УДК 517.392

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)$

Е.А.Хамаев, Ц.Б.Шойнжуров (Улан-Удэ)

В работе С.Л.Соболева [1] исследовались кубатурные формулы в классах L_2^m и определялись кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем на решетках. В этой же работе показано, что кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем асимптотически оптимальны в L_2^m, и выделены неулучшаемые константы в главном члене оценок для норм асимптотически оптимальных функционалов в L_2^m. Основные результаты С.Л.Соболева по теории кубатурных формул были обобщены на различные классы функций О.В.Бесовым [7], М.Д.Рамазановым [8], В.И.Половинкиным [9], Ц.Б.Шойнжуровым [10] и др. Автором [10] получены неулучшаемые константы в главном члене норм функционалов погрешностей в W_p^{α}.

Мы будем рассматривать некоторые вопросы теории кубатурных формул в классе функций $\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)$, дифференциальные свойства которых определяются с помощью псевдодифференциальных операторов вида

$$PU = \int e^{2\pi i\xi x}\mu(2\pi i\xi)\hat{U}(\xi)\,d\xi.$$

Основные свойства этого пространства исследовались в работах [5,6,11].

В настоящей работе получен общий вид функционала погрешности в $\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)$, явно выписана норма этого функционала, построена экстремальная функция оптимального периодического функционала погрешности, оценена снизу норма любого функционала погрешности из $\mathcal{L}_p^{\mu^*}$ для некоторых классов символов $\mu(i\xi)$.

§ 1. Основные определения и вспомогательные результаты

Рассмотрим псевдодифференциальное уравнение

$$PU = \int_{E_n} e^{2\pi i\xi x}\mu(2\pi i\xi)\hat{U}(\xi)\,d\xi = f, \tag{1}$$

где символ $\mu(2\pi i\xi)\in C^{2N}$, $\xi_i \neq 0$, $i=1,2,\dots,n$, и удовлетворяет следующим условиям:

1. Для любого $\lambda>0$ выполняется $\mu(2\pi i\lambda^{\alpha}\xi)=\lambda\mu(2\pi i\xi)$, где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_i^{-1}=\ell_i\geq 1$, $i=1,2,\dots,n$.

2. Символ $\mu(2\pi i\xi)$ удовлетворяет неравенству

$$c_1 \|\xi\| \le \mu(2\pi i\xi) \le c_2 \|\xi\|,$$

где

$$\|\xi\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} (2\pi i \xi_i)^{2\ell_i}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Имеют место следующие оценки:

$$|D^\beta \mu(2\pi i\xi)| \le c\|\xi\|^\nu \quad \text{при } 0 \le \beta_j \le [\ell_j];$$

$$\Big|\prod_{j=1}^{n} D_j^\kappa D^\beta \mu(2\pi i\xi)\Big| \le \frac{c(1+\|\xi\|)^\nu}{\prod_{j=1}^{n} |\xi_j|^{\kappa-(\ell_j-[\ell_j])}} \quad \text{при } \ell_j \text{ произвольном;}$$

$$|D_j^\kappa D^\beta \mu(2\pi i\xi)| \le \frac{c(1+\|\xi\|)^\nu}{\|\xi\|^{u}} \quad \text{при } \ell_j \text{ целом,}$$

где $\nu > 0$, $\kappa = 1, 2, \dots, N$, u зависит от N.

4. $\mu(2\pi i\xi) = \overline{\mu(2\pi i\xi)} \quad \forall \xi \in E_n$.

Пусть $F\varphi = \hat{\varphi}$ - преобразование Фурье, $F^{-1}\varphi = \check{\varphi}$ - обратное преобразование Фурье, S_N, S_N', Φ и Φ' - классы функций, введенные С.В.Успенским [5,6] и П.И.Лизоркиным [3].

Отметим, что $\Phi \subset S_N \subset L_p(E_n)$ и классы функций Φ и S_N плотны в $L_p(E_n)$, $1 < p < \infty$.

Пусть символ $\mu(2\pi i\xi)$ удовлетворяет условиям 1-4.

Определение 1. Функция $U \in \mathcal{L}_p^\mu(E_n)$, если

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad U \in S_N'$$

и

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p^\mu(E_n)} = \sup_{\varphi \in S_N} \frac{(U, \widecheck{\mu\hat{\varphi}})}{\|\varphi\|_{L_{p'}(E_n)}} < \infty.$$

Из плотности S_N в $L_{p'}$, $1 < p' < \infty$, следует, что для любой функции $u \in \mathcal{L}_p^\mu(E_n)$ функционал $(U, \widecheck{\mu\hat{\varphi}}) = (\widecheck{\mu\hat{u}}, \varphi)$ является непрерывным над $L_{p'}(E_n)$.

Из общего вида линейного функционала в L_p следует существование функции $f \in L_p(E_n)$ такой, что для любой функции $\varphi \in S_N$ имеет место

$$(u, \widecheck{\mu(2\pi i\xi)\hat{\varphi}(\xi)}) = (f, \varphi). \tag{2}$$

Из (1) имеем:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_p^\mu(E_n)} = \sup_{\varphi \in S_N} \frac{(u, P\varphi)}{\|\varphi\|_{L_{p'}(E_n)}} =$$

$$= \sup_{\varphi \in S_N} \frac{(f,\varphi)}{\|\varphi\|_{L_{p'}(E_n)}} = \|f\|_{L_p(E_n)}. \tag{3}$$

Очевидно, если $u \in S_N$, то

$$\|u\|_{\mathcal{I}_p^\mu(E_n)} = \|Pu\|_{L_p(E_n)}.$$

Определение 2. Функция $u \in \mathcal{I}_{p,\ell}^\mu(E_n)$, $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n)$, если $\|u\|_{\mathcal{I}_p^\mu(E_n)} < \infty$ и для почти всех $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ имеет место

$$\frac{u(x_1,x_2,\dots,x_n)}{(1+|x_j|)^{m_j^0}} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_j \longrightarrow \infty,$$

где $m^0 = (m_1^0, \dots, m_n^0)$

и

$$m_j^0 = \begin{cases} [\ell_j]+1 & \text{при } \ell_j \text{ нецелом;} \\ \ell_j & \text{при } \ell_j \text{ целом.} \end{cases} \tag{4}$$

Автором [11] показано, что пространство $\mathcal{I}_{p,\ell}^\mu(E_n)$ является полным. Далее, положим

$$G_0(\xi) = \exp\left(-\sum_{j=1}^n \xi_j^{4m} (\alpha_j 4m)^{-1}\right), \quad G_1(\xi) = G_0(\xi)\cdot\sum_{i=1}^n \xi_i^{4m},$$

$$G(\xi) = G_1(\xi)\cdot\mu^{-1}(2\pi i\xi)$$

и

$$\mathcal{J}_{h,\varepsilon}[f] = \int_\varepsilon^{h^{-1}} v^{-|\alpha|} \int_{E_n} \hat{G}\left(\frac{x-t}{v^\alpha}\right) f(t)\,dt\,dv.$$

Из [11] следует, что для почти всех $x \in E_n$ имеет место представление

$$u(x) = P_{m^0-1}(x) + \lim_{h\to 0} \mathcal{J}_{h,1}[f] + \mathcal{J}_{1,0}[f], \tag{5}$$

где через $\lim\limits_{h\to 0} \mathcal{J}_{h,1}[f]$ обозначен предел $\mathcal{J}_{h,1}[f]$ в $L_p^{m_0}(E_n)$

и

$$\|P_{m^0-1}(x)\|_{\mathcal{I}_p^\mu(E_n)} = 0.$$

Лемма 1. *Если* $u \in \mathcal{L}^{\mu}_{p,\ell}(E_n)$ *и* $|\alpha| < p$, *то* $u(x)$ *непрерывна.*

Доказательство. В силу представления (5), достаточно показать сходимость интегралов $\mathcal{J}_{1,h}[f]$ в $C(E_n)$ и $\mathcal{J}_{h,1}[f]$ в $C^{\ell}(g)$, где g - некоторый компакт в E_n.

Применим неравенство Гёльдера:

$$\left|\mathcal{J}_{1,h_1}[f] - \mathcal{J}_{1,h_2}[f]\right| = \left|\int_{h_1}^{h_2} v^{-|\alpha|}\int_{E_n}\hat{G}\left(\frac{x-t}{v^{\alpha}}\right)f(t)\,dt\,dv\right| \leq$$

$$\leq \int_{h_1}^{h_2} v^{-|\alpha|}\cdot v^{\frac{|\alpha|}{p'}}\cdot\|G\|_{L_{p'}}\cdot\|f\|_{L_p}\,dv = ch^{1-\frac{|\alpha|}{p}} \longrightarrow 0$$

при $h_1, h_2 \longrightarrow 0$, откуда следует, что $\mathcal{J}_{1,0}[f]$ непрерывна, так как последовательность $\mathcal{J}_{1,h}[f]$ сходится в $C(E_n)$. Пусть m - достаточно большое число такое, что $m\alpha_0 > 1$. Покажем, что последовательность $\mathcal{J}_{h,1}[f]$ сходится в $L^m_p(E_n)$. Сначала докажем, что $D^m_{x_j}\mathcal{J}_{h,1}[f]$ сходится в $C(E_n)$:

$$\left\|D^m_{x_j}\left[\mathcal{J}_{h_1,1}[f] - \mathcal{J}_{h_2,1}[f]\right]\right\|_{C(E_n)} \leq$$

$$\leq \int_{h_1^{-1}}^{h_2^{-1}} v^{-|\alpha|-m\alpha_j+\frac{|\alpha|}{p'}}\,dv\int_{E_n}\left\|D^m G\left(\frac{t}{v^{\alpha}}\right)\right\|_{L_{p'}}\cdot\|f\|_{L_p}\,dt \leq$$

$$\leq c\int_{h_1^{-1}}^{h_2^{-1}} v^{-\frac{|\alpha|}{p}-m\alpha_j}\,dv \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad h_1, h_2 \longrightarrow 0.$$

В силу полноты $L^m_p(E_n)$, существует локально суммируемая функция $f_0 \in L^m_p$ такая, что

$$\|\mathcal{J}_{h,1}[f] - f_0\|_{L^m_p(E_n)} \longrightarrow 0, \quad h \longrightarrow 0.$$

Так как $\mathcal{J}_{h,1}[f]$ сходится к $\mathcal{J}_{0,1}[f]$ в $L^{m_0}_p(E_n)$, $m_0 < m$, то

$$D^m_{x_j}\mathcal{J}_{0,1}[f] = D^m_{x_j} f_0, \quad j = 1,\dots,n,$$

т.е. $f_0 = \mathcal{J}_{0,1}[f] + P_{m-1}(x)$. Последовательность $D^m_{x_j}\mathcal{J}_{h,1}[f]$, $j=1,\dots,n$, сходится также в $C(E_n)$, тогда $D^m_{x_j}\mathcal{J}_{0,1}[f]$, $j=1,\dots,n$, непрерывна и, следовательно, на любом компакте $g \in E_n$ имеет место $\mathcal{J}_{0,1}[f] \in C^m(g)$ (см. [4]). Отсюда и следует непрерывность функции $u(x)$ в представлении (5).

§ 2. Норма и общий вид функционала погрешности кубатурной формулы в $\mathcal{L}_p^{\mu^*}$

Пусть Ω - ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma(\Omega)$ в E_n и $|\alpha| < p$. Рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_{\Omega} \varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(x_k) \tag{6}$$

с функционалом погрешности

$$(\ell_{\Omega}, \varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(x_k). \tag{7}$$

Определение 3. Функция $u \in S_N'$ называется обобщенным решением уравнения (1), если для любой функции $\varphi \in S_N$ выполняется равенство $(P\varphi, u) = (\varphi, f)$.

Автором [11] показано, что уравнение (1) имеет решение

$$u(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ h \to 0}} \nu_\mu(x) * f(x) + P_{m^\circ-1}(x), \tag{8}$$

где

$$\nu_\mu(x) = \int_{\varepsilon}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|} \hat{G}\left(\frac{x}{v^\alpha}\right) dv.$$

Определим пространство $\mathcal{L}_p^{\mu^*}(E_n)$, сопряженное $\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)$, положив, что $f \in \mathcal{L}_p^{\mu^*}(E_n)$, если

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p^{\mu^*}} = \sup_{\varphi \in \mathcal{L}_p^\mu} \frac{(f, \varphi)}{\|\varphi\|_{\mathcal{L}_p^\mu}} < \infty . \tag{9}$$

Если $\varphi \in S_N$, то

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}_{p'}^\mu} = \|P\varphi\|_{L_{p'}} ,$$

где

$$P\varphi = \int_{E_n} e^{2\pi i x \xi} \mu(2\pi i \xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi .$$

Так как S_N плотно в $\mathcal{L}_{p'}^\mu$, то норму (9) можно определить так:

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p^{\mu^*}} = \sup_{\varphi \in S_N} \frac{(f, \varphi)}{\|P\varphi\|_{L_p}} . \tag{10}$$

Лемма 2. *Пусть $\ell_\Omega(x)$ финитна и $\ell_\Omega(x) \in \mathcal{L}_p^{\mu^*}(E_n)$. Тогда уравнение*

$$Pu = \int_{E_n} e^{2\pi i x \xi} \mu(2\pi i \xi) \hat{u}(\xi) d\xi = \ell_\Omega(x) \tag{11}$$

имеет решение $u(x) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} \nu_\mu(x) * l_\Omega(x).$

Доказательство. По определению обобщенного решения, $u(x)$ удовлетворяет уравнению $Pu = l_\Omega(x)$, если для любого $\varphi \in S_N$ выполняется

$$(u, P\varphi) = (l_\Omega, \varphi).$$

Покажем, что функция

$$u(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} \nu_\mu * l_\Omega(x) \tag{12}$$

удовлетворяет (12). Так как $l_\Omega(x)$ - финитная обобщенная функция, принадлежащая пространству S' Шварца, то

$$(\nu_\mu * l_\Omega, P\varphi) = (\nu_\mu(x), (l_\Omega(y)\eta(y)P\varphi(x+y))) =$$

$= (\eta(y) \in C^\infty$ и равна 1 в некоторой окрестности $\Omega) =$

$$= (l_\Omega(y), (\nu_\mu(x)\eta(y)\, P\varphi(x+y))) =$$

$$= (l_\Omega(y), \eta(y) \int_{E_n} \nu_\mu(x) \int_{E_n} e^{2\pi i(x+y)\xi} \mu\hat\varphi\, dx d\xi) =$$

$$= (l_\Omega(y), \eta(y) \int_{E_n} e^{2\pi i y\xi} \mu(\xi)\hat\varphi(\xi)\hat\nu_\mu d\xi).$$

Нетрудно видеть, что

$$\hat\nu_\mu(\xi) = \int_\varepsilon^{h^{-1}} \frac{G_1(\sigma^\alpha \xi)}{\sigma\mu(\xi)} d\sigma,$$

откуда

$$(\nu_\mu * l_\Omega, P\varphi) = (l_\Omega(y), \eta(y) \int_{E_n} e^{2\pi i y\xi} \hat\varphi(\xi) d\xi \int_\varepsilon^{h^{-1}} \frac{G_1(\sigma^\alpha\xi)}{\sigma} d\sigma) =$$

(обозначая через $\chi(\xi) = \int_\varepsilon^{h^{-1}} \sigma^{-1} G_1(\sigma^\alpha \xi) d\sigma$, получаем)

$$= \left(\chi(\xi)\hat\varphi(\xi), \int dy\, l_\Omega(y) e^{2\pi i y\xi} \eta(y)\right) dy = (\chi(\xi)\hat\varphi(\xi), \hat l_\Omega) =$$

(по определению преобразования Фурье обобщенной функции имеем)

$$= (\varphi * \check\chi, l_\Omega).$$

Докажем, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} (\varphi * \check\chi) = \varphi,$$

Так как $$\check{\chi}(\xi) = \int_{\varepsilon}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1} \hat{G}_1\left(\frac{\xi}{v^{\alpha}}\right) dv,$$

то
$$\varphi * \check{\chi} = \int_{\varepsilon}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1} \int_{E_n} \hat{G}_1\left(\frac{\xi - t}{v^{\alpha}}\right)\varphi(t)dt = -\int_{\varepsilon}^{h^{-1}} \frac{\partial}{\partial v}\varphi_v dv,$$

где
$$\varphi_v = v^{-|\alpha|}\int_{E_n} \hat{G}_0\left(\frac{\xi - t}{v^{\alpha}}\right)\varphi(t)dt.$$

Учитывая свойства средних $\varphi_v \xrightarrow{S} \varphi$, имеем
$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} (\varphi * \check{\chi}, \ell_{\Omega}) = (\ell_{\Omega}, \varphi),$$
т.е.
$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} (\nu_{\mu} * \ell_{\Omega}, P\varphi) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} (\varphi * \check{\chi}, \ell_{\Omega}) = (\ell_{\Omega}, \varphi). \tag{13}$$

Из работы [5] следует, что для $f \in S'_N$ выполняется
$$\mathcal{U}(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} \nu_{\mu} * f,$$
а для любой функции φ имеет место
$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} (u, P\varphi) = (f, \varphi). \tag{14}$$

Утверждение леммы следует из (13) и (14).

Лемма 3. *Пусть* $\ell_{\Omega}(x)$ *финитна и* $\ell_{\Omega}(x) \in \mathcal{L}_{p'}^{\mu^*}$. *Тогда*
$$\mathcal{U}(x) = \left(\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} \nu_{\mu} * \ell_{\Omega}\right) \in L_{p'}(E_n).$$

Доказательство. Обозначим $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} \nu_{\mu}(x) = \overset{\circ}{\nu}_{\mu}(x)$

Для доказательства достаточно получить оценку при $\varepsilon, h \to 0$ с константой, не зависящей от ε, h :

$$\|\ell_{\Omega} * \overset{\circ}{\nu}_{\mu}\|_{L_{p'}} = \sup_{\varphi \in L_p} \frac{|(\ell_{\Omega} * \overset{\circ}{\nu}_{\mu}, \varphi)|}{\|\varphi\|_{L_p}} =$$

$$= |(\ell_{\Omega} * \overset{\circ}{\nu}_{\mu}, \varphi)| = |(\overset{\circ}{\nu}_{\mu}, (\ell_{\Omega}(y)\eta(y)\varphi(x+y)))| =$$

$$= |(\ell_{\Omega}(y), \eta(y)(\overset{\circ}{\nu}_{\mu}(x)\varphi(x+y)))| =$$

$$= \left|\left(\ell_\Omega(y), \eta(y) \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} \int_{E_n}\int_{\varepsilon}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|}\hat{G}\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right)\varphi(x)\,dx\,dv\right)\right| =$$

$$= \left|\left(\ell_\Omega(y), \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} \iint_{E_n\ \varepsilon}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|}\hat{G}\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right)\varphi(x)\,dx\,dv\right)\right| \leq$$

$$\leq \|\ell_\Omega(y)\|_{\mathcal{L}^{\mu*}_{p'}} \cdot \left\|\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} \iint_{E_n\ \varepsilon}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|}\hat{G}\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right)\varphi(x)\,dx\,dv\right\|_{\mathcal{L}^{\mu}_{p}} =$$

$$= \|\ell_\Omega(y)\|_{\mathcal{L}^{\mu*}_{p'}} \cdot \left\|\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} \iint_{E_n\ \varepsilon}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|}P_y\hat{G}\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right)\varphi(x)\,dx\,dv\right\|_{L_p} =$$

$$= \|\ell_\Omega(y)\|_{\mathcal{L}^{\mu*}_{p'}} \cdot \left\|\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} \iint_{E_n\ \varepsilon}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1}\hat{G}_1\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right)\varphi(x)\,dx\,dv\right\|_{L_p} =$$

$$= \|\ell_\Omega(y)\|_{\mathcal{L}^{\mu*}_{p'}} \cdot \left\|\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} (\varphi_{h^{-1}} - \varphi_\varepsilon)\right\|_{L_p} \leq \|\ell_\Omega\|_{\mathcal{L}^{\mu*}_{p'}} \cdot \left(\|\varphi\|_{L_p} + \delta\right),$$

где $\delta \to 0$ при $h, \varepsilon \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0}} \|\ell_\Omega * \nu_\mu\|_{L_{p'}} \leq \|\ell_\Omega\|_{\mathcal{L}^{\mu*}_{p'}} . \tag{15}$$

Лемма 4. *Пусть*

$$\ell_\Omega(x) = \varepsilon_\Omega(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(x - x_k) -$$

функционал над пространством $\mathcal{L}^\mu_p$. *Тогда для* $\psi \in \mathcal{L}^\mu_p$ *справедливо*

$$(\ell_\Omega, \psi) = \int_{E_n} (\overset{\circ}{\nu}_\mu * \ell_\Omega) P\psi\,dx \tag{16}$$

и

$$\|\ell_\Omega\|_{\mathcal{L}^{\mu*}_{p'}} = \|\overset{\circ}{\nu}_\mu * \ell_\Omega\|_{L_{p'}} . \tag{17}$$

Доказательство. Так как $\psi \in \mathcal{L}^\mu_p$, то существует такая функция $f \in L_p$, где $f = P\psi$, что $\psi = P_{m-1}(x) + (\nu^\circ_\mu * f)$ и $(\ell_\Omega, \psi) =$ $= (\ell_\Omega, \nu^\circ_\mu * f) = (\hat{\ell}_\Omega, \hat{\nu}^\circ_\mu \cdot \hat{f}) = (\widehat{\nu^\circ_\mu} \cdot \hat{\ell}_\Omega, \hat{f}) = (\nu^\circ_\mu * \ell_\Omega, f) =$ $= \int_{E_n} (\ell_\Omega * \nu^\circ_\mu) f\,dx = \int_{E_n} (\ell_\Omega * \nu^\circ_\mu) P\psi\,dx$, т.е. получили равенство (16). Для доказательства (17) рассмотрим

$$\|\ell_\Omega\|_{\mathcal{L}^{\mu*}_{p'}} = \sup_{u \in \mathcal{L}^\mu_p} \frac{(\ell_\Omega, u)}{\|u\|_{\mathcal{L}^\mu_p}} =$$

(используя (16), имеем)

$$= \sup_{u\in \mathcal{L}_p^\mu} \frac{\int_{E_n} (\nu_\mu^0 * \ell_\Omega) P u\, dx}{\| P u \|_{L_p}} \leqslant$$

(применяя неравенство Гёльдера, получаем)

$$\leqslant \| \nu_\mu^0 * \ell_\Omega \|_{L_{p'}} . \qquad (19)$$

Соотношение (17) вытекает из (15) и (19).

Определение 4. Функцию $u_0(x) \in \mathcal{L}_p^\mu(E_n)$, $\| u_0 \|_{\mathcal{L}_p^\mu(E_n)} = 1$, для которой $\| \ell_\Omega \|_{\mathcal{L}_{p'}^{\mu*}} = (\ell_\Omega, u_0) = \| \nu_\mu^0 * \ell_\Omega \|_{L_{p'}}$, назовем экстремальной функцией функционала погрешности $\ell_\Omega(x)$ кубатурной формулы.

Замечание. Функционал

$$\ell_\Omega(x) = \varepsilon_\Omega(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(x - x_k)$$

при условии, что

$$\sum_{k=1}^{N} c_k^2 < \infty ,$$

принадлежит пространству $\mathcal{L}_p^{\mu*}$, если $|\alpha| < p$.

Действительно,

$$\| \ell_\Omega \|_{\mathcal{L}_p^{\mu*}} = \sup_{\varphi \in \mathcal{L}_{p'}^{\mu}} \frac{(\ell_\Omega, \varphi)}{\| \varphi \|_{\mathcal{L}_p^\mu}} = \frac{\int_\Omega \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi(x_k)}{\| \varphi \|_{\mathcal{L}_p^\mu}} <$$

$$< \frac{k_1 \max |\varphi| \cdot \sum_{k=1}^{N} c_k^2}{\| \varphi \|_{\mathcal{L}_p^\mu}} < \infty ,$$

где k_1 – const.

§ 3. Оптимальный периодический функционал погрешности

Пусть Ω_0 - фундаментальный параллелепипед, соответствующий матрице периодов H и $\det H = 1$.

Определение 5. Функцию $u \in S'(E_n)$ назовем периодической обобщенной функцией с периодом H, если

$$\big(u(x),\ \varphi(x) - \varphi(x + H\beta) \big) = 0 \qquad \forall \varphi \in S. \qquad (20)$$

Введем периодический функционал погрешности

$$\ell_0(x) = 1 - \sum_{\beta} \delta(x - H\beta) \qquad (21)$$

и рассмотрим его над пространством периодических функций $\varphi \in \tilde{\mathcal{L}}_p^\mu(\Omega_0)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_p^{\mu}(E_n)} = \|\mu \check{\hat{u}}\|_{L_p(\Omega_0)} =$$

$$= \left[\int_{\Omega_0} \left| \sum_{\beta} \mu(2\pi i H^{-1*}\beta) u_\beta \cdot e^{2\pi i H^{-1*}\beta x} \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{22}$$

где $u_\beta = \int_{\Omega_0} u(t) e^{-2\pi i H^{-1*}\beta t} dt.$

Для любой функции $\varphi \in S$ составим периодическую функцию

$$u(x) = \sum_{\beta} \varphi(x + H\beta)$$

и разложим ее в ряд Фурье

$$u(x) = \sum_{\beta} u_\beta \, e^{2\pi i H^{-1*}\beta x}.$$

Покажем, что

$$\int_{\Omega_0} Pu(x) dx = 0. \tag{23}$$

Имеем

$$\int_{\Omega_0} \int_{E_n} \mu(2\pi i \xi) \hat{u}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi dx =$$

$$= \int_{\Omega_0} \int_{E_n} \sum_{\gamma} \mu(2\pi i H^{-1*}\gamma) u_\gamma \delta(\xi - H^{-1*}\gamma) e^{2\pi i x \xi} dx d\xi =$$

$$= \sum_{\gamma} u_\gamma \cdot \mu(2\pi i H^{-1*}\gamma) \int_{\Omega_0} e^{2\pi i H^{-1*}\gamma x} dx = 0.$$

Далее покажем, что

$$\int_{E_n} (\ell_0 * \nu_\mu^0) P\varphi dx = \int_{\Omega_0} (\ell_0 * \nu_\mu^0) Pu \, dx.$$

Действительно,

$$\int_{\Omega_0} (\ell_0 * \nu_\mu^0) Pu \, dx = \sum_{\beta} \int_{\Omega_0} (\ell_0 * \nu_\mu^0) \int_{E_n} e^{2\pi i x \xi} \mu(2\pi i \xi) \hat{\varphi}(\xi) dx d\xi =$$

$$= \int_{\Omega_0} (\ell_0 * \nu_\mu^0) \sum_{\beta} \int_{E_n} \mu(2\pi i \xi) e^{2\pi i x \xi} \int_{E_n} e^{-2\pi i x \xi} \varphi(x + H\beta) dx d\xi =$$

$$= \int_{\Omega_0} (\ell_0 * \nu_\mu^0) \sum_{\beta} \int_{E_n} \mu(2\pi i \xi) \int_{E_n} e^{2\pi i (x - H^{-1*}\beta)\xi} \varphi(x) dx d\xi =$$

$$= \int_{\Omega_0} (\ell * \nu_\mu^0) \sum_{\beta} \int_{E_n} \mu(2\pi i \xi) e^{2\pi i (x - H^{-1*}\beta)\xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi =$$

$$= \int_{\Omega_0} (\ell_0 * \nu_\mu^\circ) \sum_\beta P\varphi(x - H^{-1^*}\beta)\,dx = \int_{E_n} (\ell_0 * \nu_\mu^\circ) P\varphi\, dx.$$

В силу определения 5 и (23), имеем

$$\int_{\Omega_0} \ell_0(x) u(x)\,dx = \int_{\Omega_0} (\nu_\mu^\circ * \ell_0) Pu\, dx =$$

$$= \int_{\Omega_0} \left[(\nu_\mu^\circ * \ell_0) + c\right] Pu\, dx. \qquad (24)$$

Из (24) следует, что

$$\|\ell_0\|_{\tilde{\mathcal{I}}_{p'}^{\mu^*}(\Omega_0)} \leq \|(\nu_\mu^\circ * \ell_0) + C\|_{L_{p'}}. \qquad (25)$$

С другой стороны,

$$\|\ell_0\|_{\tilde{\mathcal{I}}_{p}^{\mu^*}(\Omega_0)} \geq \|(\nu_\mu^\circ * \ell_0) + C\|_{L_{p'}}.$$

Действительно, положим $u_0 = (\nu_\mu^\circ * \psi)$,
где

$$\psi(x) = \frac{\left|(\nu_\mu^\circ * \ell_0) + c\right|^{\frac{1}{p-1}} sign\left((\nu_\mu^\circ * \ell_0) + c\right)}{\left(\int_{\Omega_0} \left|(\nu_\mu^\circ * \ell_0) + c\right|^{p'} dx\right)^{1/p}}.$$

Очевидно, что $\psi \in L_p$, $\|\psi\|_{L_p} = 1$, и поскольку $(u_0, P\varphi) = (\psi, \varphi)$, то

$$\|u_0\|_{\mathcal{I}_p^\mu} = \|\psi\|_{L_p} = 1,$$

$$\|\ell_0\|_{\tilde{\mathcal{I}}_p^{\mu^*}(\Omega_0)} \geq \frac{(\ell_0, u_0)}{\|u_0\|_{\mathcal{I}_p^\mu}} = (\ell_0, u_0) =$$

(используя (16), получаем)

$$= \int_{\Omega_0} (\nu_\mu^\circ * \ell_0) P u_0\, dx =$$

(учитывая определение u_0, имеем)

$$= \frac{\int_{\Omega_0} (\nu_\mu^\circ * \ell_0)^{1 + \frac{1}{p-1}} dx}{\left(\int_{\Omega_0} \left|(\nu_\mu^\circ * \ell_0)\right|^{p'} dx\right)^{1/p}} = \left(\int_{\Omega_0} |\nu_\mu^\circ * \ell_0|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \quad \forall \varphi \in S. \qquad (26)$$

Учитывая, что S плотно в L_p, а также (25) и (26), получаем

$$\|\ell_0\|_{\tilde{\mathcal{I}}_p^{\mu^*}(\Omega_0)} = \left(\int_{\Omega_0} \left|(\nu_\mu^\circ * \ell_0) + c\right|^{p'} dx\right)^{1/p'}.$$

Пусть

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad \ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n),$$

$$h_1^{\ell_1} = h_2^{\ell_2} = \ldots = h_n^{\ell_n} = \tilde{h}^{\ell^*}, \quad \frac{1}{\ell^*} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\ell_j}, \qquad (27)$$

$$\ell_0\left(\frac{x}{h}\right) = 1 - \sum_\beta (\det h)\,\delta(x - h\beta)$$

и Ω_{0h} - фундаментальная область, соответствующая матрице периодов hH.

Решением уравнения $PU = \ell_0(h^{-1}x)$ является функция

$$U\left(\frac{x}{h}\right) = \left(\left(\nu_\mu^\circ * \ell_0\left(\frac{x}{h}\right)\right) + C\right) = -\sum_\beta \frac{e^{2\pi i h^{-1}\beta x}}{\mu(2\pi i h^{-1}\beta)} K_\beta + C,$$

где $K_\beta = \int_0^\infty \frac{G_1(h^{-1}\beta v^{\alpha})}{v}\, dv.$

Используя свойства символа и (27), получаем

$$\|\ell_0(h^{-1}x)\|_{\tilde{\mathcal{I}}_p^{\mu^*}(\Omega_0)} = \left[\int_{\Omega_0} \left|(\nu_\mu^\circ * \ell_0)\tilde{h}^{\ell^*} + c\right|^{p'} dx\right]^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left[\int_{\Omega_0} \left|\left(c - \sum_\beta \frac{\tilde{h}^{\ell^*} e^{2\pi i h^{-1}\beta x}}{\mu(2\pi i\beta)}\right)\right|^{p'} dx\right]^{\frac{1}{p'}}. \qquad (28)$$

Условие минимальности нормы (28) по C равносильно соотношению

$$\int_{\Omega_0} \left|\left(\nu_\mu^\circ * \ell_0\left(\frac{x}{h}\right)\right) + c\right|^{\frac{1}{p-1}} \cdot \operatorname{sign}\left[\left(\nu_\mu^\circ * \ell_0\left(\frac{x}{h}\right)\right) + c\right] dx = 0 \qquad (29)$$

при $1 < p < \infty$.

Выберем $\overset{\circ}{c}_p$ из условия (29). Тогда

$$\inf_c \left\|\ell_0\left(\frac{x}{h}\right)\right\|_{\tilde{\mathcal{I}}_p^{\mu^*}(\Omega_0)} = \left\|\left(\nu_\mu^\circ * \ell_0\left(\frac{x}{h}\right)\right) + \overset{\circ}{c}_p\right\|_{L_p(\Omega_0)}.$$

Следовательно, оптимальному периодическому функционалу погрешности $\ell_0(h^{-1}x)$

соответствует экстремальная функция вида

$$\mathcal{U}_0(h^{-1}x) = \sum_{\gamma} \frac{C_\gamma e^{2\pi i h^{-1}\gamma x}}{\mu(2\pi i h^{-1}\gamma)} + \mathring{C}_p , \tag{30}$$

где

$$C_\gamma = \int_{\Omega_0} \left|\left(\mathring{v}_\mu * \ell_0\left(\frac{x}{h}\right)\right) + \mathring{C}_p\right|^{\frac{1}{p-1}} \cdot \operatorname{sign}\left[\left(\mathring{v}_\mu * \ell_0\left(\frac{x}{h}\right)\right) + \mathring{C}_p\right] e^{-2\pi i h^{-1}\gamma x} dx .$$

§ 4. Оценка снизу

Пусть Ω - ограниченная область в E_n с кусочно-гладкой границей $\Gamma(\Omega)$; $\rho(x,\Omega)$ - расстояние между точкой x и множеством Ω; $\frac{mes\,\Omega}{N} = \tilde{h}^n$;
$h = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix}$; $\tilde{h} = |h|$;

$$h^{-1}x = (h_1^{-1}x_1, h_2^{-1}x_2, \dots, h_n^{-1}x_n);\ \ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n),\ \frac{1}{\ell^*} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\ell_j} ;$$

$$h_1^{\ell_1} = \dots = h_n^{\ell_n} = \tilde{h}^{\ell^*};\quad \Omega'_{2h} = \{x \in \Omega;\ \rho(x, E_n \setminus \bar{\Omega}) > 2L\tilde{h},\ \tilde{h} > 0\} ;$$

$$\Omega'_h = \{x \in E_n,\ \rho(x, \Gamma(\Omega)) < 2L\tilde{h}\},\ \Omega_h = \Omega \setminus \Omega'_{2h} ;$$

Ω_{0h} - фундаментальная область, соответствующая матрице периодов hH , и $\Omega_{\beta h}$ - фундаментальная область, соответствующая сдвигу $hH\beta$, и $C_0^\infty(\Omega)$ - класс функций из $C^\infty(\Omega)$, равных нулю вне компактных подмножеств в Ω .

Определим класс функций $\mathring{\mathcal{L}}_p^\mu$ как замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $\|\varphi\|_{\mathcal{L}_p^\mu(E_{n_0})}$, а $\mathring{\mathcal{L}}_p^\mu(\Omega)$ - как подкласс в классе функций $\mathcal{L}_{p,\ell}^\mu(E_n)$. Норма $\mathring{\varphi} \in \mathring{\mathcal{L}}_p^\mu(\Omega)$ совпадает с ее нормой в $\mathcal{L}_{p,\ell}^\mu(E_n)$. Введем также пространство $\mathring{\mathcal{L}}_p^{\mu *}$, сопряженное $\mathring{\mathcal{L}}_p^\mu$. Функция $f \in \mathring{\mathcal{L}}_p^{\mu *}$, если

$$\|f\|_{\mathring{\mathcal{L}}_p^{\mu *}} = \sup_{\varphi \in \mathring{\mathcal{L}}_p^\mu} \frac{(f,\varphi)}{\|\varphi\|_{\mathring{\mathcal{L}}_p^\mu}} < \infty .$$

Отметим, что экстремальная функция $\mathcal{U}_0(h^{-1}x)$ достигает абсолютного максимума в точках решеток $h\beta$ (см., например, [1]).

Положим $\tilde{u}_0(h^{-1}x) = u_0(h^{-1}x) \cdot \|\ell_0(h^{-1}x)\|_{\tilde{\mathcal{L}}_p^{\mu *}(\Omega_{0h})}$

и

$$\tilde{v}_0(h^{-1}x) = \tilde{u}_0(h^{-1}x) - \tilde{u}_0(0) .$$

Функция $\tilde{v}_0(h^{-1}x)$ обладает следующими легкопроверяемыми свойствами:

1. $\tilde{v}_0(h^{-1}x) = \tilde{v}_0(h^{-1}x - \beta)$;

2. $\tilde{v}_0(\beta) = 0$ и $\tilde{v}_0(h^{-1}x) \geq 0$;

3. $\int\limits_{\Omega_{0h}} \tilde{v}_0(h^{-1}x)dx = (\det h)\left[\int\limits_{\Omega_0}\left|\sum_{\gamma}\frac{e^{2\pi i h^{-1}\gamma x}}{\mu(2\pi i h^{-1}\gamma)} + \mathring{C}_p\right|^{p'}dx\right]^{\frac{1}{p'}}$;

4. $\|\tilde{v}_0(h^{-1}x)\|_{\tilde{\mathcal{L}}_p^{\mu}(\Omega_0)} = \|u_0(h^{-1}x)\|_{\tilde{\mathcal{L}}_p^{\mu}(\Omega_0)}$.

Введем следующие функции: $\omega(h^{-1}x)$, $\psi_h(x)$, $\varphi_h(x)$.

Пусть $\omega(x) \in C_0^{\infty}(E_1)$, $\operatorname{supp}\omega(x) \subset [0,1]$, $|\omega(x)| \leq 1$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega(x)dx = 1$.

Положим, что для всех $x = (x_1, \dots, x_n)$ выполняются

$$\omega(x) = \prod_{j=1}^{n}\omega(x_j), \quad \psi_h(x) = (\det h)^{-1}\int\limits_{E_n}\omega\left(\frac{x-y}{h}\right)\varepsilon_{\Omega'_{2h}}(y)dy$$

и

$$\varphi_h(x) = \psi_h(x)\,\tilde{v}_0(h^{-1}x). \tag{31}$$

Из (31) следует, что функция $\psi_h(x)$ равна единице, когда $x \in \Omega'_{3h}$, $|\psi_h(x)| \leq 1$ при $x \in \Omega'_{2h}$, в остальных точках $x \in E_n$ она равна нулю.

Лемма 5. *Пусть $|\alpha| < p$, Ω - ограниченная область с кусочно-гладкой границей в E_n. При $\tilde{h} \to 0$ функция $\varphi_h(x) \in \mathring{\mathcal{L}}_p^{\mu}(\Omega)$, определенная в (31), удовлетворяет следующим условиям:*

а) $\varphi_h(x) = 0$, если $x = h\gamma$ или $x \bar{\in} \Omega'_{2h}$;

б) $$\int\limits_{E_n}\varphi_h(x)dx = \operatorname{mes}\Omega\left[\int\limits_{\Omega_0}\left|\sum_{\gamma}\frac{e^{2\pi i\gamma x}}{\mu(2\pi i h^{-1}\gamma)} + \mathring{C}_p\right|^{p'}dx\right]^{\frac{1}{p'}}(1 + o(\tilde{h})).$$

Доказательство. По построению функции $\varphi_h(x)$, имеем $\varphi_h(x) \in \mathring{\mathcal{L}}_p^{\mu}(\Omega)$ и $\varphi_h(x) = 0$, если $x = h\gamma$ или $x \bar{\in} \Omega'_{2h}$.

Из условия леммы следует, что

$$\operatorname{mes}\Omega'_{ih} = o(\tilde{h}). \tag{32}$$

Условие (32) и свойство функции $\psi_h(x)$ дают

$$\int\limits_{E_n}\varphi_h(x)dx = \int\limits_{\Omega'_{3h}}\tilde{v}_0(h^{-1}x)dx \cdot (1 + o(\tilde{h})). \tag{33}$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_{\Omega'_{3h}} \tilde{v}_0(h^{-1}x)dx = \sum_{h\gamma\in\Omega'_{3h}} \int\limits_{\Omega_{h\gamma}} \tilde{v}_0(h^{-1}x)dx =$$

$$= \operatorname{mes}\Omega'_{3h}\left[\int\limits_{\Omega_0}\left|\sum_\beta \frac{e^{2\pi i\beta x}}{\mu(2\pi i\beta)}\cdot\mathcal{K}_\beta \tilde{h}^{\ell^*}+\mathring{c}_p\right|^{p'}dx\right]^{\frac{1}{p'}}. \qquad (34)$$

Условие $\operatorname{mes}\Omega = \operatorname{mes}\Omega'_{3h}\left(1+O(\tilde{h})\right)$ и (33) доказывают лемму 5.

Теорема. *Пусть Ω - ограниченная область в E_n с кусочно-гладкой границей*

$$\mu(2\pi i\xi) = \sum_{i=1}^{n}|2\pi\xi_i|^{\ell_i},$$

$\ell_i=2m_i$, m_i - целые, $\ell_i>1$, $i=1,\dots,n$, и $|\alpha|<p$. Тогда при $|\tilde{h}|\to 0$ для любого функционала погрешности

$$\ell^{\mu}_{\Omega}(x) \simeq \varepsilon_{\Omega}(x) - \sum_{\gamma}(\det h)C_\gamma\delta(x-h\gamma) \qquad (35)$$

имеет место оценка

$$\|\ell^N_\Omega\|_{\mathring{L}^{\mu^*}_{p'}(\Omega)} \geqslant (\operatorname{mes}\Omega)^{\frac{1}{p'}}\left[\int\limits_{\Omega_0}\left|\sum_\beta \frac{e^{2\pi i\beta x}}{\mu(2\pi i\beta)}\mathcal{K}_\beta\tilde{h}^{\ell^*}+\mathring{c}_p\right|^{p}dx\right]^{\frac{1}{p'}}. \qquad (36)$$

Доказательство. Из условия $|\alpha|<p$ имеем

$$|(\ell^N_\Omega,\varphi_h)| = \left|\int\limits_{E_n}\varphi_h(x)dx\right| \leqslant \|\ell^N_\Omega\|_{\mathring{L}^{\mu^*}_{p}(\Omega)}\cdot\|\varphi\|_{\mathring{L}^{\mu}_{p}(\Omega)}, \qquad (37)$$

$$(\mu\hat{\varphi}_h)^{\vee} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^{2m_i}}{\partial x_i^{2m_i}}\tilde{u}_0(xh^{-1}), & \text{если } x\in\Omega'_{3h};\\ 0, & \text{если } x\bar{\in}\Omega'_{3h};\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^{2m_i}}{\partial x_i^{2m_i}}\psi_h(x)\tilde{u}_0(h^{-1}x), & \text{если } x\in\Omega'_{2h}\setminus\Omega'_{3h}. \end{cases} \qquad (38)$$

В полосе $\Omega'_{2h}\setminus\Omega'_{3h}$ производные от функции $\psi_h(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{\partial^{2m_i}}{\partial x_i^{2m_i}}\psi_h(x)\right| < \mathcal{K}h_i^{-2m_i}, \quad i=1,2,\dots,n,\ \mathcal{K}>0. \qquad (39)$$

Вычислим норму функции $\varphi_h(x)$ в $\mathring{L}^{\mu}_{p}(\Omega)$:

$$\|\varphi_h\|^{p}_{\mathring{L}^{\mu}_{p}(\Omega)} = \int\limits_{\Omega'_{3h}}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2m_i}}{\partial x_i^{2m_i}}\tilde{u}_0(h^{-1}x)\right|^{p}dx + \int\limits_{\Omega'_{2h}\setminus\Omega'_{3h}}|(\mu\hat{\varphi}_h)^{\vee}|^{p}dx. \qquad (40)$$

По построению $\tilde{u}_0(h^{-1}x)$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2m_i}}{\partial x_i^{2m_i}}\sum_{\gamma}\frac{C_\gamma e^{2\pi i h^{-1}\gamma x}}{\sum_{i=1}^{n}|2\pi h^{-1}\gamma|^{2m_i}}\cdot\|\ell_0(h^{-1}x)\|^{-\frac{1}{p-1}}_{\mathcal{I}^{\mu*}(\Omega_0)}=$$

$$=\sum_{\gamma}C_\gamma e^{2\pi i h^{-1}\gamma x}\cdot\|\ell_0(h^{-1}x)\|_{\mathcal{I}_p^{\mu*}(\Omega_0)},$$

где

$$C_\gamma=\int_{\Omega_{0h}}\left|\sum_{\beta}\frac{e^{2\pi i h^{-1}\beta x}}{\sum_{i=1}^{n}|2\pi h^{-1}\gamma|^{2m_i}}+\overset{\circ}{C}_p\right|^{\frac{1}{p-1}}\cdot\operatorname{sign}\left(\sum_{\beta}\frac{e^{2\pi i h^{-1}\beta x}}{\sum_{i=1}^{n}|2\pi h^{-1}\gamma|^{2m_i}}+\overset{\circ}{C}_p\right)e^{-2\pi i h^{-1}\gamma x}dx.$$

Учитывая это, вычислим первый интеграл в (40):

$$\int_{\Omega'_{3h}}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2m_i}}{\partial x_i^{2m_i}}\tilde{u}_0\right|^p dx=\sum_{h\beta\in\Omega'_{3h}}\int_{\Omega_{h\beta}}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2m_i}}{\partial x_i^{2m_i}}\tilde{u}(h^{-1}x)\right|^p dx=$$

$$=\sum_{h\beta\in\Omega'_{3h}}\int_{\Omega_{0h}}\left|\sum_{\gamma}C_\gamma e^{2\pi i h^{-1}\gamma x}\right|^p dx\cdot\|\ell_0(h^{-1}x)\|^{-p'}_{\mathcal{I}_p^{\mu*}(\Omega_0)}=$$

$$=\int_{\Omega_0}\left|\sum_{\gamma}\frac{e^{2\pi i\gamma x}}{\sum_{i=1}^{n}|2\pi h^{-1}\gamma_i|^{2m_i}}+\overset{\circ}{C}_p\right|^{p'}\cdot\|\ell_0(h^{-1}x)\|_{\mathcal{I}_p^{\mu*}(\Omega_0)}\cdot|\Omega|\cdot(1+o(\tilde{h})).$$

Дифференцируя по формуле Лейбница во втором интеграле из (40), учитывая (39) и $\operatorname{mes}(\Omega'_{2h}\setminus\Omega'_{3h})=o(\tilde{h})$, а также свойства функции $\tilde{u}_0(h^{-1}x)$, получаем

$$\int_{\Omega'_{2h}\setminus\Omega'_{3h}}\left|\sum_{i=1}^{n}|2\pi\xi_i|^{2m_i}\cdot\hat{\varphi}_h\right|^p dx=|\Omega|\cdot o(\tilde{h})\cdot\|\ell_0\|^{-p'}_{\tilde{\mathcal{I}}_p^{\mu*}(\Omega_0)}.$$

Из леммы 5, неравенства (37) и последних двух равенств следует доказательство теоремы.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974.- 808 с.
2. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных.- М.: Наука.- 455 с.
3. Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^{\psi}(E_n)$.- Мат.сб.,1963, т.60, № 3, с.325-353.
4. Бесов О.В., Ильин В.П.,Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.- М.: Наука, 1975.- 478 с.
5. Успенский С.В. О дифференциальных свойствах решений одного класса

псевдодифференциальных уравнений на бесконечности.- Сиб.мат.журн., 1972, т.13, № 3, с.665-678.

6. Успенский С.В., Чистяков Б.Н. О выходе на полином при стремлении $|x| \to \infty$ решений одного класса псевдодифференциальных уравнений.- Сиб. мат.журн., 1975, т.16, № 5, с.1053-1070.

7. Бесов О.В. Оценка ошибок кубатурных формул в пространствах С.Л.Соболева и их обобщения.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1977, т.143, с.42-56.

8. Рамазанов М.Д. Оптимальный функционал ошибки над периодическими функциями из $\widetilde{\mathcal{H}}_p^\mu$.-Сиб.мат.журн., 1972, т.13, № 1, с.225-229.

9. Половинкин В.И. Последовательности функционалов с пограничным слоем.- Сиб.мат.журн., 1974, т.15, № 2, с.413-429.

10. Шойнжуров Ц.Б. Асимптотически оптимальные кубатурные формулы с узлами в криволинейной решетке.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л.Соболева), Новосибирск, 1976, № 1, с.157-184.

11. Хамаев Е.А. О дифференциальных свойствах функций, принадлежащих пространству $\mathcal{L}_p^\mu(E_n)$.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л.Соболева), Новосибирск, 1979, № 1, с.136-153.