УДК 517.946

ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Л.А.Исакова (Новосибирск)

Критерий корректности задачи Коши для уравнения с постоянными коэффициентами был получен в известной работе [1]. В данной работе описаны корректные краевые задачи для так называемого элементарного оператора Петровского нечетного порядка [2], а в качестве применения основного результата рассмотрены (локально по t) общие краевые задачи для уравнения Кортевега-де Фриза.

Описанию корректных краевых задач для классических уравнений посвящены, например, работы [3 - 8]; для неклассических уравнений (квазиэллиптических, квазигиперболических) - работы [9, 10].

Введем обозначения:

$$R_2^+ = \{(x,t): x\in R,\ t>0\},\quad D=\{(x,t): 0<x<1,\ 0<t<T\},$$

$$Q=\{(x,t): 0<x<1,\ t\in R\},\quad Q_T=\{(x,t): 0<x<1,\ t<T\},$$

m, ℓ, p, k - целые числа; s - действительное число; $s\geq 0$, $[s]$ - целая часть s; $H^{s;\gamma}(R)$ - пространство, полученное замыканием функций $C_0^\infty(R)$ по норме:

$$\langle u\rangle_{s;\gamma} = \left(\int |\tau|^{2s}\,|\hat u(\tau)|^2\,d\sigma\right)^{1/2},\quad \tau=\sigma-i\gamma,\ \sigma\in R,\ \gamma>1,$$

$\dot H^s(-\infty,T)=\{u\in H^s(-\infty,T): u=0$ при $t<0\}$, где пространство $H^s(-\infty,T)$ определено, например, в [11];

$W_2^{m,\ell}(R)$ - пространство функций, для которых конечна норма

$$|u|_{m,\ell}=\Big(\sum_{|\alpha|\leq m}\|D_t^\alpha u\|^2+\sum_{|\alpha|\leq\ell}\|D_x^\alpha u\|^2\Big)^{1/2};$$

$C([0,1],E)$ - пространство непрерывных на $[0,1]$ функций со значениями в гильбертовом пространстве E (см. [11]);

$H^{s,p}(Q_T)$ - пространство, полученное замыканием функций $C^\infty(\bar Q_T)$, таких что $u=0$ при $t<0$, по норме

$$\|u\|_{s,p}=\sum_{k=0}^{[s]}|D_x^k u|_{C([0,1],H^{(s-k)/p}(-\infty,T))}.$$

Всюду ниже C- константа, не зависящая от $f, g_1, \dots, g_p$.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$Pu \equiv D_t u - D_x^p u = f \quad \text{в } D, \quad p = 2\ell+1, \quad \ell = 1, 2, \dots ; \tag{1}$$

$$B_j u\big|_{x=0} = g_j(t), \ j=1,\dots,\ell, \quad B_j u\big|_{x=1} = g_j(t), \ j=\ell+1,\dots,p, \ 0<t<T, \tag{2}$$

$$u(x,0)=0, \quad 0<x<1, \tag{3}$$

где

$$B_j = \sum_{k=0}^{b_j} a_{jk}(t) D_x^k, \quad a_{jb_j} \equiv 1, \quad a_{jk} \in C^\infty(R), \ k=0,\dots,b_j, \ j=1,\dots,p, \ b_j \in N.$$

Однородное уравнение (1) будем обозначать через (1^0), а соответствующую краевую задачу - через (1^0)- (3). Определим $b = \max b_j$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in W_2^{m,pm+1}(Q_T)$, $f=0$ *при* $t<0$, $g_j \in \dot H^{(p(m+1)-b_j-\frac{1}{2})/p}(-\infty,T)$, $j=1,\dots,p$. *Если* $b \le p(m+1)-1$ *и*

$$b_i - b_j \ne pn, \ i \ne j, \ i,j=1,\dots,\ell, \quad b_i - b_j \ne pn, \ i \ne j, \ i,j=\ell+1,\dots,p, \tag{4}$$

то существует единственное решение $u \in H^{p(m+1)-\frac{1}{2},p}$ *задачи* (1) - (3), *удовлетворяющее оценке:*

$$\|u\|_{p(m+1)-\frac{1}{2},p} \le C\left(\sum_{j=1}^{p} \langle g_j \rangle_{(p(m+1)-b_j-\frac{1}{2})/p} + |f|_{m,pm+1}\right), \tag{5}$$

где константа C *не зависит от* f *и* $g_1,\dots,g_p$.

Докажем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть*

$$B_j = D_x^{b_j}, \quad g_j \in \dot H^{(s-b_j)/p}(-\infty,T), \quad j=1,\dots,p, \quad s > p/2.$$

Если выполнено условие (4) *и* $b \le s$, *то задача* (1^0)- (3) *имеет решение* $u \in H^{s,p}(Q_T)$, *удовлетворяющее неравенству:*

$$\|u\|_{s,p} \le C \sum_{j=1}^{p} \langle g_j \rangle_{(s-b_j)/p}, \tag{6}$$

где константа C *не зависит от* $g_1,\dots,g_p$.

Доказательство. Пусть $\tilde g_j \in \dot H^{(s-b_j)/p}(R)$-продолжение функций g_j на всю прямую, причем оператор продолжения непрерывен. Рассмотрим задачу (1^0)-(2) в полосе Q и применим к ней преобразование Фурье с весом $e^{-\gamma t}$. Получим следующую задачу:

$$P(D_x,\tau)u \equiv \tau\hat u - D_x^p \hat u = 0, \quad \tau = \sigma - i\gamma, \quad \sigma \in R, \quad \gamma > 1, \tag{7}$$

$$B_j \hat u\big|_{x=0} = \hat{\tilde g}_j, \quad j=1,\dots,\ell, \quad B_j \hat u\big|_{x=1} = \hat{\tilde g}_j, \quad j=\ell+1,\dots,p. \tag{8}$$

Пусть $\xi_1(\tau),\dots,\xi_p(\tau)$ - корни полинома $P(\xi,\tau) = \tau - \xi^p$ и $\xi_j = \xi_{j1} + i\xi_{j2}$, $j=1,\dots,p$. Так как $\tau = \sigma - i\gamma$, $\sigma \in R$, $\gamma > 1$, то $\xi_{j2} \ne 0$, $j=1,\dots,p$, причем мнимая часть ℓ корней положительна, а остальных $\ell+1$ корней - отрицательна. Будем счи-

тать для определенности, что $\xi_{j2} > 0$, $j=1,\dots,\ell$, $\xi_{j2} < 0$, $j=\ell+1,\dots,p$.

Пусть $\hat{u}(x,\tau)$- общее решение уравнения (7) :

$$\hat{u}(x,\tau) = \widehat{e^{-\gamma t} u(x,\sigma)} = \sum_{j=1}^{\ell} C_j(\tau) e^{ix\xi_j(\tau)} + \sum_{j=\ell+1}^{p} C_j(\tau) e^{i(x-1)\xi_j(\tau)}. \quad (9)$$

Для нахождения коэффициентов $C_1,\dots,C_p$, используя условие (8), получим систему:

$$\begin{aligned}
&C_1\xi_1^{b_1}+\dots+C_\ell\xi_\ell^{b_1}+C_{\ell+1}\xi_{\ell+1}^{b_1}e^{-i\xi_{\ell+1}}+\dots+C_p\xi_p^{b_1}e^{-i\xi_p}=\hat{g}_1,\\
&\vdots\\
&C_1\xi_1^{b_\ell}+\dots+C_\ell\xi_\ell^{b_\ell}+C_{\ell+1}\xi_{\ell+1}^{b_\ell}e^{-i\xi_{\ell+1}}+\dots+C_p\xi_p^{b_\ell}e^{-i\xi_p}=\hat{g}_\ell,\\
&C_1\xi_1^{b_{\ell+1}}e^{i\xi_1}+\dots+C_\ell\xi_\ell^{b_{\ell+1}}e^{i\xi_\ell}+C_{\ell+1}\xi_{\ell+1}^{b_{\ell+1}}+\dots+C_p\xi_p^{b_{\ell+1}}e^{-i\xi_p}=\hat{g}_{\ell+1},\\
&\vdots\\
&C_1\xi_1^{b_p}e^{i\xi_1}+\dots+C_\ell\xi_\ell^{b_p}e^{i\xi_\ell}+C_{\ell+1}\xi_{\ell+1}^{b_p}+\dots+C_p\xi_p^{b_p}e^{-i\xi_p}=\hat{g}_p.
\end{aligned} \quad (10)$$

Определитель системы (10) обозначим через $\det A$:

$$\det A = \sum_{i=1}^{\tau} A_i B_i,$$

где A_i - минор порядка $\ell\times\ell$, а B_i - минор порядка $(\ell+1)\times(\ell+1)$, соответствующий A_i , причем

$$A_1 = \begin{vmatrix} \xi_1^{b_1} & \dots & \xi_\ell^{b_1} \\ \vdots & & \\ \xi_1^{b_\ell} & \dots & \xi_\ell^{b_\ell} \end{vmatrix}, \qquad B_1 = \begin{vmatrix} \xi_{\ell+1}^{b_{\ell+1}} & \dots & \xi_p^{b_{\ell+1}} \\ \vdots & & \\ \xi_{\ell+1}^{b_p} & \dots & \xi_p^{b_p} \end{vmatrix}.$$

Покажем, что условие (4) гарантирует оценку:

$$|\det A| \geq C|\tau|^{(b_1+\dots+b_p)/p}. \quad (11)$$

Пусть $b_j = pn_j + b_j'$, $b_j' = 0,\dots,p-1$, $n_j = 0,1,\dots$. В силу условия (4), $b_i' \neq b_j'$, $i\neq j$, $i,j=1,\dots,\ell$ и $b_i'' \neq b_j'$, $i\neq j$, $i,j=\ell+1,\dots,p$. Замечая, что

$$\xi_j = e^{2\pi i(j-1)/p}\xi_1, \quad j=2,\dots,p,$$

и, следовательно,

$$\xi_j^{b_i} = e^{2\pi i(j-1)b_i'/p}\xi_1^{b_i},$$

можно проверить, что

$$A_1=\xi_1^{b_1+\ldots+b_\ell}(a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)\ldots(a_\ell-a_1)(a_\ell-a_2)\ldots(a_\ell-a_{\ell-1}),$$

$$B_1=\xi_1^{b_{\ell+1}+\ldots+b_p}e^{2\pi i(b'_{\ell+1}+\ldots+b'_p)\ell/p}(a_{\ell+2}-a_{\ell+1})\ldots(a_p-a_{\ell+1})(a_p-a_{\ell+2})\ldots(a_p-a_{p-1}),$$

где $a_j=e^{2\pi i b'_j/p}$, $j=1,\ldots,p$. Так как

$$e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_2}=2i\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)/2}$$

и

$$\sin{}^{\pi k}/_p\geq\sin{}^{\pi}/_p,\quad k=1,\ldots,p-1,\quad\text{то}\quad|A_1B_1|\geq C'_1|\tau|^{(b_1+\ldots+b_p)/p}2|\sin{}^{\pi}/_p|.$$

Кроме того,

$$|A_iB_i|\leq C'_i|\tau|^{(b_1+\ldots+b_p)/p}\Big|\sum_{j=1}^{p}\delta_j e^{-i\xi_j}\Big|,\ \delta_j=0,1,\ \sum_{j=1}^{p}\delta_j\neq0,\quad i=2,\ldots,z,$$

где $C'_1,\ldots,C'_z$ не зависит от τ. Отметим, что

$$\xi_{j2}\geq|\tau|^{1/p}\sin{}^{\pi}/_p,\quad j=1,\ldots,\ell.$$

При достаточно большом γ справедлива оценка (11), и коэффициенты $C_1,\ldots,C_p$ определяются из системы (10) однозначно, причем

$$|C_i|\leq C\sum_{j=1}^{p}|\tau|^{-b_j/p}|\hat{g}_j|,\quad i=1,\ldots,p. \qquad (12)$$

Положим

$$\tilde{u}(x,t)={}^1/_{2\pi}\int e^{it\sigma+\gamma t}\hat{u}(x,\tau)d\sigma.$$

Очевидно, что функция $\tilde{u}$ - обобщенное решение уравнения (1°) в полосе, удовлетворяющее граничным условиям (2) с $\tilde{g}_j$, $j=1,\ldots,p$, в правых частях. Покажем, что $\tilde{u}=0$ при $t<0$. В силу теоремы Пэли-Винера [12], функция $e^{-\gamma t}\tilde{u}=0$ при $t<0$, если $\hat{u}(x,\tau)=\widehat{e^{-\gamma t}\tilde{u}}(x,\sigma)$ как функция комплексного переменного $\sigma=\alpha+i\beta$ является аналитической при $\beta<0$ и

$$\int_R|\hat{u}(x,\tau)|^2d\alpha<C\quad\text{при}\quad\beta\in[-\infty,0].$$

Эти условия выполнены в силу оценки (12), соотношения

$$|\tau|^{-b_j/p}\leq|\beta-\gamma|^{-b_j/p}\leq\gamma^{-b_j/p}<1$$

и того факта, что $e^{(\beta-\gamma)t}\tilde{g}_j\in\dot{H}^0(R)$ при $\beta\in[\infty,0]$, $j=1,\ldots,p$. С помощью интерполяционных неравенств [11] можно проверить справедливость следующих утвер-

ждений:

функция $u \in H^{s;\gamma}(R)$ тогда и только тогда, когда $e^{-\gamma t}u \in H^{s}(R)$, и

$$C_1 < e^{-\gamma t} u >_s \le < u >_{s;\gamma} \le C_2 < e^{-\gamma t} u >_s \, ; \tag{13}$$

если $u \in \dot{H}^{s}(R)$, то $e^{-\gamma t}u \in \dot{H}^{s}(R)$ и

$$< e^{-\gamma t} u >_s \le C < u >_s \; ; \tag{14}$$

если $u \in \dot{H}^{s}(-\infty, T)$, то $e^{\gamma t}u \in \dot{H}^{s}(-\infty, T)$

и

$$< e^{\gamma t} u >_s \le C < u >_s \, . \tag{15}$$

Из утверждений (13) , (14) следует, что $\tilde{g}_j \in \dot{H}^{(s-b_j)/p;\gamma}(R)$, $j=1,\dots,p$. Используя формулы (9) , (12) , получаем неравенство:

$$< D_x^{\kappa} \tilde{u} >_{(s-\kappa)/p;\gamma} \le C \sum_{j=1}^{p} < \tilde{g}_j >_{(s-b_j)/p;\gamma} \, , \quad \kappa = 0,\dots,s \, , \tag{16}$$

где константа C не зависит от $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_p$.

Пусть u - сужение функции $\tilde{u}$ на область Q_T. Тогда функция u является решением задачи (1^0)- (3) , а в силу неравенства (16) и утверждений (13)-(15) $u \in \mathbb{H}^{s,p}(Q_T)$ и удовлетворяет оценке (6).

Лемма 2. *Пусть* $B_j = D_x^{b_j}$, $f \in W_2^{m,pm+1}(Q_T)$, $f = 0$ *при* $t<0$,

$$g_j \in \dot{H}^{(p(m+1)-b_j-\frac{1}{2})/p}(-\infty, T) \, , \quad j = 1,\dots,p.$$

Если выполнено условие (4) *и* $b \le p(m+1) - 1$, *то задача* (1)-(3) *имеет единственное решение*

$$u \in \mathbb{H}^{p(m+1)-\frac{1}{2},p}(Q_T),$$

удовлетворяющее неравенству (5).

Доказательство. Пусть $\tilde{f} \in W_2^{m,pm+1}(R_2)$ - продолжение функции f на все R_2, $\tilde{f}$ имеет компактный носитель и оператор продолжения непрерывен. В силу [13] , существует решение

$$\tilde{v}(x,t) \in W_{2,loc}^{m,p(m+1)}(R_2)$$

уравнения (1), причем $supp\, \tilde{v} \in R_2^+$. Пусть v - сужение функции $\tilde{v}$ на область Q_T . Используя метод доказательства теоремы 3.11 из [13] , получаем оценку

$$\| v \|_{m,p(m+1)} \le C \| f \|_{m,pm+1} \, . \tag{17}$$

Покажем, что $v \in W_2^{m+1,p(m+1)}(Q_T)$. Дифференцируя уравнение (1) m раз по

t, получаем

$$D_t^{m+1} v - D_t^m D_x^p v = D_t^m f. \tag{18}$$

Так как $D_t^m f \in L_2(Q_T)$, то достаточно оценить $D_t^m D_x^p v$ в $L_2(Q_T)$. Оценка $D_t^m D_x^p v$ в $L_2(Q_T)$ вытекает из рекуррентной формулы:

$$D_t^{m+1-k} D_x^{pk} v - D_t^{m-k} D_x^{p(k+1)} v = D_t^{m-k} D_x^{pk} f, \quad k=1,\dots,m, \tag{19}$$

и того факта, что

$$D_t^{m-k} D_x^{pk} f \in L_2(Q_T), \quad k=1,\dots,m,$$

в силу теоремы о промежуточных производных [11]. Из соотношений (17)-(19) получим оценку:

$$\|v\|_{m+1,p(m+1)} \leq C \|f\|_{m,pm+1}.$$

По теореме о следах [11],

$$D_x^k v \in C\left([0,1], H^{(p(m+1)-k-\frac{1}{2})/p}(-\infty,T)\right), \quad k=0,\dots,p(m+1)-1,$$

причем оператор вложения непрерывен, значит, $v \in H^{p(m+1)-\frac{1}{2},p}$, и справедливо неравенство

$$\|v\|_{p(m+1)-\frac{1}{2},p} \leq C \|f\|_{m,pm+1}, \tag{20}$$

где C не зависит от f.

Пусть

$$D_x^k v\Big|_{x=0} = d_{jk} v, \; j=1,\dots,\ell, \quad D_x^k v\Big|_{x=1} = d_{jk} v, \; j=\ell+1,\dots,p.$$

Рассмотрим задачу (1^0)-(3) при $B_j = D_x^{b_j}$ и с $\varphi_j = g_j - d_{jb_j} v$, $j=1,\dots,p$, в правой части граничного условия (2). По лемме 1, такая задача имеет решение $W \in H^{p(m+1)-\frac{1}{2},p}(Q_T)$, удовлетворяющее, в силу (6) и (20), оценке:

$$\|W\|_{p(m+1)-\frac{1}{2},p} \leq C \sum_{j=1}^{p} \langle \varphi_j \rangle_{(p(m+1)-b_j-\frac{1}{2})/p} \leq C\left(\sum_{j=1}^{p} \langle g_j \rangle_{(p(m+1)-b_j-\frac{1}{2})/p} + \|f\|_{m,pm+1}\right).$$

Пусть $u = v + W$. Очевидно, что $u \in H^{p(m+1)-\frac{1}{2},p}(Q_T)$ является решением задачи (1)-(3) и удовлетворяет неравенству (4).

Единственность решения задачи (1)-(3) в пространстве $H^{p(m+1)-\frac{1}{2},p}$ достаточно доказать для $m=0$. Пусть $u \in H^{p-\frac{1}{2},p}(Q_T)$ - решение задачи (1^0)-(3) с однородными граничными условиями. Покажем, что $u \equiv 0$ в Q_T.

Рассмотрим сопряженную задачу:

$$L^* v \equiv D_t v - D_x^p v = \psi \quad \text{в} \quad Q'_\delta = (0,1)\times(-\delta,\infty), \tag{21}$$

$$B_j^* v\big|_{x=0} = \varphi_j,\ j=1,\dots,\ell+1,\ B_j^* v\big|_{x=1} = \varphi_j,\ j=\ell+2,\dots,p,\ -\delta<t<\infty, \tag{22}$$

$$v(x,t)=0,\quad t\geq T,\quad 0<x<1, \tag{23}$$

где $B_j^* = D_x^{b_j^*}$.

Пусть $D_\delta = (0,1)\times(-\delta,T)$ и $\psi \in C_0^\infty(D_\delta)$. В силу вышедоказанного, задача (21)-(23) с однородными граничными условиями имеет решение $v \in C^\infty(\overline{Q'_\delta})$, причем $\operatorname{supp} v \subset \overline{D}_\delta$. Пусть $\varphi_\delta(t)$- усредняющее ядро Соболева и $u_\delta = u * \varphi_\delta$ - усреднение функции u по t. Так как функция u непрерывна, то $D_t u_\delta \in L_2(Q_T)$, а, в силу уравнения (1^0), $D_x^p u_\delta \in L_2(Q_T)$. Отметим еще, что $\operatorname{supp} u_\delta \subset \overline{D}_\delta$. Применяя формулу Грина к функциям u_δ, v в области D_δ, получаем

$$(u_\delta, \psi)_{L_2(D_\delta)} = 0,\quad \psi \in C_0^\infty(D_\delta),$$

откуда следует, что $u\equiv 0$ в Q_T.

Лемма 3. *Пусть*

$$g_j \in \overset{\bullet}{H}{}^{(s-b_j)/p}(-\infty,T),\ j=1,\dots,p,\ s>p/2 .$$

Если выполнено условие (4) *и* $b\leq s$, *то задача* (1^0)-(3) *имеет единственное решение* $u\in H^{s,p}(Q_T)$, *удовлетворяющее неравенству* (6).

Доказательство. Докажем сначала единственность решения. Пусть $u\in H^{s,p}(Q_T)$- решение задачи (1^0)-(3). По леммам 1 и 2, для функции u справедливо неравенство

$$\| u \|_{s,p} \leq C \sum_{j=1}^{p} \langle d_{jb_j} u\rangle_{(s-b_j)/p},$$

из которого, в частности, следует, что

$$\sum_{k=0}^{b_j-1} \langle d_{jk} u\rangle_{(s-k)/p} \leq C \sum_{j=1}^{p} \langle d_{jb_j} u\rangle_{(s-b_j)/p},\quad j=1,\dots,p. \tag{24}$$

В силу известной теоремы [11], справедливо неравенство

$$\langle d_{jk} u\rangle_{(s-b_j)/p} \leq \varepsilon \langle d_{jk} u\rangle_{(s-k)/p} + C(\varepsilon)\langle d_{jk} u\rangle_0,\ k<b_j\leq s. \tag{25}$$

Из соотношений (24),(25) и очевидного неравенства

$$\sum_{j=1}^{p} \langle g_j\rangle_{(s-b_j)/p} \geq \sum_{j=1}^{p} \langle d_{jb_j} u\rangle_{(s-b_j)/p} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{b_j-1} \langle a_{jk}(t) d_{jk} u\rangle_{(s-b_j)/p}$$

при достаточно малом ε получаем:

$$\sum_{j=1}^{p} \langle d_{jb_j} u\rangle_{(s-b_j)/p} \leq C_1 \sum_{j=1}^{p} \langle g_j\rangle_{(s-b_j)/p} + C_2 \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{b_j-1} \langle d_{jk} u\rangle_0 .$$

По теореме вложения,

$$<d_{jk}u>_0 \leq C(T)<d_{jk}u>_{(s-k)/p}\,, \quad k=0,\dots,b_j-1,\ j=1,\dots,p,$$

причем $C(T)\to 0$ при $T\to 0$.

Так как все константы, входящие в рассматриваемые выше неравенства, не увеличиваются с уменьшением T, то существует $t\in[0,T]$ такое, что

$$\|u\|_{H^{s,p}(Q_t)} \leq C\sum_{j=1}^{p} <g_j>_{\dot H^{(s-b_j)/p}(-\infty,t)}\,,$$

и, следовательно, имеет место единственность решения задачи (1°)-(3) в пространстве $H^{s,p}(Q_t)$, а значит, и в $H^{s,p}(Q_T)$.

Покажем теперь, что любое решение $u\in H^{s,p}(Q_T)$ задачи (1°)-(3) удовлетворяет неравенству (6). Предположим, что это не так. Тогда существуют последовательности функций $\{u_n\}$, $u_n\in H^{s,p}(Q_T)$, $\|u_n\|_{s,p}=1$ и $\{g_{jn}\}$, $g_{jn}\in \dot H^{(s-b_j)/p}(-\infty,T)$, $j=1,\dots,p$, таких, что

$$\|u_n\|_{s,p} \geq n\sum_{j=1}^{p} <g_{jn}>_{(s-b_j)/p}\,.$$

Так как

$$\|u_n\|_{s,p}=1,\quad <g_{jn}>_{(s-b_j)/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

и оператор вложения $H^{(s-k)/p}(0,T)$ в $H^{(s-b_j)/p}(0,T)$ при $k<b_j$ вполне непрерывен, то из последовательности $\{d_{jb_j}u_n\}$ можно извлечь подпоследовательность (мы будем обозначать ее $\{d_{jb_j}u_n\}$), сходящуюся в $\dot H^{(s-b_j)/p}(-\infty,T)$ к некоторой функции φ_j. Так как $\varphi_j\in \dot H^{(s-b_j)/p}(-\infty,T)$, то, по лемме 1, задача (1°)-(3) при $B_j=D_x^{b_j}$ имеет решение $u\in H^{s,p}(Q_T)$. В силу оценки (6), получаем, что $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ в $H^{s,p}(Q_T)$ и, значит, $\|u\|_{s,p}=1$ и

$$\sum_{k=0}^{b_j} a_{jk}(t)\,d_{jk}u=0\,,\quad j=1,\dots,p.$$

Тогда функция u является решением задачи (1°)-(3) с однородными граничными условиями; в силу единственности решения этой задачи $u\equiv 0$ в Q_T, что противоречит тому, что $\|u\|_{s,p}=1$.

Доказательство существования решения будем проводить методом продолжения по параметру. Положим

$$B_{j\lambda}=D_x^{b_j}+\lambda\sum_{k=0}^{b_j-1} a_{jk}(t)D_x^k\,,\quad \lambda\in[0,1].$$

Множество тех λ, для которых задача (1°)-(3) разрешима в $H^{s,p}(Q_T)$ при $B_j=B_{j\lambda}$, обозначим через Λ. В силу леммы 1, имеем $0\in\Lambda$. Замкнутость множества Λ следует из оценки (6), справедливой на любом решении $u\in H^{s,p}(Q_T)$ задачи (1°)-(3) при $B_j=B_{j\lambda}$ с константой C, не зависящей от λ. Покажем, что множество Λ открыто. Пусть λ - произвольный элемент Λ и M - линейный оператор, который вектор-функции $g=(g_1,\dots,g_p)$, $g_j\in \dot H^{(s-b_j)/p}(-\infty,T)$ ставит в соответствие решение $u\in H^{s,p}(Q_T)$ задачи (1°)-(3) при $B_j=B_{j\lambda}$. В силу оценки (6) оператор является непрерывным. Пусть L - линейный оператор, ставя-

щий в соответствие функции $u \in H^{s,p}(Q_T)$ вектор-функцию

$$\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_p),\quad \varphi_j=\sum_{k=0}^{b_j-1} a_{jk}(t)d_{jk}u,\quad \varphi_j\in \dot H^{(s-b_j)/p}(-\infty,T).$$

Очевидно, что оператор L также непрерывен. Таким образом, ML - линейное непрерывное отображение пространства $H^{s,p}(Q_T)$ в себя. Так как уравнение

$$d_{jb_j}u+(\lambda+\varepsilon)\sum_{k=0}^{b_j-1} a_{jk}(t)d_{jk}u=g_j,\quad j=1,\dots,p,$$

можно записать в виде

$$d_{jb_j}u+\lambda\sum_{k=0}^{b_j-1} a_{jk}(t)d_{jk}u=g_j-\varepsilon\sum_{k=0}^{b_j-1} a_{jk}(t)d_{jk}u,$$

то уравнение

$$(I+\varepsilon ML)u=Mg \tag{26}$$

эквивалентно задаче (1°)-(3) при $B_j=B_j(\lambda+\varepsilon)$. Уравнение же (26) разрешимо при $\varepsilon<\dfrac{1}{\|ML\|}$, и, следовательно, $\lambda+\varepsilon\in\Lambda$ при достаточно малом ε.

Отметим, что хотя область определения функций $d_{jk}u$, $k=0,\dots,b_j$, бесконечна, мы можем пользоваться оценками для конечной области, ибо $\operatorname{supp} d_{jk}u\subset D$. Докажем, например, неравенство (24). Пусть $(s-b_j)/p\neq m+1/2$, где m - целое число. Тогда функция $u\in H^{(s-b_j)/p}(0,T)$, такая, что $u(x,0)=0$, может быть продолжена нулем на $(-\infty,T)$ с сохранением нормы [11]. Поэтому справедлива цепочка неравенств:

$$\langle d_{jk}u\rangle_{\dot H^{(s-b_j)/p}(-\infty,T)}\le C_1\langle d_{jk}u\rangle_{H^{(s-b_j)/p}(0,T)}\le\varepsilon C_1\langle d_{jk}u\rangle_{H^{(s-k)/p}(0,T)}+$$

$$+C_1C(\varepsilon)\langle d_{jk}u\rangle_{H^0(0,T)}\le C_1\varepsilon\langle d_{jk}u\rangle_{\dot H^{(s-k)/p}(-\infty,T)}+C_1C(\varepsilon)\langle d_{jk}u\rangle_{\dot H^0(-\infty,T)}.$$

Если же $(s-b_j)/p=m+1/2$, где m - целое число, то существует $s'\neq m+1/2$ такое, что $(s-b_j)/p<s'<(s-k)/p$. Тогда оператор вложения $\dot H^{s'}(-\infty,T)$ в $\dot H^{(s-b_j)/p}(-\infty,T)$ непрерывен, и указанная выше цепочка неравенств справедлива при замене $(s-b_j)/p$ на s'.

Доказательство теоремы 1. По лемме 2, существует решение

$$v\in H^{p(m+1)-1/2,p}(Q_T)$$

задачи (1)-(3) при $B_j=D_x^{b_j}$ с однородными граничными условиями. Пусть

$$\varphi_j=g_j-\sum_{k=0}^{b_j} a_{jk}(t)d_{jk}v.$$

Так как $v\in H^{p(m+1)-\frac12,p}(Q_T)$, то $\varphi_j\in\dot H^{(p(m+1)-b_j-\frac12)/p}(-\infty,T)$

и, по лемме 3, задача (1)-(3) с φ_j в правой части граничного условия (2) имеет решение $W\in H^{p(m+1)-\frac12,p}(Q_T)$. Очевидно, что функция $u=v+w$ является решением задачи (1)-(3) и удовлетворяет оценке (5). Единственность решения следует из оценки (3).

Рассмотрим теперь краевую задачу для уравнения Кортевега-де Фриза:

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = f \quad \text{в} \quad D, \tag{27}$$

$$B_1 u|_{x=0} = g_1(t), \quad B_2 u|_{x=0} = g_2(t), \quad B_3 u|_{x=1} = g_3(t), \; 0<t<T, \tag{28}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0<x<1. \tag{29}$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in W_2^{m,3m+1}(Q_T)$, $f=0$ *при* $t<0$, $g_j \in \dot{H}^{m+\frac{5}{6}-b_j/3}(-\infty,T)$, $j=1,2,3$, $m=0,1$, $b \le 3$ *и* $b_3 \ne b_2$. *Тогда существует константа* $C(T_0)$ *такая, что если* $T \le T_0$ *и*

$$\sum_{j=1}^{3} \langle g_j \rangle_{m+5/6-b_j/3} + \| f \|_{m,3m+1} \le C(T_0),$$

то задача (27)-(29) *имеет единственное решение* $u \in H^{3m+5/6,\,3}(Q_T)$.

В силу теоремы вложения [11] полученное решение при $m=1$ является классическим и принадлежит $C^{1,3}(\bar{D})$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим случай $m=1$. Пусть L - линейный оператор, который вектор-функции $F=(f,g_1,g_2,g_3)$, $f\in W_2^{1,4}(Q_T)$, $f=0$ при $t<0$, $g_j \in \dot{H}^{(11-2b_j)/6}(-\infty,T)$, $j=1,2,3$, ставит в соответствие решение $u \in H^{11/2,3}(Q_T)$ задачи (1)-(3). В силу оценки (5), оператор L непрерывный. Пусть M - оператор, который вектор-функции $U=(u,0,0,0)$, $u \in H^{11/2,3}(Q_T)$, $u=0$ при $t<0$ ставит в соответствие вектор-функцию $V = (-uu_x, 0,0,0)$.

Можно проверить, что $uu_x \in W_2^{1,4}(Q_T)$. Положим $Nu = L(Mu+F)$. Очевидно, что оператор N переводит пространство $H^{11/2,3}(Q_T)$ в себя. Покажем, что на шаре достаточно малого радиуса R оператор N является сжимающим:

$$\begin{aligned}
\| Nu_1 - Nu_2 \|_{11/2,3} &= \| L(Mu_1 - Mu_2) \|_{11/2,3} \le C \| u_1 D_x u_1 - u_2 D_x u_2 \|_{1,4} \le \\
&\le C \Big(\| u_1 D_x u_1 - u_2 D_x u_2 \| + \| u_1 D_x^2 u_1 - u_2 D_x^2 u_2 \| + \| (D_x u_1)^2 - (D_x u_2)^2 \| + \\
&+ \| D_x u_1 D_x^2 u_1 - D_x u_2 D_x^2 u_2 \| + \| u_1 D_x^3 u_1 - u_2 D_x^3 u_2 \| + \| (D_x^2 u_1)^2 - (D_x^2 u_2)^2 \| + \\
&+ \| D_x u_1 D_x^3 u_1 - D_x u_2 D_x^3 u_2 \| + \| u_1 D_x^4 u_1 - u_2 D_x^4 u_2 \| + \| D_x^2 u_1 D_x^3 u_1 - D_x^2 u_2 D_x^3 u_2 \| + \\
&+ \| D_x u_1 D_x^4 u_1 - D_x u_2 D_x^4 u_2 \| + \| u_1 D_x^5 u_1 - u_2 D_x^5 u_2 \| + \| D_x u_1 D_t u_1 - D_x u_2 D_t u_2 \| + \\
&+ \| u_1 D_{xt} u_1 - u_2 D_{xt} u_2 \| \Big).
\end{aligned}$$

Можно проверить, что каждое слагаемое в правой части последнего неравенства не превосходит $\| u_1 - u_2 \|_{11/2,3} \left(\| u_1 \|_{11/2,3} + \| u_2 \|_{11/2,3} \right)$

и, стало быть, наше утверждение верно. Уменьшая, если потребуется R, можно убедиться в том, что оператор N переводит шар радиуса R в себя. Тогда из принципа сжатых отображений получаем, что задача (27)-(29) имеет единственное решение $u \in H^{11/2,3}(Q_T)$.

В случае $m=0$ доказательство проводится аналогично с использованием

теорем вложения [11,14] :

$$H^{s}(0,T)\subset C[0,T],\ s>1/2;\ H^{s}(0,T)\subset L_4(0,T),\ 0<s\leq 1/2.$$

Литература

1. Петровский И.Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций.- Бюлл. МГУ, 1938, т.1, Серия математика и механика, №7, с.1-6.
2. Соболев С.Л. О смешанных задачах для уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными.- Докл.АН СССР, 1958, т.122, №4, с.555-558.
3. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг А. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях.- М.: ИЛ., 1962.-205с.
4. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида.- Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1965, т.83, с.3-162.
5. Sakamoto R. ε-well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients.- J.Math.Kyoto Univ., 1974, v.14, №1, p.93-118.
6. Chazarain J., Piriou A. Caractérisation des problèmes mixtes hyperboliques bien posés.- Ann.Inst.Fourier, 1972, v.22, №4, p.193-237.
7. Sakamoto R. Mixed problems for hyperbolic equations.I,II.- J.Math.Kyoto Univ., 1970, v.10, №2, p.349-373; 1970, v.10, №3, p.403-417.
8. Kreiss H.O. Initial boundary value problems for hyperbolic systems.- Comm.Pure and Appl.Math., 1970, v. 23, № 3, p.277-298.
9. Успенский С.В. Об общих краевых задачах для одного класса неклассических уравнений.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики, Новосибирск, 1975, с.212-233.
10. Seminar on singularities of solutions of linear partial differential equations.- Ann.Math.Stud., Princeton Un. Press, 1979, №91, 280p.
11. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.- М.: Мир, 1971.-371с.
12. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области.- М.: Наука, 1964.-87с.
13. Hörmander L. On the characteristic Cauchy problem.- Ann.Math., 1968, v.88, №2, p.341-370.
14. Peetre J. Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff.- Ann.Inst. Fourier, 1966, v.16, f.1, p.279-317.