac{h_N(\eta)}{\ln(\varepsilon)} + O\left(\frac{1}{\ln^2\varepsilon}\right),$$

и соответственно

$$u_0(x) = \frac{1}{\ln\varepsilon}\int_{-1}^{1} \frac{h_N(t)}{R}\,dt + O\left(\frac{1}{\ln^2\varepsilon}\right). \qquad (2.23)$$

Такого типа результаты имеются в физической литературе [9-10] .

4. Высшие приближения.

Из доказательства теоремы 2.1 следует, что на S_ε имеет место

$$u_0 = \Pi(\nu_N) = f_N^1 + f_N^2,$$

где

$$f_N^2 = \Pi(\nu_N) - K\nu_N - \nu_n \int_{-1}^{1} \frac{dt}{R},$$

$f_N^1 = O(\varepsilon^m)$ и $m>0$ может быть выбрано сколь угодно большим.

В силу леммы 1.4 и уравнения (2.1) имеем

$$f_N^2 = \sqrt{\varepsilon}\, g_{1N}(\eta,\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\,\ln\varepsilon\, g_{2N}(\eta,\varepsilon) + O(\varepsilon^m),$$

где $m>0$ может быть выбрано сколь угодно большим, а $g_{1N}, g_{2N} \in C^\infty$.

Тем же способом, что и в теореме 2.1, можно построить гармонические вне S_ε функции u_{11}, u_{12} такие, что

$$|u_{1j} - g_{jN}| \le c\sqrt{\varepsilon}, \quad j=1,2,$$

на S_ε . Положим

$$u_1 = u_0 + \sqrt{\varepsilon}\, u_{11} + \sqrt{\varepsilon}\,\ln\varepsilon\, u_{12} .$$

Тогда, в силу теоремы 2.1, имеем

$$|u - u_1| \le c_1 \varepsilon\, |\ln\varepsilon|$$

на S_ε , а стало быть, и в области $\mathcal{D}_\varepsilon$. Повторив эту процедуру еще раз, получим функцию u_2 такую, что

$$|u-u_2| \leq c_2 \varepsilon^{3/2} |\ln\varepsilon|^2.$$

Отсюда следует, что для любого $m>0$ можно построить функцию u_m такую, что

$$|u(x)-u_m(x)| < c_m \varepsilon^m, \quad x \in \mathcal{D}_\varepsilon. \tag{2.24}$$

5. Неосесимметричные краевые условия.

Рассмотрим условие Дирихле

$$u|_{S_\varepsilon} = h\,(x,y,z), \tag{2.25}$$

где $h \in C^\infty$ в области V , указанной в §1. Разложим h в ряд Тейлора по степеням

$$h = \sum_{i,j=0}^{\infty} x^i y^j h_j(z), \quad h_j(z) = \frac{1}{i!}\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j h\,(0,0,z). \tag{2.26}$$

Из (2.2) следует, что $x = O(\sqrt{\varepsilon})$, $y = O(\sqrt{\varepsilon})$ на S_ε , так что ряд (2.26) - асимптотический при $\varepsilon \to 0$. Поэтому для того чтобы удовлетворить краевому условию (2.25) с точностью до $O(\varepsilon^{m/2})$, достаточно в сумме из (2.26) оставить только слагаемые с номерами i, j такими, что $i+j \leq m-1$. Мы ограничимся случаем $i=1$, $j=0$, т.е. рассмотрим краевое условие

$$u|_{S_\varepsilon} = x h_1(z), \quad h_1(z) = \frac{\partial h}{\partial x}(0,0,z). \tag{2.27}$$

Главный член асимптотики будем искать в виде производной потенциала простого слоя $u_0(x) = \partial/\partial x\, \Pi(\nu)$ с неизвестной плотностью ν . Пусть J - якобиан

$$J = \det \frac{\partial(r,z)}{\partial(\xi,\eta)}.$$

Вблизи точек $\xi = 1$, $\eta = \pm 1$ имеем $J = J_0 = r^{-1}(\xi^2 - \eta^2)$. Прямой выкладкой доказывается

Лемма 2.3. *В области* V *справедливо*

$$J = r^{-1}\tilde{J}, \quad \tilde{J} = J_0 + H, \quad H = O(\xi - 1) + O(1-\eta^2),$$

где

$$H \in C^\infty(V), \quad \tilde{J} \neq 0.$$

Лемма 2.4. *Пусть* $\nu \in C^\infty(-1,1)$. *Тогда в области* V *при любом* $m > 1$ *справедливо представление*

$$\frac{\partial \Pi(\nu)}{\partial x} = \frac{x}{\tilde{J}}\left[-\frac{\nu(\eta)}{\xi-1} + A_m\nu + \ln(\xi-1)B_m\nu + O(\varepsilon^m)\right]. \tag{2.28}$$

Здесь A_m, B_m *- линейные интегродифференциальные операторы, отображающие пространство* $C^{\infty}(-1,1)$ *в себя.*

Доказательство следует из формулы

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{x}{\tilde{J}}\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \Pi}{\partial \eta}\right).$$

и лемм 1.2, 1.4, 2.3.

Теорема 2.2. *Пусть*

$$u_0(x) = \frac{\partial}{\partial x}\Pi(\nu),\ \nu = -\varepsilon\tilde{J}f(\eta,\varepsilon)h_1(z), \tag{2.29}$$

где функция f *определяет семейство* $\{S_\varepsilon\}$ *(см. (2.3)). Тогда всюду в* D_ε *справедлива оценка*

$$|u(x) - u_0(x)| \leqslant C\varepsilon\,|\ln\varepsilon|. \tag{2.30}$$

Доказательство. В силу леммы 2.4 и выбора ν, имеем на S_ε :

$$u_0(x) - xh_1(z) = x\tilde{J}^{-1}\left[A_m\nu + \right.$$

$$\left. + B_m\nu\ln(\varepsilon f(\eta,\varepsilon)) + O(\varepsilon^m)\right]. \tag{2.31}$$

Из неравенства о среднем арифметическом следует, что $|x|/\tilde{J} \leqslant 1/2$. В силу (2.29) , $\nu(\eta) = O(\varepsilon)$, и это же верно для всех производных функции ν и для операторов $A_m\nu$, $B_m\nu$. Поэтому оценка (2.30) выполняется на S_ε , а в силу принципа максимума - всюду в D_ε . Теорема доказана.

Этим же методом для любого m можно построить функцию $U_m(x)$ такую, что оценка (2.24) выполняется всюду в D_ε . Действительно, применив конструкцию теоремы 2.2 к задаче Дирихле с краевым условием

$$u\Big|_{S_\varepsilon} = \frac{x}{\tilde{J}}\Big(A_m\nu + B_m\nu\ln(\varepsilon f(\eta,\varepsilon))\Big)$$

и обозначив полученное решение $u_1(x)$, найдем, что

$$|u(x) - u_0(x) - u_1(x)| \leqslant C_2\varepsilon^2\ln^2\varepsilon$$

в D_ε . Аналогично строятся следующие приближения.

Чтобы построить асимптотику решения с условием (2.25) с точностью до $O(\varepsilon^m)$, достаточно, в силу (2.26) , построить такую асимптотику для решения с краевым условием

$$u_{ij}\big|_{S_\varepsilon} = x^i y^j h_j(z).$$

В этом случае главный член асимптотики, а также последующие необходимо взять в виде

$$u^0_{ij} = \sum_{\alpha+\beta\le i+j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\beta}\Pi(\nu).$$

6.Задача Неймана.

Поставим на S_ε краевое условие:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = \frac{\partial h(x)}{\partial n},$$

где $h\in C^\infty(R^3)$. Такой вид имеет краевое условие в задаче обтекания тела, причем h -линейная функция [1-3]. Ограничимся осесимметричным случаем, так что $h\big|_{S_\varepsilon} = h(\eta,\varepsilon)$, и пусть координаты (ξ,η,φ) - сфероидальные. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \left[(\xi^2-1)\frac{\partial u}{\partial \xi} - \varepsilon(1-\eta^2)f'_\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right](\xi^2-\eta^2)^{-1/2}\times$$
$$\times\left[\xi^2-1+\varepsilon^2(1-\eta^2)f'^2_\eta\right]^{-1/2}, \tag{2.32}$$

так что краевое условие примет вид

$$(\xi^2-1)\frac{\partial u}{\partial \xi} - \varepsilon(1-\eta^2)f'_\eta\frac{\partial u}{\partial \eta} = (\xi^2-1)\frac{\partial h}{\partial \xi} -$$
$$-\varepsilon(1-\eta^2)\frac{\partial h}{\partial \eta}\ \left(\xi = 1+\varepsilon f(\eta,\varepsilon),\ -1\le\eta\le 1\right). \tag{2.33}$$

Это условие можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + a(\eta,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial \eta} = b(\eta,\varepsilon), \tag{2.34}$$

где a, b - гладкие функции, явный вид которых ясен из (2.33). Укажем алгоритм, позволяющий для любого $m>0$ построить функцию u_m, гармоническую в области D_ε, равную нулю на бесконечности и такую, что

$$\left\|\frac{\partial u_m(x)}{\partial n} - \frac{\partial h(x)}{\partial n}\right\|_{S_\varepsilon} \le C_m\varepsilon^m. \tag{2.35}$$

Будем искать ее в виде

$$u_m(x) = \varepsilon \Pi(\nu).$$

Так как $\partial\Pi/\partial\xi \sim -\nu/(\xi-1)$, $\partial\Pi/\partial\eta = O(1)$, то, учитывая лемму 1.4, краевое условие(2.34) можно записать в виде

$$\nu = -f\ell + \varepsilon\hat{A}\nu + O(\varepsilon^{m+2}).$$

Здесь $\hat{A}$ -линейный интегродифференциальный оператор, обладающий тем свойством, что если $\nu \in C^{\infty}(-1, 1)$, то

$$\|\hat{A}\nu\|_C \leqslant C_j \|\nu\|_{C^j} |\ln\varepsilon|$$

при некотором $j=j(m)<\infty$. Функцию ν возьмем в виде

$$\nu = \sum_{j=0}^{m+1} (-\varepsilon\hat{A})^j (f\ell).$$

Тогда условие (2.34) будет выполняться с точностью до $O(\varepsilon^{m+1}\ln\varepsilon)$. Произведение корней из (2.32) имеет порядок $O(\varepsilon^{-1})$ на S_ε , откуда и следует (2.35).

Литѐратура

1. Ван-Дейк М.Методы возмущений в механике жидкости.-М.: Мир, 1967.
2. Коул.Дж. Методы возмущений в прикладной математике.-М.: Мир, 1972.- 274 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.-М.: Наука, 1978.
4. Ильин А.М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 1. Двумерный случай.- Мат.сб., 1976, т.99,№4, с.514-537.
5. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т.2.-М.:ФМ., 1963.- 515 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2.-М.-Л.: ГТТИ, 1951.- 863 с.
7. Федорюк М.В. Метод перевала.-М.: Наука, 1977.- 368 с.
8. Сэгё Г. Ортогональные многочлены.-М.: ФМ, 1962.- 500 с.
9. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики.Т.2.-М.: ИЛ., 1960.- 886 с.