УДК 517.947.4

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СО СДВИГОМ КАРЛЕМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.Е.Бессчётнов (Новосибирск)

В настоящей статье изучается нётеровость односторонней интегродифференциальной краевой задачи линейного сопряжения со сдвигом, удовлетворяющим условию Карлемана.

Статья состоит из введения и четырех параграфов. Во введении дается постановка задачи, в § 1 краевой задаче ставится в соответствие интегродифференциальная система без сдвига, выписывается условие нётеровости этой системы, формулируются основные теоремы. В § 2 доказываются вспомогательные формулы, необходимые при вычислении коэффициентов системы без сдвига. В § 3 содержится доказательство основных теорем. В § 4 приводится три простых примера краевых задач, решение которых непосредственно сводится к решению задач рассматриваемого типа.

Полученные результаты могут быть использованы в приложениях, всюду, где решения представимы через аналитические функции и в краевом условии содержится сдвиг, удовлетворяющий условию Карлемана.

Введение

Пусть S^+ - конечная односвязная область комплексной плоскости $z=x+iy$, ограниченная замкнутым контуром Γ класса C^∞, $z=0\in S^+$, S^- - дополнение $S^+\cup\Gamma$ до полной комплексной плоскости. На контуре Γ определим сдвиг $\alpha:\Gamma\to\Gamma$. Сдвиг α будем называть прямым, если контур $\alpha\cdot\Gamma$ ориентирован положительно, обратным - в противном случае. На функциях $\sigma(t)$, заданных на контуре Γ, определим оператор сдвига $W:\sigma(t)\to\sigma(\alpha(t))$. Всюду ниже предполагается, что $\alpha(t)$ является диффеоморфизмом класса $C^\infty(\Gamma)$, $\alpha'(t)\neq 0$ $\forall t\in\Gamma$ и удовлетворяет условию Карлемана: $W^n=I$, $2\leq n<\infty$.

Введем в рассмотрение 2ℓ-мерные векторы:

$$\sigma_m(z)=N_{m,1}\varphi(z)+\overline{N_{m,2}\varphi(z)},\quad m=1,2,\dots,n, \tag{1}$$

где $N_{m,j}$ - интегродифференциальные операторы вида:

$$N_{m,j}\varphi=\sum_{k=0}^{p}a_k^{(m,j)}(z)\frac{d^k}{dz^k}\varphi+\int_0^z H^{(m,j)}(z,\bar z,\xi)\varphi(\xi)d\xi. \tag{2}$$

Здесь p - целое положительное число; $a^{(m,j)}(z)$, $H^{(m,j)}(z,\bar{z},\xi)$ - заданные на Γ $(\ell \times 2\ell)$ - матрицы, при этом $a_k^{(m,j)}(z) \in C^{\infty}(S^+ \cup \Gamma)$, а $H^{(m,j)}(z,\bar{z},\xi)$ являются аналитическими по $z, \bar{z}, \xi$ функциями в области $(D, \bar{D}, D)$, $D \supset S^+$; вектор $\varphi(z)$ аналитичен в S^+ и имеет размерность 2ℓ.

Задача. Найти аналитический в S^+ вектор $\varphi(z)$ класса $C^{\infty}(S^+ \cup \Gamma)$, удовлетворяющий краевому условию:

$$N\varphi \equiv \sum_{m=1}^{n} W^{m-1} \left[N_{m,1}^+ \varphi + \overline{N_{m,2}^+ \varphi} \right]_{\Gamma} = g(t_0), \tag{3}$$

где

$$N_{m,j}^+ \varphi = \sum_{k=0}^{p} a_{p-k}^{(m,j)}(t_0) \left[\frac{d^{p-k}}{dt_0^{p-k}} \varphi(t_0) \right]^+ + \int_0^{t_0} H^{(m,j)}(t_0, \bar{t}_0, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \tag{4}$$

а $g(t) = (g_1, \ldots, g_\ell)$ - заданный на Γ вектор класса $C^{\infty}(\Gamma)$.

Определение 1. Краевая задача (3) нётерова, если соответствующая однородная задача имеет конечное число линейно-независимых решений класса $C^{\infty}(\Gamma)$, аналитических в S^+. Неоднородная система (3) разрешима тогда и только тогда, когда правая часть $g(t) \in C^{\infty}(\Gamma)$ удовлетворяет конечному числу условий ортогональности.

Индексом задачи называется разность между числом линейно-независимых решений однородной системы и числом условий разрешимости неоднородной.

Краевая задача (3) является внутренней задачей линейного сопряжения. Задачи такого типа впервые рассматривались Карлеманом. Например, в [10] им была рассмотрена задача

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^+(t) + g(t),$$

где α - обратный сдвиг, $G(t)$, $g(t)$, $\alpha'(t)$ - функции класса $H_y(t)$, $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$. К рассматриваемому типу задач относится также задача [11]:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\overline{\Phi^+(t)} + g(t),$$

где α - прямой сдвиг, $G(t), g(t), \alpha'(t) \in H_y(t)$, $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$ и обобщенная задача Карлемана [12]:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^+(t) + Q(t)\overline{\Phi^+(t)} + g(t),$$

где $G(t), Q(t), h(t), \alpha'(t) \in H_y(t)$, $\alpha'(t) \neq 0$. Исследование нётеровости этих задач сводится к изучению нормальности или фредгольмовости соответствующих интегральных уравнений [1,2,13]. Там же можно найти другие варианты задачи (3).

Целью настоящей работы является нахождение условий нётеровости и вычисление индекса краевой задачи (3). Опираясь на результаты из [1-6], мы укажем ряд условий k на функции $a_{p-k}^{(m,j)}$ и ядра $H^{(m,j)}$, каждое из которых обеспечивает нётеровость краевой задачи (3). В конкретном случае достаточно выполнения одного из условий k. Первое (условие 0) накладывается на функции $a_p^{(m,j)}$, $m=1,\dots,n$; $j=1,2$, и состоит в невырожденности при всех $t\in\Gamma$ $(2n\ell \times 2n\ell)$- матрицы

$$S_p(t) = \begin{bmatrix} A_p^{(1)} & \alpha_t^{-p} W A_p^{(2)} & \dots & \alpha_t^{-p} W^{n-1} A_p^{(n-1)} \\ A_p^{(n)} & \alpha_t^{-p} W A_p^{(1)} & \dots & \alpha_t^{-p} W^{n-1} A_p^{(n-1)} \\ A_p^{(n-1)} & \alpha_t^{-p} W A_p^{(n)} & \dots & \alpha_t^{-p} W^{n-1} A_p^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_p^{(2)} & \alpha_t^{-p} W A_p^{(3)} & \dots & \alpha_t^{-p} W^{n-1} A_p^{(1)} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где

$$A_p^{(m)}(t) = J_{2\ell}\left[a_p^{(m,1)}, a_p^{(m,2)}\right]\uparrow, \tag{6}$$

$$J_{2\ell} = \begin{bmatrix} I_\ell & I_\ell \\ -iI_\ell & iI_\ell \end{bmatrix}, \tag{7}$$

I_n- единичная $(n\times n)$- матрица, а символ $[x_1, x_2]\uparrow$ означает вектор-столбец с компонентами x_1, x_2. Во втором условии $(k=1)$ используются матрицы $a^{(m,j)}$, их производные и матрицы $a_{p-1}^{(m,j)}$; в третьем условии $(k=2)$- матрицы $a_p^{(m,j)}$, $a_{p-1}^{(m,j)}$, их производные и матрицы $a_{p-2}^{(m,j)}$ и так далее. Наконец, в условии k (при $k=p+1, p+2, \dots$) используются коэффициенты разложения в ряд Тейлора по t матриц $H^{(m,j)}(t_0, \bar{t}_0, t)$. Подробно условия k мы сформулируем в § 1.

§1. Редукция краевой задачи к интегродифференциальной системе без сдвига. Основные теоремы

Известно [1], что аналитический в односвязной ограниченной области S^+ вектор $\varphi(z)$ класса $C^\infty(S^+\cup\Gamma)$ представляется интегралом

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t-z}\,dt + ic \tag{8}$$

с действительным вектором $\mu(t)\in C^\infty(\Gamma)$, постоянным вектором $c=\bar{c}$. При этом $\mu(t)$,

C восстанавливаются по $\varphi(z)$ однозначно. В силу формул Племеля-Привалова [2], имеем:

$$[\varphi(t_0)]^+ = \frac{1}{2}\mu(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t-t_0}\,dt + ic,$$

$$\left[\frac{d^p}{dt_0^p}\varphi(t_0)\right]^+ = \frac{d^p}{dt_0^p}\left[\frac{1}{2}\mu(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t-t_0}\,dt\right].$$

Нам понадобятся следующие операторы [3-5] :

$$\lambda^0_\pm \sigma = \frac{1}{2}\sigma(t_0) \pm \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sigma(t)}{t-t_0}\,dt,$$

$$\lambda^n_\pm \sigma = \frac{d^n}{dt_0^n}\,\lambda^0_\pm \sigma,$$

$$\lambda^{-n}_+ \sigma = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)\sigma(t)\,dt, \tag{9}$$

$$\lambda^{-n}_- \sigma = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)\sigma(t)\,dt,$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Здесь логарифм $\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)$ (соответственно $\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)$) при фиксированном $t\in\Gamma$ есть значение при $z=t_0\in\Gamma$ той ветви логарифма $\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)$ в S^+ (соответственно $\ln\left(1-\frac{t}{z}\right)$ в S^-), которая обращается в нуль при $z=0$ (соответственно при $z=\infty$). В обозначениях (9) предельные значения вектора $\varphi(z)$ и его производных при $S^+\ni z\to t_0\in\Gamma$ выражаются формулами

$$[\varphi(t_0)]^+ = \lambda^0_+\mu + ic, \quad \left[\frac{d^p}{dt_0^p}\varphi(t_0)\right]^+ = \lambda^p_+\mu, \quad p=1,2,\ldots,$$

поэтому граничные операторы $N^+_{m,j}$ можно переписать в виде

$$N^+_{m,j}\varphi = \sum_{k=0}^{p} a^{(m,j)}_{p-k}(t_0)\,\lambda^{p-k}_+\mu + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\int_0^{t_0}\frac{H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,\xi)}{t-\xi}\,d\xi\right]\mu(t)\,dt +$$

$$+\, i\left[a^{(m,j)}_0(t_0) + \int_0^{t_0} H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,\xi)\,d\xi\right]\cdot c. \tag{10}$$

Рассмотрим второе слагаемое формулы (10). Из этого интеграла, подобно тому как из сингулярного интегрального оператора выделяется характеристическая часть, можно выделить произвольное число операторов λ^{-n}_+. Действительно, так как для всех $t\neq t_0$

$$\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right) = \int_0^{t_0} \frac{d\xi}{\xi - t},$$

то справедливо равенство

$$\int_0^{t_0} \frac{H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,\xi)}{t-\xi} d\xi = -H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,t)\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right) + \\ + \int_0^{t_0} \frac{H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,\xi) - H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,t)}{t-\xi} d\xi .$$

Разложив ядро $H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,t)$ как функцию от t по формуле Тейлора в точке $t=t_0$, получим соотношение

$$H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,t) = \sum_{n=1}^{M} (-1)^n a_{-n}^{(m,j)} \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + H_M^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,t), \qquad (11)$$

где

$$a_{-n}^{(m,j)}(t_0) = (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,t)\Big|_{t=t_0},$$

$$(d/dt = t_s^{-1} d/ds,\ ds - \text{элемент дуги на } \Gamma), \qquad (12)$$

а $H_M^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,t)$ - остаточный член, имеющий при $t=t_0$ нуль порядка $\geqslant M$. Учитывая (11), (12), второе слагаемое формулы (10) в обозначениях (9) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\int_0^{t_0} \frac{H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,\xi)}{t-\xi} d\xi\right]\mu(t)dt = \sum_{k=1}^{M} a_{-k}^{(m,j)}(t_0)\lambda_+^{-k}\mu + R_M^{(m,j)}\mu, \quad (13)$$

где

$$R_M^{(m,j)}\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[H_M^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,t)\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right) + \hat H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,t)\right]\mu(t)dt, \quad (14)$$

а $\hat H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,t)$ - вполне определенная $(\ell \times 2\ell)$-матрица класса $C^\infty(\Gamma\times\Gamma)$.

Итак, для каждого из граничных операторов $N_{m,j}^{+}$ справедливо представление

$$N_{mj}^{+}\varphi = \sum_{k=0}^{p+M} a_{p-k}^{(m,j)}(t_0)\lambda_+^{p-k}\mu + R_M^{(m,j)}\mu + i\left[a_0^{(m,j)}(t_0) + \int_0^{t_0} H^{(m,j)}(t_0,\bar t_0,\xi)d\xi\right]c.$$

Учитывая эту формулу, а также обратимость представления (8), приходим к следующему утверждению:

Краевая задача (3) эквивалентна системе сингулярных интегродифференциаль-

ных уравнений со сдвигом

$$K(\mu,c)=\sum_{m=1}^{n} W^{m-1}\left[(K_{m,1}^{+}+\overline{K_{m,2}^{+}})\mu+i(\Lambda_{m,1}(t_0)+\overline{\Lambda}_{m,2}(t_0))c\right]=g(t_0) \qquad (15)$$

относительно действительного 2ℓ-вектора $\mu(t)$ класса $C^{\infty}(\Gamma)$ и действительного постоянного 2ℓ-вектора c с операторами

$$K_{m,j}^{+}\mu=\sum_{k=0}^{p+M} a_{p-k}^{(m,j)}(t_0)\lambda_{+}^{p-k}\mu+R_M^{(m,j)}\mu \qquad (16)$$

и матрицами

$$\Lambda_{m,j}(t_0)=\int_0^{t_0} H^{(m,j)}(t_0,\overline{t_0},\xi)d\xi+a_0^{(m,j)}(t_0). \qquad (17)$$

Отделяя реальную и мнимую части системы (15) и учитывая тождество $W\overline{b(t)}=\overline{Wb(t)}$, придем к действительной системе

$$N(\mu,c)\equiv Re\sum_{m=1}^{n} W^{m-1}K_m^{+}\mu+\Lambda\cdot c=\hat{g}(t_0), \qquad (18)$$

где

$$K_m^{+}\mu=\sum_{k=0}^{p+M} A_{p-k}^{(m)}(t_0)\lambda_{+}^{p-k}\mu+R_M^{(m)}\mu,\ \Lambda(t_0)=Re\sum_{m=1}^{n} W^{m-1}\Lambda_m(t_0),$$

$$A_{p-k}^{(m)}(t_0)=J_{2\ell}\left[a_{p-k}^{(m,1)},a_{p-k}^{(m,2)}\right]^{\uparrow},\ R_M^{(m)}=J_{2\ell}\left[R_M^{(m,1)},R_M^{(m,2)}\right]^{\uparrow}, \qquad (19)$$

$$\Lambda_m(t_0)=J_{2\ell}\left[i\Lambda_{m,1},-i\Lambda_{m,2}\right]^{\uparrow},\quad J_{2\ell}=\begin{bmatrix} I_\ell & I_\ell \\ -iI_\ell & iI_\ell \end{bmatrix},$$

$\hat{g}=(Reg,\Im g)$, а $[x_1,x_2]^{\uparrow}$ - вектор-столбец с компонентами x_1, x_2. По аналогии с [6] системе (18) можно сопоставить расширенную систему из $2n\ell$ уравнений без сдвига:

$$\tilde{N}(\rho,c)\equiv Re\,Q\cdot\rho+L\cdot c=f. \qquad (20)$$

Здесь Q - $(n\times n)$- матрица с операторными элементами $W^{q}K_m^{+}W^{n-q}$, $q=0,1,\dots,n$; $m=1,\dots,n$. Ее j-я строка Q_j выражается формулой

$$Q_j=W^{j-1}Q_1W^{n-j+1}\cdot P^{j-1}, \qquad (21)$$

где

$$Q_1=(K_1^{+},WK_2^{+}W^{n-1},\dots,W^{n-1}K_n^{+}W), \qquad (22)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I_{2\ell(n-1)} \\ I_{2\ell} & 0 \end{bmatrix} . \tag{23}$$

Далее, L-$(2n\ell \times 2\ell)$ -матрица

$$L = [\Lambda, W\Lambda, \ldots, W^{n-1}\Lambda]^{\dagger}, \tag{24}$$

наконец, $\rho = (\mu, W\mu, \ldots, W^{n-1}\mu)$, $f = (\hat{g}, W\hat{g}, \ldots, W^{n-1}\hat{g})$, а символ $[x_1, \ldots, x_n]^{\dagger}$ означает вектор-столбец с компонентами $x_1, \ldots, x_n$.

Известно [6], что условие Карлемана для обратного сдвига исчерпывается случаем $n=2$. В этой ситуации расширенная система выглядит просто:

$$Q = \begin{bmatrix} K_1^+ & WK_2^+W \\ K_2^+ & WK_1^+W \end{bmatrix}, \ L(t_0) = \begin{bmatrix} \Lambda \\ W\Lambda \end{bmatrix}, \ \Lambda(t_0) = Re\,[\Lambda_1 + W\Lambda_2]. \tag{25}$$

Существенным моментом настоящей работы является тот факт, что элементы $W^q K_m^+ W^{n-q}$ матрицы Q фактически являются операторами без сдвига [7,8] : с точностью до операторов вида (14) они выражаются линейным образом через операторы вида λ_+^m, λ_-^m (в случае прямого сдвига через операторы λ_+^m , при обратном - через λ_-^m). Используя этот факт, расширенную систему (20) можно записать в виде

$$\tilde{N}(\rho, c) = Re Q^+ \cdot \rho + L \cdot c = f. \tag{26}$$

В случае прямого сдвига оператор Q^+ системы (26) выражается формулой

$$Q^+\rho = \sum_{k=0}^{P+M} S_{p-k}(t_0)\lambda_+^{p-k}\rho + \tilde{R}_M\rho \tag{27}$$

(точнее, см.лемму 1 из §2). При обратном сдвиге оператор Q системы (20) содержит как операторы вида λ_+^m , так и операторы λ_-^m. Однако и в этом случае $Re Q = Re Q^+$ с оператором

$$Q^+\rho = \sum_{k=0}^{P+M} L_{p-k}(t_0)\lambda_+^{p-k}\rho + \tilde{R}_M\rho. \tag{28}$$

Выражение коэффициентов L_{p-k} мы приведем в §2 (лемма 2).

Установим связь краевой задачи (3) с действительной системой (26).

Теорема 1. *Каждому голоморфному решению* $\varphi(z)$ *класса* $C^\infty(S^+ \cup \Gamma)$ *задачи* (3) *отвечает действительное решение* $(\rho(t), c)$ *класса* $C^\infty(\Gamma)$ *системы* (26), *и обратно.*

Доказательство этой теоремы схематично можно изобразить диаграммой

$$(3) \Longleftrightarrow (15) \Longleftrightarrow (18) \Longleftrightarrow (20) \Longleftrightarrow (26).$$

Итак, пусть $\varphi(z)$ - голоморфное решение класса $C^\infty(S^+\cup\Gamma)$ задачи (3). В силу однозначности представления (8), вектору $\varphi(z)$ отвечает решение системы (15), и обратно. Утверждения (15) $\Longleftrightarrow$ (18), (20) $\Longleftrightarrow$ (26) очевидны: первое вытекает из самого построения системы (18), второе - из того факта, что система (26) есть другая форма записи системы (20). Остается доказать утверждение (18)$\Leftrightarrow$(20). По построению системы (20), имеем: (18)$\Rightarrow$(20). В основе доказательства обратного утверждения лежит следующая

Лемма 1. *Пусть $(\rho, c)=(\rho_1,\dots,\rho_n,c)(\rho_k - 2\ell$ - вектор класса $C^\infty(\Gamma)$, а c - постоянный 2ℓ -вектор) есть решение системы* (20). *Тогда вектор $(\theta\rho, c)$, где*

$$\theta\rho=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} W^{n-m}P^m\rho = (\mu, W\mu,\dots,W^{n-1}\mu), \tag{29}$$

также является решением системы (20), *при этом $\mu(t)$ есть 2ℓ -вектор класса $C^\infty(\Gamma)$, а P -матрица* (23).

Действительно, как нетрудно видеть, первая подсистема системы (20) на решениях вида (29) точно совпадает с системой (18).

Для доказательства леммы 1 к системе (20) слева применим оператор θ :

$$\theta Re\theta^+\rho + \theta L c = \theta f.$$

Имеют место следующие три тождества:

$$\theta L = L,\quad \theta f = f,\quad \theta Re Q^+ = Re Q^+\theta. \tag{30}$$

Первые два проверяются непосредственно, для доказательства третьего достаточно убедиться в том, что

$$W^{n-m}P^m Q^+ = Q^+ W^{n-m}P^m,\quad m=0,1,\dots,n-1. \tag{31}$$

С этой целью заметим сначала, что умножение матрицы Q^+ слева на матрицу P^m равносильно перестановке строк в Q^+ по правилу

$$(1,\dots,m,m+1,\dots,n) \longrightarrow (m+1,\dots,n,1,\dots,m).$$

Учитывая это, а также формулу (21) и условие Карлемана, находим, что j -я строка $A_j, j=1,\dots,n$, матрицы P^mQ^+ выражается формулой

$$A_j = W^{m+j-1}Q_1W^{n-m-j+1}\cdot P^{m+j-1}.$$

Следовательно, j-я строка D_j матрицы $W^{n-m}P^m\theta^+$ равна

$$D_j=\left[W^{j-1}Q_1^{n-j+1}\cdot P^{j-1}\right]\cdot W^{n-m}P^m = Q_j\cdot W^{n-m}P^m,$$

что и требовалось доказать.

Определение 2. Система (26) нётерова в $C^\infty(\Gamma)$, если а) ядро оператора $\tilde N$ конечномерно и состоит из бесконечно дифференцируемых функций, б) неоднородная система (26) разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть

$f \in C^{\infty}(\Gamma)$ удовлетворяет конечному числу условий

$$\int_{\Gamma} v_{\nu}(t) f(t)\, ds = 0, \quad \nu = 1, \dots, n' < \infty,$$

где $v_1, \dots, v_{n'}$ - все линейно-независимые решения сопряженной к (26) однородной системы $\tilde{N}^* v = 0$.

Из теоремы 1 вытекает следующий результат: если вещественная система (26) нётерова в $C^{\infty}(\Gamma)$, то краевая задача (3) также нётерова.

Сформулируем условия нётеровости в $C^{\infty}(\Gamma)$ системы (26). Система (26) нётерова в $C^{\infty}(\Gamma)$, если оператор Q^+ системы удовлетворяет одному из условий k $(k = 0, 1, \dots)$. Первое из них состоит в требовании невырожденности для всех $t \in \Gamma$ матрицы $S_p(t)$ оператора Q^+ (см. формулу (6)). При $k > 0$ условие k состоит в требовании существования конечной цепочки обратимых в $C^{\infty}(\Gamma)$ операторов $F_1, \dots, F_k$ таких, что композиция $Q^+ F_1 \dots F_k$ удовлетворяет условию 0 (см. [3-5, 9]). Существенно, что условие k при $k > 0$ также может быть выражено в терминах коэффициентов оператора Q^+.

Сформулируем условие k более точно. Следуя [5], скажем, что оператор Q^+ допускает F - преобразование, если матрица S_p удовлетворяет условиям: её ранг не превосходит числа $r < 2n\ell$; существует невырожденная на Γ матрица $A(t)$ класса $C^{\infty}(\Gamma)$ такая, что последние $2n\ell - r$ столбцов матрицы $S_p A_2$ равны нулю при всех $t \in \Gamma$.

Предположим, что оператор Q^+ допускает F - преобразование. Рассмотрим оператор

$$F_1 v = A \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \lambda_{10} I_{2n\ell - r} \end{bmatrix} A^{-1} v, \tag{32}$$

где $\lambda_{10}\psi = -\lambda_+^1(t\psi) + \lambda_-^0\psi$ - обратимый в $C^{\infty}(\Gamma)$ оператор [9]. Здесь $A = (A_1, A_2)$, $A_2 - (2n\ell \times (2n\ell - r))$ - матрица ранга r класса $C^{\infty}(\Gamma)$. Она составляется из линейно-независимых решений алгебраической системы $S_p X = 0$. Матрица A_1 произвольна, но такова, что матрица A не вырождена при всех $t \in \Gamma$. Она может быть найдена, например, решением системы алгебраических уравнений $\overline{A_2'}\, Y = 0$.

Оператор F_1 можно переписать иначе:

$$F_1 v = C_1(t)\, \lambda_+^1 v + C_0(t)\, \lambda_+^0 v + I_{2n\ell}\, \lambda_-^0 v + R v. \tag{33}$$

Здесь $$C_1(t) = (0, -t A_2) A^{-1},$$

$$C_0(t) = A \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{2n\ell - r} \end{bmatrix} A^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -t I_{2n\ell - r} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} A^{-1}.$$

Композиция Q^+F_1 снова имеет порядок p и представима формулой вида (27) с матрицами

$$S^{(1)}_{p-n}(t)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k+j=n+1-m}\binom{p-k}{m}S_{p-k}(t)C^{(m)}_{1-j}(t), \tag{34}$$

$$k,j\geq 0,\quad n=0,1,\dots,p+1+M.$$

Например, первая из них такова:

$$S^{(1)}_p(t)=\left(S_pA_1,-tS_{p-1}A_2-ptS_p\frac{d}{dt}A_2\right)A^{-1}. \tag{35}$$

Отметим, что ранг матрицы $S^{(1)}_p(t)$ не зависит от произвола, который имеется в выборе матрицы A (см. [3]).

Допустим, что $\det S^{(1)}_p(t)\neq 0$ при всех $t\in\Gamma$, т.е. композиция Q^+F_1 удовлетворяет условию 0. В этом случае говорим, что для оператора Q^+ выполнено условие 1.

Предположим теперь, что $\det S^{(1)}_p(t)=0$ при всех $t\in\Gamma$, но оператор Q^+F_1 допускает F - преобразования $F_2,\dots,F_k$. Если композиция $Q^+F_1\dots F_k$ удовлетворяет условию 0, то говорим, что для оператора Q^+ выполнено условие k.

Основными в настоящей работе являются следующие

Теорема 2. *Если оператор Q^+ системы (26) удовлетворяет условию k, то краевая задача (3) нётерова.*

Теорема 3. *Если α - прямой сдвиг, то индекс краевой задачи (3) вычисляется по формуле*

$$\varkappa=2\ell-\frac{1}{n\pi}\left[\arg S^{(k)}_p(t)\right]_\Gamma,$$

где $S^{(k)}_p(t)$ - первая символическая матрица оператора $Q^+F_1\dots F_k$, а F_i - операторы, составляющие конечную цепочку F -преобразований оператора Q^+.

Теорема 4. *Если α - обратный сдвиг, то индекс краевой задачи (3) вычисляется по формуле*

$$\varkappa=2\ell-\frac{1}{2\pi}\left[\arg\det L^{(k)}_p(t)\right]_\Gamma,$$

где $L^{(k)}_p(t)$ - первая символическая матрица оператора $Q^+F_1\dots F_k$, а F_i - операторы, составляющие конечную цепочку F -преобразований оператора Q^+.

§2. Вспомогательные утверждения

Лемма 2. *Пусть α - прямой сдвиг. Тогда для оператора Q системы (20) справедливо представление*

$$Q\rho \equiv Q^{+}\rho = \sum_{k=0}^{p+M} S_{p-k}(t_0)\lambda_{+}^{p-k}\rho + R_M\rho,$$

где R_M – интегральный оператор вида (14), а S_{p-k} – $(2n\ell \times 2n\ell)$ – матрица класса $C^{\infty}(\Gamma)$, которая при $k=0,\dots,M$ выражается формулой

$$S_{p-k}(t_0) = \begin{bmatrix} A_{p-k}^{(1)} & A_{p-k}^{(1,2)} & \dots & A_{p-k}^{(n-1,n)} \\ A_{p-k}^{(n)} & A_{p-k}^{(1,1)} & \dots & A_{p-k}^{(n-1,n-1)} \\ A_{p-k}^{(n-1)} & A_{p-k}^{(1,n)} & \dots & A_{p-k}^{(n-1,n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p-k}^{(2)} & A_{p-k}^{(1,3)} & \dots & A_{p-k}^{(n-1,1)} \end{bmatrix}, \tag{36}$$

где

$$A_{p-k}^{(m)}(t_0) = J_{2\ell}\left[a_{p-k}^{(m,1)}, a_{p-k}^{(m,2)}\right]^{t},$$

$$A_{p-k}^{(q,m)}(t_0) = \sum_{i=0}^{k} \beta_{i,p-k+i}(t_0)\, W^{q} A_{p-k+i}^{(m)}(t_0), \tag{37}$$

а $\beta_{i,p-k+i}(t_0)$ – вполне определенные функции класса $C^{\infty}(\Gamma)$, выражающиеся через $\alpha_t^{\Gamma}(t)$ и ее производные.

Лемма 3. *Пусть α – обратный сдвиг. Тогда для оператора $Re\,Q$ системы (20) справедливо представление*

$$Re\,Q = Re\,Q^{+},$$

где

$$Q_{\rho}^{+} = \sum_{k=0}^{p+M} L_{p-k}(t_0)\lambda_{+}^{p-k}\rho + R_{M,M}^{(-)}\rho.$$

$$L_{p-k}(t_0) = \begin{bmatrix} A_{p-k}^{(1)} & H_{p-k}^{(2)} \\ A_{p-k}^{(2)} & H_{p-k}^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$H_{p-k}^{(m)}(t_0) = \sum_{j=0}^{k} \omega_{j,p-k+j}(s)\,\overline{D_{p-k+j}^{(m)}(t_0)}, \tag{38}$$

$$D_{p-q}^{(m)}(t_0) = \sum_{i=0}^{q} \beta_{i,p-k+i}(t_0)\, W A_{p-q+i}^{(m)}(t_0),$$

а $\omega_{j,p-k+j}(s), \beta_{i,p-q+i}(t_0)$ – функции, выражающиеся через производные t_s', $\alpha_t'(t)$ соответственно. Наконец, $R_{M,M}^{(-)}$ есть оператор

$$\cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left[h_1(t,t_0)\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)+h_2(t,t_0)\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)+h_3(t,t_0)\right]\sigma(t)dt, \tag{39}$$

при этом $(4\ell\times4\ell)$ - матрицы $h_j(t,t_0), j=1,2$, имеют при $t=t_0$ нули порядка $>M$; $h_j(t,t_0)\in C^{\infty}(\Gamma\times\Gamma)$ при всех $j=1,2,3$.

Аналогом этих утверждений являются теоремы 1,2 из [7] или теоремы 1,2 из [8]. Поэтому мы укажем лишь основные моменты доказательства, опустив детали.

Для доказательства леммы 2 достаточно в матричный оператор Q системы (20) подставить формулы [7]

$$W^{q}\lambda_+^{p-k}W^{n-q}=\sum_{i=0}^{M}\beta_{i,p-k+i}(t_0)\lambda_+^{p-k+i}+R_M^{(+,p-k,q)}$$

и привести подобные члены.

Доказательство леммы 3 сложнее и проводится в два этапа. На первом этапе доказательства оператор Q расширенной системы (20) записывается в виде

$$Q=F^{+}+G^{-}+R_{M,M}^{(-)},$$

где $R_{M,M}^{(-)}$ - оператор вида (39), а

$$F^{+}\equiv\sum_{k=0}^{p+M}F_{p-k}(t_0)\lambda_+^{p-k},\quad G^{-}\equiv\sum_{k=0}^{p+M}G_{p-k}(t_0)\lambda_-^{p-k}.$$

Это представление получается в результате подстановки в оператор Q формул [7,8]:

$$W\lambda_+^{p-k}W=\sum_{i=0}^{p-k}\beta_{i,p-k+i}(t)\lambda_-^{p-k-i}+T_M^{(+,p-k)}.$$

На втором этапе оператор $\operatorname{Re}Q$ преобразуется к виду, который указан в лемме 3. Это делается с помощью тождеств

$$2\operatorname{Re}Q\equiv\left(F^{+}+\overline{G^{-}}+R_{M,M}^{(-)}\right)+\overline{\left(F^{+}+\overline{G^{-}}+R_{M,M}^{(-)}\right)},$$

$$\overline{\lambda_-^{k}}\equiv\sum_{m=0}^{k}\omega_{k,m}(s)\lambda_+^{k-m}+R_M^{(k)}.$$

Первое очевидно, второе проверяется по схеме из [5, §10], где доказано аналогичное представление для "плюсовых" операторов.

§3. Доказательство основных теорем

Доказательство теоремы 2. Пусть m - число линейно-независимых решений однородной задачи (3) над полем действительных чисел и m' - число условий

разрешимости соответствующей неоднородной задачи. Обозначим через n число линейно-независимых решений однородной расширенной системы (26) и через n' число условий разрешимости в $C^{\infty}(\Gamma)$ соответствующей неоднородной системы. По условию теоремы, оператор Q^{+} расширенной системы (26) удовлетворяет одному из условий k. Но, как мы уже отмечали, это условие достаточно для нётеровости в $C^{\infty}(\Gamma)$ системы. Отсюда заключаем, что числа n, n' конечны. Далее, согласно теореме 1, каждому голоморфному в S^{+} решению $\varphi(z)$ класса $C^{\infty}(S^{+}\cup\Gamma)$ задачи (3) отвечает действительное решение (ρ, c) класса $C^{\infty}(\Gamma)$ системы (26), и обратно. Следовательно, число m не превосходит числа n и потому конечно; условия разрешимости в $C^{\infty}(\Gamma)$ расширенной системы (26) необходимы и достаточны для разрешимости краевой задачи (3). Заменой переменной интегрирования они приводятся к виду

$$Re\int_{\Gamma} u_j(t)g(t)\,ds=0\,, \quad j=1,\dots,m',$$

где $u_1,\dots,u_{m'}$ принадлежат $C^{\infty}(\Gamma)$, линейно-независимы и легко вычисляются. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3,4 состоит в установлении связи индекса системы (15) с индексом расширенной системы (26) и может быть проведено по схеме из [6, гл. 2], хотя используемые нами операторы имеют более сложную структуру, нежели там. Не приводя доказательства полностью, укажем лишь на основные моменты.

Пусть, например, α - прямой сдвиг. Обозначим через B оператор

$$B=Re\sum_{m=1}^{n} W^{m-1}K_m^{+}\,.$$

Во-первых,

$$\begin{aligned} &\varkappa(K)=2\ell+\varkappa(B),\\ &\varkappa(\tilde{N})=2\ell+\varkappa(ReQ^{+}) \end{aligned} \tag{40}$$

и, во-вторых,

$$\varkappa(ReQ^{+})=n\varkappa(B). \tag{41}$$

Формулы (40) проверяются непосредственным подсчетом разностей $m-m', n-n'$, а доказательство формулы (41) сводится к проверке соотношений

$$\varkappa(ReQ^{+})=\sum_{j=0}^{n-1}\varkappa(B_j), \tag{42}$$

$$\varkappa(B_0)=\varkappa(B_1)=\dots=\varkappa(B_{n-1}), \tag{43}$$

где операторы B_j равны:

$$B_j=Re\sum_{m=1}^{n}\omega_{m-1}^{j}W^{m-1}K_{m,j}^{+},\ j=0,1,\dots,n-1$$

(ω_m - корень n-й степени из единицы, $B_0 \equiv B$) и образуют семейство нётеровых в $C^\infty(\Gamma)$ операторов. По аналогии с [6] эти операторы мы называем сопутствующими друг другу.

Справедливость равенства (42) устанавливается по аналогии с [6] (см. также [7,8]). Для доказательства соотношений (43) каждый из сопутствующих операторов B_j умножается справа на обратимый в $C^\infty(\Gamma)$ оператор λ_{10}^{-p} [9]. Так как композиция $K_m^+ \lambda_{10}^{-p}$ имеет нулевой порядок и выражается [4] формулой вида $K_m^+ \lambda_{10}^{-p} = b_m \lambda_+^0 + T_M^{(m)}$, то операторы $B_j \lambda_{10}^{-p}$, $j=0,1,\dots,n-1$, образуют семейство сопутствующих друг другу нётеровых в $C^\infty(\Gamma)$ сингулярных интегральных операторов. К ним применима лемма 7.4 из [6, гл.2] , откуда и следует требуемое. Далее, учитывая [4] , что

$$\varkappa(ReQ^+) = -\frac{1}{\pi}\left[\arg S_p^{(k)}(t)\right]_\Gamma ,$$

получаем утверждение теоремы 3. Теорема 4 доказывается аналогичным образом.

§4. Примеры

Всюду ниже ограничения на область S^+ , выписанные во введении, считаются выполненными.

Пример 1. В области S^+ рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z} u = 0 , \qquad u = u_1 + i u_2 , \tag{44}$$

$$(L_1 u + W L_2 u)_\Gamma = g, \tag{45}$$

где L_i - дифференциальные операторы,

$$L_i u = (a_{i1} u_z + a_{i2} u_{\bar z} + a_{i3} u) + (b_{i1} \bar u_z + b_{i2} \bar u_{\bar z} + b_{i3} \bar u), \tag{46}$$

W - оператор прямого сдвига с условием $W^2 = I$; $a_{ij}(t), b_{ij}(t), g(t)$ - функции класса $C^\infty(\Gamma)$, $u(z)$ - искомое решение класса $C^\infty(S^+ \cup \Gamma)$.

Требуется найти условие на коэффициенты $a_{ij}(t), b_{ij}(t)$, при котором краевая задача нётерова.

Поскольку произвольное решение уравнения (44) $u(z) = \varphi_1(z) + \overline{\varphi_2(z)}$ выражается через две аналитические в S^+ функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, то задача (44)-(46) равносильна следующей:

В ограниченной области S^+ найти голоморфный вектор $\varphi(z) = (\varphi_1, \varphi_2)$ класса $C^\infty(\Gamma)$, удовлетворяющий краевому условию

$$\sum_{m=1}^{2} W^{m-1}\left(N^{+}_{m,1}\varphi + \overline{N^{+}_{m,2}\varphi}\right)_{\Gamma} = g(t), \tag{47}$$

где
$$N^{+}_{11}\varphi = (a_{11}, b_{11})\frac{d}{dt}\varphi + (a_{13}, b_{13})\varphi,$$
$$N^{+}_{12}\varphi = (\bar{b}_{12}, \bar{a}_{12})\frac{d}{dt}\varphi + (\bar{b}_{13}, \bar{a}_{13})\varphi,$$
$$N^{+}_{21}\varphi = (a_{21}, b_{21})\frac{d}{dt}\varphi + (a_{23}, b_{23})\varphi,$$
$$N^{+}_{22}\varphi = (\bar{b}_{22}, \bar{a}_{22})\frac{d}{dt}\varphi + (\bar{b}_{23}, \bar{a}_{23})\varphi.$$

Эта задача является частным случаем задачи (3), рассмотренной выше. Оператор Q^{+} расширенной системы в данном случае выражается формулой

$$Q^{+} = \sum_{k=0}^{1} S_{1-k}(t_0)\lambda^{1}_{+} + R_{\infty}, \tag{48}$$

где R_{∞} - оператор с бесконечно дифференцируемым ядром, а

$$S_1(t) = J_4 \hat{S}_1(t), \quad S_0(t) = J_4 \hat{S}_0(t). \tag{49}$$

Здесь J_4 - (4x4) - блочно-диагональная матрица с блоками $J_2 = [(1,-i)^{\intercal}, (1,i)^{\intercal}]$, а матрицы $\hat{S}_1(t)$, $\hat{S}_0(t)$ таковы:

$$\hat{S}_1(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & \vdots & \alpha_t^{-1} W \begin{pmatrix} a_{21} & b_{21} \\ \bar{b}_{22} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} \\ \bar{b}_{12} & \bar{a}_{12} & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & b_{21} & \vdots & \alpha_t^{-1} W \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \\ \bar{b}_{12} & \bar{a}_{12} \end{pmatrix} \\ \bar{b}_{22} & \bar{a}_{22} & \vdots & \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_0(t) = \begin{bmatrix} a_{13} & b_{13} & \vdots & W \begin{pmatrix} a_{23} & b_{23} \\ \bar{b}_{23} & \bar{a}_{23} \end{pmatrix} \\ \bar{b}_{13} & \bar{a}_{13} & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{23} & b_{23} & \vdots & W \begin{pmatrix} a_{13} & b_{13} \\ \bar{b}_{13} & \bar{a}_{13} \end{pmatrix} \\ \bar{b}_{23} & \bar{a}_{23} & \vdots & \end{bmatrix}. \tag{50}$$

В соответствии с теоремой 2 §1, достаточным условием нётеровости задачи (47) и, следовательно, задачи (44)-(46) является выполнение оператором (48) одного из условий k. Условие 0 для него состоит в требовании невырожденности на Γ матрицы $\hat{S}_1(t)$. В условии 1 требуется невырожденность при всех $t \in \Gamma$ матрицы

$$S_1^{(1)}(t) = J_4\left[\hat{S}_1 A_1, -t\hat{S}_0 A_2 - t\hat{S}_1 \frac{d}{dt} A_2\right] A^{-1}.$$

Последнее проверяется лишь тогда, когда не выполнено условие 0.

Пусть, например, коэффициенты краевой задачи (44)-(46) таковы, что

$$a_{11} = a_{12} = b_{12} = a_{21} = a_{22} = b_{22} = 0,$$

$$\bar{b}_{12} \neq 0\ ,\ \bar{b}_{21} \neq 0 \tag{51}$$

или

$$a_{11} = a_{13} = a_{21} = a_{12} = a_{22} = a_{23} = b_{11} = b_{21} = b_{13} = 0,$$

$$\frac{\bar{b}_{12}}{\bar{b}_{22}} \neq W\frac{\bar{b}_{22}}{\bar{b}_{12}}, \qquad b_{23} \neq 0. \tag{52}$$

В первом случае оператор (48) удовлетворяет условию 0, поскольку при всех $t \in \Gamma$ матрица $\hat{S}_1(t)$ равна:

$$\hat{S}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_t^{-1} W b_{21} \\ \bar{b}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_t^{-1} W \bar{b}_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

Во втором случае условие 0 не выполняется, так как

$$\hat{S}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b}_{12} & 0 & \alpha_t^{-1} \cdot W \bar{b}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b}_{22} & 0 & \alpha_t^{-1} W \bar{b}_{12} & 0 \end{bmatrix},$$

но, как мы сейчас покажем, выполняется условие 1. Действительно, по определению, столбцами матрицы $A_2(t)$ являются линейно-независимые решения алгебраической системы $S_1(t)X = 0$. Учитывая (52), не нарушая общности, ее можно взять в виде

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Присоединив к ней слева матрицу $[e_1, e_3]$, где e_i - i-й четырехмерный орт, получим матрицу $A(t) = (A_1, A_2)$. После несложных вычислений получим:

$$S_1^{(1)}(t) = J_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -tWb_{23} \\ \bar{b}_{12} & \alpha_t^{-1} W \bar{b}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t\bar{b}_{23} & 0 \\ \bar{b}_{22} & \alpha_t^{-1} W \bar{b}_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

откуда следует $\det S_1^{(1)}(t) \neq 0$ при всех t .

Примерами 2,3 мы покажем, что в краевом условии (45) сдвиг α существенным образом влияет на нётеровость задачи (44)-(46).

Пример 2. Пусть S^+ - единичный круг. Требуется найти голоморфное решение $u(z)$ класса $C^\infty(S^+\cup\Gamma)$ уравнения (44), удовлетворяющее на границе круга условию

$$\left[(u_z - t u_{\bar z}) + (-\bar t \bar u_z + \bar u_{\bar z})\right]_\Gamma = g(t), \tag{53}$$

где $g(t)\in C^\infty(\Gamma)$.

Эта задача равносильна следующей: найти определенный в единичном круге S^+ голоморфный вектор $\varphi(z)=(\varphi_1,\varphi_2)$ класса $C^\infty(S^+\cup\Gamma)$, удовлетворяющий краевому условию

$$(1,-\bar t)[\varphi']^+ + \overline{(1,-\bar t)[\varphi']}^+ = g(t). \tag{54}$$

Задача (54) не является нётеровой, поскольку число линейно-независимых решений однородной задачи бесконечно, в чем можно убедиться, взяв в качестве предельных значений $\varphi_1^+(t),\varphi_2^+(t)$ компонент $\varphi_1(z),\varphi_2(z)$ вектора $\varphi(z)$ функции $(1/k+1)t^{k+1}$, $(1/k+2)t^{k+2}$.

Ситуация в корне меняется, если в краевое условие (54) добавить определенным образом подобранное слагаемое, содержащее сдвиг.

Пример 3. Найти голоморфное в единичном круге S^+ решение $u(z)$ уравнения (44) класса $C^\infty(\Gamma\cup S^+)$, удовлетворяющее на границе круга условию

$$(u_z - t u_{\bar z}) + (-t\bar u_z + \bar u_{\bar z}) + W(\bar u_z + \bar t \bar u_{\bar z})\Big|_\Gamma = g, \tag{55}$$

где W - оператор прямого сдвига с условием $W^2=I$.

Задача (44),(55) равносильна следующей: найти голоморфный в круге S^+ вектор $\varphi(z)=(\varphi_1,\varphi_2)$ класса $C^\infty(S^+\cup\Gamma)$, удовлетворяющий граничному условию

$$(1,-\bar t)(\varphi')^+ + \overline{(1,-\bar t)(\varphi')^+} + W\left[(0,1)(\varphi')^+ + \overline{(t,0)(\varphi')^+}\right] = g. \tag{56}$$

Эта задача, в отличие от задачи (44),(54), является нётеровой. Действительно, оператор Q^+ расширенной системы в рассматриваемом случае выражается формулой

$$Q^+ = S_1(t)\lambda_+^1 + R_\infty,$$

где R_∞ - интегральный оператор с бесконечно дифференцируемым ядром, матрица $S_1(t)$ выражается формулой $S_1(t) = J_4\hat S_1(t)$, где

$$\hat S_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\bar t & 0 & \alpha_t^{-1} \\ 1 & -\bar t & \alpha_t^{-1}\alpha(t) & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_t^{-1} & -\alpha_t^{-1}\overline{\alpha(t)} \\ t & 0 & \alpha_t^{-1} & -\alpha_t^{-1}\overline{\alpha(t)} \end{bmatrix}.$$

После элементарных вычислений находим: $det\,\hat{S}_1(t) = t\alpha(t)\alpha_t^{-2}(t) \neq 0$. Следовательно, оператор Q^+ удовлетворяет условию 0. Отсюда и в силу теоремы 2 §1 заключаем: краевая задача (56) нётерова, поэтому нётерова также и краевая задача (44),(55).

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.- М.: Наука, 1968.- 511 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи.- М.: Наука, 1963.- 640 с.
3. Сакс Р.С. Об одном классе сингулярных интегродифференциальных уравнений.- Дифференц.уравнения, 1969, т.5, № 1, с. 115-137.
4. Сакс Р.С. Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений.- Новосибирск, 1975.- 164 с.
5. Сакс Р.С. Об одномерных сингулярных интегродифференциальных операторах, приводимых к нормальному типу.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л.Соболева), 1976, №2, с.83-106.
6. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.- М.: Наука, 1977.-448 с.
7. Бессчётнов М.Е. О некоторых классах нормально разрешимых систем одномерных сингулярных интегродифференциальных уравнений со сдвигом.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л.Соболева), 1977, №1, с.5-24.
8. Бессчётнов М.Е. О некоторых классах одномерных сингулярных интегродифференциальных уравнений со сдвигом.- Сиб.мат.журн., 1978, т.19, №3, с.515-529.
9. Товмасян Н.Е. К теории интегральных уравнений.- Дифференц. уравнения, 1967, т.3, №1, с.74-80.
10. Carleman T. Sur la theorie des equations et ses applications.- Verhandl des internat. Mathem.Congr., 1, Zürich, 1932, p.138-151.
11. Хасабов Э.Г. Краевая задача типа задачи Карлемана.- Изв.вузов, Математика, 1963, №2, с.124-133.
12. Литвинчук Г.С., Хасабов Э.Г. О краевой задаче Гильберта со сдвигом.- Докл.АН СССР, 1962, т,142, №2, с.274-277.
13. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.- М.: Наука, 1970.- 380 с.
14. Кордзадзе Р.А. Общая краевая задача со сдвигом для уравнений эллиптического типа второго порядка.- Докл.АН СССР, 1964, т.155, №4, с.739-742.