УДК 517.946

О РЕГУЛЯРНОСТИ ГРАНИЦЫ В L_p-ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.*) I

В.Г.Мазья, Т.О.Шапошникова (Ленинград)

В статьях авторов [1-4] описываются и изучаются свойства мультипликаторов в пространстве $W_p^\ell(R^n)$. В частности, в [3] приведены теоремы о следах и продолжениях мультипликаторов. Настоящая работа посвящена приложениям этих результатов к эллиптическим краевым задачам в областях с "нерегулярными" границами.

Влияние особенностей границы на разрешимость эллиптических задач в $W_p^\ell(\Omega)$ исследовалось во многих работах, которые условно можно разделить на две группы. В одних [5-10 и др.] - рассматриваются особенности границы типа конических точек, ребер, многогранных углов и т.п.; в других работах [11-12] - особенности не локализуются и основное внимание уделяется условиям гладкости границы, достаточным для справедливости тех или иных оценок решений. В [12], например, дан следующий, точный в известном смысле, признак нётеровости определенного на $W_p^\ell(\Omega)$ оператора общей эллиптической краевой задачи: поверхность $\partial\Omega$ локально задается уравнением $y=\varphi(x)$, и модуль непрерывности $\omega_{\ell-1}(t)$ вектор-функции $\nabla_{\ell-1}\varphi$ удовлетворяет условию $\int_0 [\omega_{\ell-1}(t)/t]^2 dt<\infty$.

Формулируемые здесь результаты также относятся ко второй группе. Рассматривается оператор $\{P, trP_1,\dots,trP_n\}$ общей эллиптической краевой задачи в ограниченной области $\Omega\subset R^n$. Предполагается, что $\operatorname{ord} P=2h\le\ell$, $\operatorname{ord} P_j=k_j<\ell$, $1<p<\infty$; через tr обозначен оператор сужения на $\partial\Omega$. В §3, теорема 3.1, показано, что в случае $p(\ell-1)\le n$ отображение $\{P;\ trP_j\}$:

$$W_p^\ell(\Omega)\longrightarrow W_p^{\ell-2h}(\Omega)\times\prod_{j=1}^{h} W_p^{\ell-k_j-1/p}(\partial\Omega)$$

*) От ред. Вторая часть статьи (в ней рассматриваются §4-8) будет опубликована в "Трудах семинара академика С.Л.Соболева", 1981, №1.

нётерово, если область Ω удовлетворяет следующему условию $N_p^{\ell-1/p}$. Для каждой точки границы найдутся окрестность $\mathcal{U}$ и функция φ такие, что

$$\mathcal{U}\cap\Omega=\{(x,y)\in\mathcal{U},\ x\in R^{n-1},\ y>\varphi(x)\} \quad \text{и}$$

$$\|\nabla\varphi;\ R^{n-1}\|_{MW_p^{\ell-1-1/p}}\le\delta .$$

Здесь δ - малая константа, а MW_p^{s} - пространство мультипликаторов в W_p^{s} при $s>0$ и пространство L_∞ при $s\le 0$.

Согласно теореме 3.2, при $p(\ell-1)>n$ отображение $\{P;\ tr P_j\}$ нётерово, если область Ω принадлежит классу $W_p^{\ell-1/p}$.

В §5 специально рассмотрена первая краевая задача для сильно эллиптического оператора P в дивергентной форме. Изучаются два варианта этой задачи, различающиеся способами задания краевого условия. В первой постановке ищется решение $u\in W_p^{\ell}(\Omega)$ уравнения $Pu=f\in W_p^{\ell-2h}(\Omega)$, $\ell\ge h$, удовлетворяющее условию $u-g\in W_p^{\ell}(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_p^{h}(\Omega)$, где g - заданная функция из $W_p^{\ell}(\Omega)$. Показано, что такая задача однозначно разрешима, если Ω удовлетворяет условию $N_p^{\ell-h+1/p'}$ при $p(\ell-h)\le n$ или принадлежит классу $W_p^{\ell-h+1/p'}$ при $p(\ell-h)>n$ (теорема 5.3). Во второй, более сильной постановке, краевые условия задаются, как и в §3, с помощью набора дифференциальных операторов P_j, $1\le j\le h$. Согласно теореме 5.4, для разрешимости так поставленной задачи при $h>1$ достаточно принадлежности области Ω классу $M_p^{\ell-1/p}$ и малости констант Липшица функций φ, локально задающих $\partial\Omega$. В случае $p(\ell-1)>n$ это равносильно требованию $\Omega\in W_p^{\ell-1/p}$. Для операторов второго порядка $(h=1)$ допустимый класс областей тот же, что и в теореме 5.3.

Требование $\Omega\in W_p^{\ell-1/p}$ при $p(\ell-1)>n$ не только достаточно, но и необходимо для разрешимости первой краевой задачи во второй постановке (см. §6).

Условие $N_p^{\ell-1/p}$ можно сформулировать в терминах емкости и дать более простые достаточные условия его справедливости (§7). Например, если норма

$$\|\nabla\varphi;\ R^{n-1}\|_{L_\infty}$$

мала и φ -функция из пространства О.В.Бесова $B_{q,p}^{\ell-1/p}(R^{n-1})$, где $q\in[p(n-1)/(p(\ell-1)-1),\infty]$ при $p(\ell-1)<n$ и $q\in(p,\infty]$ при $p(\ell-1)=n$, то область Ω удовлетворяет условию $N_p^{\ell-1/p}$. Полагая $q=\infty$, получаем, что условие $N_p^{\ell-1/p}$ следует из сходимости интеграла $\int_0[\omega_{\ell-1}(t)/t]^p dt$. Так как $B_{\infty,p}^{\ell-1/p}\subset W_p^{\ell-1/p}$, то последнее требование достаточно также для принадлежности области классу $W_p^{\ell-1/p}$. Это позволяет непосредственно вывести из наших теорем следующие утверждения, обобщающие основные результаты работы [12]. Вклю-

чение $\omega_{\ell-1}(t)/t \in L_p(0,1)$ обеспечивает нётеровость оператора $\{P, tr P_j\}$ и обратимость оператора задачи Дирихле во второй постановке. Кроме того, однозначная разрешимость в $W_p^\ell(\Omega)$ задачи Дирихле в первой постановке получается при условии $\omega_{\ell-h}(t)/t \in L_p(0,1)$. В §7 отмечено, что даже эти, самые грубые из полученных достаточных условий, точны в некотором смысле (ср. [12]).

Доказательство одной теоремы из §7, дающей локальную формулировку условия $N_p^{\ell-1/p}$, вынесено в §8.

Основные результаты этой работы приведены без доказательства в заметке авторов [13].

§ 1. Основные обозначения и вспомогательные результаты

Пусть Ω - область в R^n и $W_p^\kappa(\Omega)$ - пространство функций в Ω, суммируемых вместе с производными до порядка κ включительно со степенью $p>1$. В $W_p^\kappa(\Omega)$ введем норму

$$\|v;\Omega\|_{p,\kappa} = \sum_{j=0}^{\kappa} \|\nabla_j v;\Omega\|_p, \tag{1.1}$$

где ∇_j - градиент порядка j, а $\|\cdot;\Omega\|_p$ - норма в пространстве $L_p(\Omega)$. Пусть $W_p^\kappa(\Omega, loc) = \{u : u\eta \in W_p^\kappa(\Omega)$ для всех $\eta \in C_0^\infty(\Omega)\}$.

Через $\overset{\circ}{W}{}_p^\kappa(\Omega)$ и $\overset{\circ}{L}{}_p^\kappa(\Omega)$ обозначим пополнения пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по нормам $\|v;\Omega\|_{p,\kappa}$ и $\|\nabla_\kappa v;\Omega\|_p$ соответственно. Как известно, $\overset{\circ}{W}{}_p^\kappa(R^n) = W_p^\kappa(R^n)$.

Пространства скалярных, векторных или матричных функций не различаются в обозначениях.

Будем говорить, что функция γ, заданная на области Ω, принадлежит пространству мультипликаторов $M(W_p^m(\Omega) \to W_p^\ell(\Omega))$, если $\gamma u \in W_p^\ell(\Omega)$ для всех $u \in W_p^m(\Omega)$. В случае $m=\ell$ будем использовать обозначение $MW_p^\ell(\Omega)$. Нормой функции γ в пространстве $M(W_p^m(\Omega) \to W_p^\ell(\Omega))$ является норма оператора умножения на γ (обозначение: $\|\gamma;\Omega\|_{m\to\ell}$).

В дальнейшем $B_\rho(z)$ - открытый шар с центром в точке z и радиусом ρ, размерность которого всегда ясна из контекста, $B_\rho = B_\rho(0)$.

Через $c, c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие от "безразмерных" параметров m, ℓ, n, p, q и т.п., а иногда и от области Ω.

Будем говорить, что величины a и b эквивалентны (обозначение: $a \sim b$), если $c_1 a \leq b \leq c_2 a$.

Пусть e - компактное подмножество Ω. Определим емкость e равенством

$$cap(e, \overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)) = \inf\{\|u;\Omega\|_{p,l}^p : u \in C_0^\infty(\Omega),\ u=1 \text{ в окрестности } e\}.$$

Аналогично определяется емкость $cap(e, \overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega))$.

Очевидно, что если $e_1 \subset e_2$ и $\Omega_1 \supset \Omega_2$, то

$$cap(e_1, \overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega_1)) \leq cap(e_2, \overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega_2)),$$

и что таким же свойством монотонности обладает емкость $cap(e, \overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega))$. Ясно также, что при отображении подобия с коэффициентом d емкость $cap(e, \overset{\circ}{L}{}_p^l(R^n))$ приобретает коэффициент d^{n-pl}. В случае $n \leq pl, p>1$ или $n<l, p=1$ емкость $cap(e, \overset{\circ}{L}{}_p^l(R^n))$ равна нулю для любого компакта e.

Из теоремы С.Л.Соболева о вложении пространства $W_p^l(R^n)$ в $L_\infty(R^n)$ $(pl>n,\ p>1)$ следует, что емкость $cap(e, \overset{\circ}{W}{}_p^l(R^n))$ отделена от нуля.

Приведем еще несколько известных свойств емкости:

(i) Пусть $pl<n$ и e - компактное подмножество шара B_ρ. Тогда

$$cap(e, \overset{\circ}{L}{}_p^l(B_{2\rho})) \leq c\, cap(e, \overset{\circ}{L}{}_p^l(R^n)),$$

где c не зависит от ρ.

(ii) Для всех компактных подмножеств e шара B_1

$$cap(e, \overset{\circ}{W}{}_p^l(B_2)) \sim cap(e, \overset{\circ}{W}{}_p^l(R^n)).$$

(iii) Если $\rho \leq 1$, то

$$cap(\bar{B}_\rho, W_p^l(R^n)) \sim \begin{cases} \rho^{n-pl}, & \text{если } n>pl, p>1 \text{ или } n \geq l, p=1; \\ (\log 2/\rho)^{1-p}, & \text{если } n=pl,\ p>1. \end{cases}$$

(iv) Если $\rho>1$, то

$$cap(\bar{B}_\rho, W_p^l(R^n)) \sim \rho^n.$$

(v) Если $n>pl$, то

$$cap(e, W_p^l(R^n)) \geq c\,(mes_n e)^{(n-pl)/n}.$$

(vi) Если $n=pl$ и $d(e) \leq 1$, то

$$cap\left(e, W_p^\ell(R^n)\right) \ge c\left(\log\left(2^n/mes_n e\right)\right)^{1-p}.$$

По определению, ограниченная область Ω принадлежит классу $C^{K-1,1}$, если для каждой точки границы $\partial\Omega$ найдется такая окрестность, в которой $\partial\Omega$ допускает (в декартовой системе координат) задание уравнением $y=\varphi(x)$, где φ - функция, производные порядка K которой удовлетворяют условию Липшица.

Характеристику пространства $M(W_p^m(\Omega)\to W_p^\ell(\Omega))$ дает доказанная в [4]

Теорема 1.1. *Пусть Ω - ограниченная область класса $C^{0,1}$, m, ℓ - целые числа, $m \geq \ell \geq 0$, $1<p<\infty$. Пространство $M(W_p^m(\Omega)\to W_p^\ell(\Omega))$ состоит из функций $\gamma\in W_p^\ell(\Omega)$ таких, что*

$$\sup_{e\subset\Omega}\left(\frac{\|\nabla_\ell\gamma; e\|_p}{[cap(e, W_p^m(R^n))]^{1/p}} + \frac{\|\gamma; e\|_p}{[cap(e, W_p^{m-\ell}(R^n))]^{1/p}}\right) < \infty .$$

Левая часть этого неравенства эквивалентна норме $\|\gamma;\Omega\|_{m\to\ell}$. В частности,

$$\|\gamma;\Omega\|_{m\to m} \sim \sup_{e\subset\Omega}\frac{\|\nabla_m\gamma; e\|_p}{[cap(e, W_p^m(R^n))]^{1/p}} + \|\gamma;\Omega\|_\infty .$$

При $pm>n$, $p>1$, пространство $M(W_p^m(\Omega)\to W_p^\ell(\Omega))$ совпадает с пространством $W_p^\ell(\Omega)$.

Для того чтобы выявить зависимость некоторых констант от диаметра области, введем в $W_p^K(\Omega)$ норму

$$\|u;\Omega\|_{p,K} = \sum_{j=0}^{K} d^{\,j-K}\,\|\nabla_j u;\Omega\|_p, \tag{1.2}$$

где d - диаметр области Ω .

Норму в пространстве мультипликаторов $M(W_p^m(\Omega)\to W_p^\ell(\Omega))$, порожденную нормой (1.2), будем обозначать через

$$|||\gamma;\Omega|||_{m\to\ell}. \tag{1.3}$$

В следующей теореме приведены нормы, эквивалентные норме (1.3), причем эквивалентность понимается в том смысле, что отношения норм ограничены и отделены от нуля постоянными, не зависящими от d .

Теорема 1.2. 1) *Имеет место соотношение*

$$\|\gamma;\Omega\|_{m\to\ell}\sim\sup_{e\subset\Omega}\frac{\|\nabla_\ell\gamma;e\|_p}{[\mathrm{cap}(e,\mathring{L}_p^m(B_{2d}))]^{1/p}}+\sup_{e\subset\Omega}\frac{\|\gamma;e\|_p}{[\mathrm{cap}(e,\mathring{L}_p^{m-\ell}(B_{2d}))]^{1/p}},$$

где B_{2d} *- шар с центром в некоторой точке* $O\in\bar{\Omega}$ *. В случае* $mp<n$ *шар* B_{2d} *можно заменить на* R^n *. При* $m=\ell$ *второе слагаемое равно* $\|\gamma;\Omega\|_\infty$ *.*

2) *Если* $pm>n$ *, то имеет место соотношение*

$$\|\gamma;\Omega\|_{m\to\ell}\sim d^{m-n/p}\|\gamma;\Omega\|_{p,\ell}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Утверждения теоремы при $d=1$ содержатся в теореме 1.1. (Для того чтобы получить утверждение 1), следует дополнительно воспользоваться свойствами (i),(ii) емкости.) Переход от $d=1$ к произвольному $d\in(0,1)$ осуществляется с помощью преобразования подобия.

Пусть U и V - открытые подмножества R^n и $\varkappa$ - отображение U на V такое, что определитель $\det\varkappa'$ сохраняет знак и отделен от нуля. Как и в [4], будем говорить, что $\varkappa$ - (p,ℓ) - диффеоморфизм, $\ell\geq 1$, если элементы матрицы Якоби $\varkappa'$ принадлежат пространству $MW_p^{\ell-1}(U)$.

Сформулируем несколько свойств (p,ℓ) - диффеоморфизмов:

1) Пусть $u\in W_p^\ell(V)$ и $\varkappa:U\to V$ - (p,ℓ) - диффеоморфизм. Тогда $u\circ\varkappa\in W_p^\ell(U)$ и справедлива оценка

$$\|\gamma\circ\varkappa;U\|_{p,\ell}\leq c\|u;V\|_{p,\ell}.$$

2) Если $\varkappa$ - (p,ℓ) - диффеоморфизм, то $\varkappa^{-1}$ - также (p,ℓ) - диффеоморфизм, т.е. $\|(\varkappa^{-1})';U\|_{\ell-1\to\ell-1}\leq c$.

3) Пусть $\gamma\in MW_p^\ell(V)$ и $\varkappa$ - (p,ℓ) - диффеоморфизм. Тогда $\gamma\circ\varkappa\in MW_p^\ell(U)$ и справедлива оценка

$$\|\gamma\circ\varkappa;U\|_{\ell\to\ell}\leq c\|\gamma;V\|_{\ell\to\ell}.$$

Постоянные c, присутствующие в 1)-3), зависят от $\inf\det\varkappa'$, от p,ℓ,n и нормы $\|\varkappa';U\|_{\ell-1\to\ell-1}$. Аналогичное замечание относится и к следующему свойству.

4) Пусть U,V и W - открытые подмножества R^n, а $\varkappa_1:U\to V$ и $\varkappa_2: V\to W$ - (p,ℓ) -диффеоморфизмы. Тогда

$$\|(\varkappa_2\circ\varkappa_1)';U\|_{\ell-1\to\ell-1}\leq c.$$

Утверждения 1)-4) доказаны в [4], где рассуждения проведены для нормы (1.1). Переход к норме (1.2) не вносит изменений в доказательство.

§ 2. Предварительные рассмотрения для специальной липшицевой области

1°. Замена переменных в дифференциальных операторах. Специальной липшицевой областью назовем область $G=\{z=(x,y)\in R^n:\ x\in R^{n-1},\ y>\varphi(x)\}$, где φ - функция, удовлетворяющая условию Липшица $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leq L|x_1-x_2|$.

Следующее утверждение характеризует коэффициенты дифференциального оператора, полученного в результате замены переменных.

Предложение 2.1. *Пусть* G *- специальная липшицева область и* λ *- произвольный* (p,ℓ) *-диффеоморфизм:* $R^n_+\longrightarrow G$. *Пусть еще*

$$R(z,D_z)=\sum_{0\leq|\alpha|\leq h} a_\alpha(z)D_z^\alpha,\quad z\in G$$

и

$$S(\zeta,D_\zeta)=\sum_{0\leq|\beta|\leq h} b_\beta(\zeta)D_\zeta^\beta,\quad \zeta\in R^n_+$$

- дифференциальные операторы в G *и* R^n_+, *связанные равенством*

$$Sv=[R(v\circ\lambda^{-1})]\circ\lambda. \tag{2.1}$$

Если $a_\alpha\in M(W_p^{\ell-|\alpha|}(G)\longrightarrow W_p^{\ell-h}(G))$ *для всех мультииндексов* α, *то* $b_\beta\in M(W_p^{\ell-|\beta|}(R^n_+)\longrightarrow W_p^{\ell-h}(R^n_+))$ *и справедлива оценка*

$$\|b_\beta;R^n_+\|_{\ell-|\beta|\to\ell-h}\leq c\sum_{|\beta|\leq|\alpha|\leq h}\|a_\alpha;G\|_{\ell-|\alpha|\to\ell-h}.$$

Доказательство. Пусть $z=\lambda(\zeta)$. Имеем

$$D^\alpha[u(\lambda(\zeta))]=\sum_{1\leq|\beta|\leq|\alpha|}(D^\beta u)(\lambda(\zeta))\sum c_s\prod_i\prod_j D^{s_{ij}}\lambda_i(\zeta),$$

где суммирование ведется по всем наборам мультииндексов $s=(s_{ij})$ таким, что

$$\sum_{i,j} s_{ij}=\alpha,\ |s_{ij}|\geq 1,\quad \sum_{i,j}(|s_{ij}|-1)=|\alpha-\beta|. \tag{2.2}$$

Так как $\nabla\lambda_i\in MW_p^{\ell-1}(R^n_+)\subset MW_p^{k}(R^n_+), 0\leq k\leq \ell-1$, то, согласно предложению 2.1 [4],

$$D^{s_{ij}}\lambda_i \in M\left(W_p^{\kappa}(R_+^n) \longrightarrow W_p^{\kappa-|s_{ij}|+1}(R_+^n)\right).$$

Поэтому

$$\prod_{i,j} D^{s_{ij}}\lambda_i \in M\left(W_p^{\ell-|\beta|}(R_+^n) \longrightarrow W_p^{\ell-|\beta|-\sum_{ij}(|s_{ij}|-1)}(R_+^n)\right),$$

или, что то же самое,

$$\prod_{i,j} D^{s_{ij}}\lambda_i \in M\left(W_p^{\ell-|\beta|}(R_+^n) \longrightarrow W_p^{\ell-|\alpha|}(R_+^n)\right).$$

Остается заметить, что

$$b_\beta = \sum_{|\beta|\leq|\lambda|\leq h} (a_\alpha \circ \lambda) \sum c_s \prod_{i,j} D_z^{s_{ij}}\lambda_i , \tag{2.3}$$

и воспользоваться условием $a_\alpha \in M\left(W_p^{\ell-|\alpha|}(G) \longrightarrow W_p^{\ell-h}(G)\right)$, а также леммами 4.2 и 4.3 [4].

Лемма 2.1. *Пусть* G *- специальная липшицева область и* λ *- произвольный* (p,ℓ) *-диффеоморфизм:* $R_+^n \longrightarrow G$. *Пусть еще* R *- однородный дифференциальный оператор порядка* h *с постоянными коэффициентами и* S *- оператор, определенный равенством* (2.1). *Тогда*

$$\| S - R \,;\, R_+^n \|_{\ell\to\ell-h} \leq c \, \| E - \lambda' ; R_+^n \|_{\ell-1\to\ell-1}, \tag{2.4}$$

где c *- непрерывная функция нормы* λ' *в пространстве* $MW_p^{\ell-1}(R_+^n)$.

(Под нормой матрицы здесь и далее подразумевается сумма норм ее элементов)

Доказательство. Введем обозначения: $\varkappa = \lambda^{-1}$ и $a = \| E - \lambda' ; R_+^n \|_{\ell-1\to\ell-1}$. Пусть еще $S_1(\xi, D_\xi)$ - главная однородная часть оператора S . Так как $S_1(\xi,\rho) = S((\varkappa')^*\rho)\circ\lambda$ для любого вектора $\rho \in R^n$, то каждый коэффициент оператора S_1 отличается от соответствующего коэффициента оператора R в норме пространства $MW_p^{\ell-h}(R_+^n)$ на величину $O(a)$. Поэтому $\| S_1 - R ; R_+^n \|_{\ell\to\ell-h} \leq ca$.

Рассмотрим коэффициенты оператора S при производных порядка $|\beta| < h$. Пусть формула (2.3) связывает коэффициенты a_α и b_β операторов R и S . Поскольку в (2.3) фигурируют только мультииндексы α порядка h , то при $|\beta| < h$ в силу (2.2) каждое слагаемое в (2.3) содержит хотя бы один множитель $D^{s_{ij}}\lambda_i(\xi)$, для которого $|s_{ij}| > 1$. Так как такой множитель равен $D^{s_{ij}}[\lambda_i(\xi) - \xi_i]$, то $\| b_\beta ; R_+^n \|_{\ell-|\beta|\to\ell-h} \leq ca$.

Следовательно, $\| S - S_1 ; R_+^n \|_{\ell\to\ell-h} \leq ca$. Лемма доказана.

Повторяя с очевидными изменениями доказательство леммы 2.1 и используя приведенные в §1 свойства (p,ℓ)-диффеоморфизмов, получаем следующий локальный вариант леммы 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены все условия предложения 2.1. Для всех* $v\in W_p^\ell(R_+^n)$ *с носителями в* $B_r\cap \overline{R_+^n}$ *справедливо неравенство*

$$\|(S-R)v;R_+^n\|_{p,\ell-h}\le c\,\|E-\lambda';B_r\cap B_+^n\|_{\ell-1\to\ell-1}\,\|v;R_+^n\|_{p,\ell}, \tag{2.5}$$

где c *- постоянная, не зависящая от* $r\in(0,1)$.

При $p(\ell-1)>n$ из (1.4) следует, что неравенство (2.5) эквивалентно следующей оценке:

$$\|(S-R)v;R_+^n\|_{p,\ell-h}\le cr^{\ell-1-n/p}\|E-\lambda';B_r\cap R_+^n\|_{p,\ell-1}\,\|v;R_+^n\|_{p,\ell}. \tag{2.6}$$

2°. Оператор T и его свойства. Пусть $k=1,2,\dots$ Обозначим через $W_p^{k-1/p}(R^{n-1})$ совокупность следов на $R^{n-1}=\{\zeta=(\xi,\eta):\eta=0\}$ функций из пространства $W_p^k(R_+^n)$. Как известно, $W_p^{k-1/p}(R^{n-1})$ представляет собой пополнение пространства $C_0^\infty(R^{n-1})$ по норме

$$\|D_{k-1/p}u;R^{n-1}\|_p+\|u;R^{n-1}\|_p,$$

где

$$(D_\sigma u)(x)=\Big(\int_{R^{n-1}}|\nabla_{[\sigma]}u(x+h)-\nabla_{[\sigma]}u(x)|^p|h|^{1-n-p\{\sigma\}}dh\Big)^{1/p}.$$

Под $MW_p^{k-1/p}(R^{n-1})$ будем понимать пространство мультипликаторов в $W_p^{k-1/p}(R^{n-1})$, снабженное нормой оператора умножения. Необходимые и достаточные условия принадлежности функции классу $MW^{k-1/p}(R^{n-1})$ даны в [3].

Любая функция $\nu\in C_0^\infty(R^{n-1})$ порождает оператор $\gamma\to T\gamma$, определяемый равенством

$$(T\gamma)(\zeta)=\int_{R^{n-1}}\nu(\tau)\gamma(\tau\eta+\zeta)d\tau. \tag{2.7}$$

В [3] показано, что оператор T непрерывно отображает $MW_p^{k-1/p}(R^{n-1})$ в $MW_p^k(R_+^n)$.

Лемма 2.3. *Пусть* α *-* n*-мерный мультииндекс, и* k,r *- целые неотрицательные числа,* $k\ge|\alpha|-r\ge 0$. *Тогда оператор*

$$MW_p^{k-1/p}(R^{n-1})\ni\gamma\longrightarrow\eta^r(D^\alpha T\gamma)(\zeta)\in M(W_p^k(R_+^n)\to W_p^{k-|\alpha|+r}(R_+^n))$$

непрерывен.

Доказательство. Ясно, что

$$\eta^r (D^\alpha T\gamma)(\zeta) = D^\beta \sum_{0\le|\lambda|\le r} c_\lambda \eta^{|\lambda|} (D^\lambda T\gamma)(\zeta),$$

где β - мультииндекс порядка $|\alpha|-r$, $c_\lambda = const$. Оператор $\gamma \xrightarrow{T_\lambda} \eta^{|\lambda|}(D^\lambda T_\gamma)(\zeta)$ имеет тот же вид, что и оператор T, и поэтому непрерывно отображает $MW_p^{k-1/p}(R^{n-1})$ в $MW_p^k(R_+^n)$. Отсюда и из предложения 2.1 [4] следует непрерывность оператора

$$MW_p^{k-1/p}(R^{n-1}) \ni \gamma \longrightarrow D^\beta T_\lambda \gamma \in M(W_p^k(R_+^n) \to W_p^{k-|\alpha|+r}(R_+^n)).$$

Лемма доказана.

3°. Специальные липшицевы области класса $M_p^{\ell-1/p}$. Пусть G - специальная липшицева область.

Совокупность следов на ∂G функций из пространства $W_p^\ell(G)$ обозначим через $W_p^{\ell-1/p}(\partial G)$. Аналогично определяется пространство $W_p^{\ell-1/p}(\Gamma)$, где Γ - подмножество границы ∂G. След функции f на границе области ее задания обозначим через trf.

Как и в [4], будем говорить, что специальная липшицева область G принадлежит классу $M_p^{\ell-1/p}$ ($p>1$, ℓ - целое число, $\ell>1$), если $\nabla\varphi \in MW_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1})$. По определению, $M_p^{1-1/p} = C^{0,1}$.

Пусть T - оператор, определенный равенством (2.7), где ν - неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $|\tau|>1$ и нормированная равенством

$$\int_{R^{n-1}} \nu(\tau)d\tau = 1.$$

Пусть еще $\Phi = T\varphi$ - продолжение функции φ на полупространство $R_+^n = \{\zeta = (\xi,\eta) : \xi \in R^{n-1}, \eta > 0\}$.

Так как

$$\nabla_\xi \Phi(\xi,\eta) = \int_{R^{n-1}} \nu(\tau)(\nabla_\xi\varphi)(\tau\eta+\xi)d\tau,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}(\xi,\eta) = \int_{R^{n-1}} \nu(\tau)\tau(\nabla\varphi)(\tau\eta+\xi)d\tau,$$

то $\nabla\Phi \in MW_p^{\ell-1}(R_+^n)$ и справедлива оценка

$$\|\nabla\Phi; R_+^n\|_{\ell-1\to\ell-1} \le c\|\nabla\varphi; R^{n-1}\|_{\ell-1-1/p\to\ell-1-1/p}. \tag{2.8}$$

При $\ell=1$ левая часть этого неравенства мажорируется нормой $\|\nabla\varphi; R^{n-1}\|_\infty$.

В дальнейшем всякий раз, когда появляется норма $\|\cdot\|_{\ell-1-1/p\to\ell-1-1/p}$, исключительный случай $\ell=1$ не выделяется и норма $\|\cdot\|_{-1/p\to-1/p}$ будет обозначать (хотя в буквальном смысле это неправильно) норму в L_∞.

Из леммы 2.3 непосредственно вытекает

Следствие 2.1. *Пусть* G *- специальная липшицева область класса* $M_p^{\ell-1/p}$. *Пусть еще* α *- положительный* n*-мерный мультииндекс и* r *-целое неотрицательное число,* $\ell\geq|\alpha|-r>0$. *Тогда функция* $\zeta\to\eta^r(D^\alpha\Phi)(\zeta)$ *принадлежит пространству* $M(W_p^{\ell-1}(R_+^n)\to W_p^{\ell-|\alpha|+r}(R_+^n))$ *и имеет место оценка*

$$\|\eta^r D^\alpha\Phi;R_+^n\|_{\ell-1\to\ell-|\alpha|+r}\leq c\|\nabla\varphi;R^{n-1}\|_{\ell-1-1/p\to\ell-1-1/p}.$$

4°. Отображение λ и его свойства. Пусть G - специальная липшицева область класса $M_p^{\ell-1/p}$, $\ell\geq1$.

Следуя работе [4], введем отображение

$$R_+^n\ni\zeta=(\xi,\eta)\xrightarrow{\lambda}z=(x,y)\in G$$

равенствами

$$x=\xi,\quad y=K\eta+\Phi(\xi,\eta),\tag{2.9}$$

где K - постоянная, удовлетворяющая неравенству $K>L$. Согласно лемме 5.1 из [4], отображение λ - (p,ℓ)- диффеоморфизм.

По лемме 4.2 [4], отображение $\varkappa$, обратное к λ, является (p,ℓ)- диффеоморфизмом $G\to R_+^n$.

Так как область G (p,ℓ)- диффеоморфна R_+^n, то, по теоремам 2.5, 2.6 [3], $MW_p^{\ell-1/p}(\partial G)$ есть пространство следов функций из $MW_p^\ell(G)$.

Из следствия 2.1 немедленно получаем

Следствие 2.2. *Пусть* α *- положительный* n*-мерный мультииндекс,* r *- целое неотрицательное число,* $\ell\geq|\alpha|-r>0$ *и* $\lambda(\zeta)=\{\lambda_1(\zeta),\dots,\lambda_n(\zeta)\}$. *Тогда функции* $\zeta\to\eta^r(D^\alpha\lambda_i)(\zeta)$ *принадлежат пространству*

$$M(W_p^{\ell-1}(R_+^n)\to W_p^{\ell-|\alpha|+r}(R_+^n))$$

и справедлива оценка

$$\|\eta^r D^\alpha\lambda_i;R_+^n\|_{\ell-1\to\ell-|\alpha|+r}\leq c\|\nabla\varphi;R^{n-1}\|_{\ell-1-1/p\to\ell-1-1/p}.$$

Утверждение об отображении $\varkappa$, подобное следствию 2.2, требует отдельного доказательства.

Лемма 2.4. *Пусть* α *- положительный* n*-мерный мультииндекс,* r *- целое неотрицательное число,* $\ell\geq|\alpha|-r>0$ *и* $\varkappa(z)=\{\varkappa_1(z),\dots,\varkappa_n(z)\}$. *Тогда функции* $z\to(\eta^r D^\alpha\varkappa_i)(z)$ *принадлежат пространству* $M(W_p^{\ell-1}(G)\to W^{\ell-|\alpha|+r}(G))$ *и* *справедлива оценка*

$$\|\eta^r D^\alpha x_i ; G\|_{\ell-1\to\ell-|\alpha|+r} \le c\|\nabla\varphi ; R^{n-1}\|_{\ell-1-1/p\to\ell-1-1/p}.$$

Доказательство. Если $|\alpha|=1$, то утверждение следует из определения (φ,ℓ) - диффеоморфизма.

Допустим, что лемма доказана для $|\alpha|<N$. Пусть $|\alpha|=N, r<N$. Для любого мультииндекса δ порядка $N-1$ имеем

$$(D^\delta x')(z) = D^\delta[\lambda'(x(z))]^{-1} =$$

$$= \sum_{1\le|\beta|\le|\delta|} [D^\beta(\lambda')^{-1}](x(z)) \sum c_s \prod_{i=1}^{n}\prod_j D^{s_{ij}} x_i(z),$$

где суммирование ведется по всем наборам мультииндексов $s=(s_{ij})$ таких, что $\sum s_{ij}=\delta$, $|s_{ij}|\ge 1$, $\sum(|s_{ij}|-1)=|\delta|-|\beta|$. Следовательно, выражение $(\eta^r D^\delta x')(z)$ есть сумма слагаемых, каждое из которых является произведением двух сомножителей

$$\pi_1(z) = c_\beta[\eta^{|\beta|} D^\beta(\lambda')^{-1}](x(z)),$$

$$\pi_2(z) = \prod_{i=1}^{n}\prod_j (\eta^{r-|\beta|} D^{s_{ij}} x_i)(z).$$

Из следствия 2.2 вытекает, что функция $\zeta\to\eta^{|\beta|}D^\beta(\lambda')^{-1}$ принадлежит пространству $MW_p^{\ell-1}(R_+^n)$, и так как x - (φ,ℓ)- диффеоморфизм, то $\pi_1\in MW_p^{\ell-1}(G)$.

Обозначим через σ_{ij} целые положительные числа такие, что $\sigma_{ij}\le|s_{ij}|$, $\sum(\sigma_{ij}-1)=r-|\beta|$. Тогда

$$\pi_2(z) = \prod_{i=1}^{n}\prod_j (\eta^{\sigma_{ij}-1} D^{s_{ij}} x_i)(z).$$

Поскольку $|\beta|\ge 1$, то $|s_{ij}|\le N-1$ и к функции $z\to(\eta^{\sigma_{ij}-1}D^{s_{ij}}x_i)(z)$ применимо индукционное предположение, согласно которому она принадлежит пространству

$$M(W_p^q(G)\to W_p^{q-|s_{ij}|+\sigma_{ij}}(G)),\ q=|s_{ij}|-\sigma_{ij},\dots,\ell-1.$$

Значит,

$\pi_2 \in M\left(W_p^{l-1}(G) \to W_p^{l-1-\sum(|s_{ij}|-\sigma_{ij})}(G)\right) = M\left(W_p^{l-1}(G) \to W_p^{l-1-|\delta|+r}(G)\right)$,

и так как $|\alpha| = 1 + |\delta|$ и $\pi_1 \in MW_p^{l-1}(G)$, то $\pi_1\pi_2 \in M\left(W_p^{l-1}(G) \to W_p^{l-|\alpha|+r}(G)\right)$.

Лемма доказана.

Так как (ρ, l) - диффеоморфизм оставляет инвариантным пространство W_p^l, то функция u, заданная на ∂G, принадлежит пространству $W_p^{l-1/p}(\partial G)$ в том и только в том случае, если $u \circ tr\lambda \in W_p^{l-1/p}(R^{n-1})$. Положим

$$\| u; \partial G \|_{p, l-1/p} = \| u \circ tr\lambda ; R^{n-1} \|_{p, l-1/p}.$$

Если здесь вместо λ взять произвольный (ρ, l)- диффеоморфизм $R_+^n \to G$, то получим эквивалентную норму (см. [4, леммы 4.1, 4.2 и 4.4]).

§ 3. Нётеровость эллиптической краевой задачи

1°. Ограниченные области класса $M_p^{l-1/p}$ и условие $N_p^{l-1/p}$.

Пусть Ω - ограниченная область класса $C^{0,1}$.

Объединим в класс $M_p^{l-1/p}$ $(l = 2, 3, \dots)$ области Ω, удовлетворяющие следующему условию. Для каждой точки границы $\partial\Omega$ найдется окрестность, в которой $\partial\Omega$ допускает задание (в некоторой декартовой системе координат) с помощью функции φ такой, что $\nabla\varphi \in MW_p^{l-1-1/p}(R^{n-1})$. Кроме того, по определению, $M_p^{1-1/p} = C^{0,1}$.

Будем говорить еще, что область Ω принадлежит классу $W_p^{l-1/p}$, если $\partial\Omega$ может быть локально задана с помощью функции $\varphi \in W_p^{l-1/p}(R^{n-1})$.

Так как $MW_p^{l-1-1/p}(R^{n-1}) \subset W_p^{l-1-1/p}(R^{n-1}, loc)$, $l \geq 2$, и $C^{0,1}(R^{n-1}) \subset W_p^{1-1/p}(R^{n-1}, loc)$, то любая ограниченная область из $M_p^{l-1/p}$ принадлежит классу $W_p^{l-1/p}$.

Согласно следствию 1.5 работы [3], если $p(l-1) > n$, то

$$\| \nabla\varphi ; R^{n-1} \|_{l-1-1/p \to l-1-1/p} \sim \sup_{x \in R^{n-1}} \| \nabla\varphi ; B_1(x) \|_{p, l-1-1/p}.$$

Поэтому при $p(l-1) > n$ классы ограниченных областей $M_p^{l-1/p}$ и $W_p^{l-1/p}$ совпадают.

Для ограниченной области Ω класса $C^{0,1}$ обозначим через $W_p^{l-1/p}(\partial\Omega)$ пространство следов на $\partial\Omega$ функций из $W_p^l(\Omega)$.

Вспоминая аналогичный факт для специальных липшицевых областей класса $M_p^{l-1/p}$ (см.§ 2), получаем, что $MW_p^{l-1/p}(\partial\Omega)$ является пространством следов функций из $MW_p^l(\Omega)$.

Пусть $P, P_1, \dots, P_h$ - дифференциальные операторы в $\bar{\Omega}$ порядков

$2h, k_1, \ldots, k_h$, где $2h \le \ell$, $k_j < \ell$. Предположим, что коэффициенты операторов P и P_j принадлежат пространствам $C^{\ell-2h}(\bar{\Omega})$ и $C^{\ell-k_j}(\bar{\Omega})$ соответственно. (Это ограничение можно существенно ослабить, используя пространства мультипликаторов, но мы предпочитаем не усложнять формулировки.) Допустим, что операторы $P, trP_1, \ldots, trP_h$ образуют эллиптическую краевую задачу в каждой точке $0 \in \partial\Omega$ относительно плоскости $y=0$ и что оператор P эллиптический в Ω.

В дальнейшем важную роль играет следующее дополнительное требование к области Ω, называемое в дальнейшем условием $N_p^{\ell-1/p}$.

Для каждой точки $0 \in \partial\Omega$ существуют окрестность U и специальная липшицева область $G=\{z=(x,y): x\in R^{n-1}, y>\varphi(x)\}$ такие, что $U\cap\Omega = U\cap G$ и

$$\|\nabla\varphi; R^{n-1}\|_{\ell-1-1/p \to \ell-1-1/p} \le \delta.$$

Здесь $p(\ell-1) \le n$ и δ - некоторая постоянная, зависящая от значений в точке 0 коэффициентов главных однородных частей операторов $P, P_1, \ldots, P_h$ в системе координат (x,y). При $\ell=1$ роль последнего неравенства играет оценка $\|\nabla\varphi; R^{n-1}\|_\infty \le \delta$.

Очевидно, области, удовлетворяющие условию $N_p^{\ell-1/p}$, принадлежат классу $M_p^{\ell-1/p}$ и тем более классу $W_p^{\ell-1/p}$. В § 6 будет дана эквивалентная формулировка условия $N_p^{\ell-1/p}$ и вытекающие из нее достаточные признаки выполнения этого условия.

2°. Нётеровость эллиптической краевой задачи в случае $p(\ell-1) \le n$.

Теорема 3.1. *Если $p(\ell-1) \le n$, $1<p<\infty$, и область Ω удовлетворяет условию $N_p^{\ell-1/p}$, то для любой функции $u \in W_p^\ell(\Omega)$ имеет место оценка*

$$\|u;\Omega\|_{p,\ell} \le c\left(\|Pu;\Omega\|_{p,\ell-2h} + \sum_{j=1}^{h} \|trP_j u; \partial\Omega\|_{p,\ell-k_j-1/p} + \|u;\Omega\|_1\right) \quad (3.1)$$

и оператор

$$\{P, trP_1, \ldots, trP_h\}: W_p^\ell(\Omega) \to W_p^{\ell-2h}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{h} W_p^{\ell-k_j-1/p}(\partial\Omega) \quad (3.2)$$

нётеров.

Доказательство. Получим априорную оценку (3.1). Будем использовать те же обозначения, что и в условии $N_p^{\ell-1/p}$. Пусть U - открытый шар малого радиуса, $\zeta \in C_0^\infty(U)$, а R и R_j - главные однородные части операторов P и P_j с замороженными в точке 0 коэффициентами. Ясно, что

$$\|(P-R)(\zeta u); U\cap\Omega\|_{p,\ell-2h} \le \varepsilon \|\zeta u; U\cap\Omega\|_{p,\ell} + c\|\zeta u; U\cap\Omega\|_{p,\ell-1}, \quad (3.3)$$

где ε - малое положительное число (требуемая степень малости определяется коэффициентами операторов $R, R_1, \ldots, R_h$). Аналогичная оценка получается для нормы $(P_j-R_j)(\zeta u)$ в $W_p^{\ell-k_j}(U\cap\Omega)$.

В силу условия $N_p^{l-1/p}$, константа Липшица функции φ мала, поэтому в определении (2.9) отображения $\lambda: R_+^n \to G$ можно положить $K=1$. Тогда из оценки (2.8) получаем, что матрица λ' отличается от единичной по норме пространства $MW_p^{l-1}(R_+^n)$ на $O(\delta)$. Согласно [15], для всех функций $v \in W_p^l(R_+^n)$ с носителями в $B_1 \cap \overline{R_+^n}$ справедливо

$$\|v; R_+^n\|_{p,l} \leq c\left(\|Rv; R_+^n\|_{p,l-2h} + \sum_{j=1}^{n} \|trR_j v; R^{n-1}\|_{p,l-k_j-1/p}\right).$$

Малость числа δ позволяет заменить здесь R и R_j на S и S_j соответственно. Из полученной таким образом оценки и леммы 2.3 следует неравенство

$$\|\zeta u; U\cap\Omega\|_{p,l} \leq c\Big(\|R(\zeta u); U\cap\Omega\|_{p,l-2h} +$$
$$+\sum_{j=1}^{h} \|trR_j(\zeta u); U\cap\partial\Omega\|_{p,l-k_j-1/p}.$$

Отсюда и из (3.3) выводим оценку

$$\|\zeta u; \Omega\|_{p,l} \leq c\,(\|P(\zeta u); \Omega\|_{p,l-2h} +$$
$$+\sum_{j=1}^{h} \|tr P_j(\zeta u); \Omega\|_{p,l-k_j-1/p} + \|\zeta u; \Omega\|_{p,l-1}).$$

Суммируя по всем достаточно малым окрестностям U, образующим покрытие Ω, получаем неравенство

$$\|u; \Omega\|_{p,l} \leq c\left(\|Pu; \Omega\|_{p,l-2h} + \sum_{j=1}^{h} \|trP_j u; \partial\Omega\|_{p,l-k_j-1/p} + \|u; \Omega\|_{p,l-1}\right).$$

Остается воспользоваться известным неравенством

$$\|u; \Omega\|_{p,l-1} \leq \varepsilon\|u; \Omega\|_{p,l} + c(\varepsilon)\|u; \Omega\|_1,$$

где ε - сколь угодно малое положительное число. Оценка (3.1) доказана.

Построение правого регуляризатора не требует новых соображений и проводится по стандартной схеме. Теорема доказана.

3°. Нётеровость эллиптической краевой задачи в случае $p(l-1)>n$.

Теорема 3.2. *Если* $p(l-1)>n$, $1<p<\infty$, *и* $\Omega \in W_p^{l-1/p}$, *то справедливы утверждения теоремы 3.1.*

Доказательство. Из условия $\Omega \subset W_p^{l-1/p}$ и теоремы вложения С.Л.Соболева следует, что область имеет границу класса C^1. Поместим начало координат в точку $0 \in \partial\Omega$ и направим ось Oy по внутренней нормали к $\partial\Omega$.

Пусть $\mathcal{U}$ - окрестность точки O из определения класса $W_p^{\ell-1/p}$, т.е. $\mathcal{U}\cap\Omega=\mathcal{U}\cap G$, где $G=\{z: x\in R^{n-1}, y>\varphi(x)\}$ и $\varphi\in W_p^{\ell-1/p}(R^{n-1})$. Обозначим через ε малое положительное число, которое будет выбрано в дальнейшем, и пусть $B_\rho=\{z\in R^n : |z|<\rho\}$. Выберем столь малое число ρ, что

$$\|\nabla\varphi\,;\,B_\rho\cap R^{n-1}\|_\infty<\varepsilon$$

и $\overline{B}_{2\rho}\subset\mathcal{U}$. Пусть $\eta\in C_0^\infty(B_2), \eta=1$ на B_1 и $\eta_\rho(z)=\eta(z/\rho)$. Введем функцию $\varphi^*=\varphi\eta_\rho$ на R^{n-1} и заметим, что $\|\nabla\varphi^*;R^{n-1}\|_\infty<c\varepsilon$. Определим продолжение Φ функции φ^* на полупространство R^n_+ равенством $\Phi=T\varphi^*$. В силу оценки (2.8), где функция φ заменена на φ^*,

$$\|\nabla\Phi;\,R^n_+\|_\infty\leq c\varepsilon. \tag{3.4}$$

Так как

$$\|\varphi^*;R^{n-1}\|_{p,\ell-1/p}\leq c(\rho)\|\varphi;R^{n-1}\|_{p,\ell-1/p},$$

то

$$\|\Phi\,;\,R^n_+\|_{p,\ell}\leq c(\rho)\|\varphi\,;\,R^{n-1}\|_{p,\ell-1/p}.$$

Пусть теперь r - столь малое положительное число, что $r<\rho$ и

$$r^{\ell-1-n/p}\|\Phi;\,R^n_+\|_{p,\ell}<\varepsilon. \tag{3.5}$$

Поскольку

$$\|\nabla\Phi;B_r\cap R^n_+\|_{p,\ell-1}\leq c\left(\|\nabla_\ell\Phi;B_r\cap R^n_+\|_p+r^{1-\ell+n/p}\|\nabla\Phi;B_r\cap R^n_+\|_\infty\right),$$

то; в силу (3.4) и (3.5),

$$r^{\ell-1-n/p}\|\nabla\Phi;\,B_r\cap R^n_+\|_{p,\ell-1}\leq c\varepsilon.$$

Согласно (1.4), последнее неравенство означает, что

$$\|\nabla\Phi;B_r\cap R^n_+\|_{\ell-1\to\ell-1}\leq c\varepsilon.$$

По функции Φ построим отображение λ равенствами (2.3), где $K=1$. Из последнего неравенства следует оценка

$$\|E-\lambda';\,B_r\cap B^n_+\|_{\ell-1\to\ell-1}\leq c\varepsilon.$$

Теперь достаточно провести рассуждения, уже использованные в теореме 3.1. При этом роль шара $\mathcal{U}$ играет B_r. Следует применить оценку (2.6) вместо (2.4). Построение правого регуляризатора проводится стандартным образом. Теорема доказана.

Повторяя известные доказательства (см. [14, 15]), из оценки (3.1) выводим

Следствие 3.1. *Если ядро оператора* (3.2) *тривиально, то норму* $\|u;\Omega\|_1$ *в* (3.1) *можно опустить.*

Следствие 3.2. *Пусть* $\mathcal{U}$ *и* V *- открытые подмножества* R^n, $\mathcal{U}\subset V$ *и* $u\in W_p^\ell(V\cap\Omega)$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|u;\mathcal{U}\cap\Omega\|_{p,\ell}\le c\Big(\|Pu;V\cap\Omega\|_{p,\ell-2h}+$$
$$+\sum_{j=1}^{h}\|trP_ju;\;V\cap\partial\Omega\|_{p,\ell-k_j-1/p}+\|u;V\cap\Omega\|_1\Big).$$

Литература

1. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. О мультипликаторах в пространствах функций с дробными производными.- Докл.АН СССР, 1979, т.244, №5, с.1065-1067.
2. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. О мультипликаторах в пространствах С.Л.Соболева.- Вестник Ленингр.ун-та. Серия математика,механика, астрономия, 1979, №7, с.33-40.
3. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций.-В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л.Соболева), 1979, №1, с.37-90.
4. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. Мультипликаторы пространств С.Л.Соболева в области.- Math.Machr. B.96, 1980.
5. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.- Труды Московск.мат.о-ва,1967, т.16, с.209-292.
6. Вержбинский Г.М., Мазья В.Г. Об асимптотике решения задачи Дирихле вблизи нерегулярной границы.- Докл.АН СССР, 1967, т.176, №3, с.498-501.
7. Кондратьев В.А. О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в кусочно-гладкой области.- Дифференц.уравнения, 1970, т.6, №10, с.1831-1843.
8. Вержбинский Г.М., Мазья В.Г. О замыкании в L_p оператора задачи Дирихле в области с коническими точками.- Изв.вузов.Математика, 1974,№6, с.8-19.
9. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.- Math.Nachr., 1978, B.81, S.25-82.
10. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. L_p- оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами.- Труды Московск.мат.о-ва,1978,т.37, с.49-94.

11. Мазья В.Г. О коэрцитивности задачи Дирихле в области с нерегулярной границей.- Изв.вузов.Математика, 1973, №4, с.64-76.
12. Кондратьев В.А., Эйдельман С.Д. Об условиях на граничную поверхность в теории эллиптических граничных задач.- Докл.АН СССР, 1979, т.246, №4, с.812-815.
13. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. О требованиях к границе в L_p-теории эллиптических краевых задач.- Докл.АН СССР, 1980, т.251, №5, с.1055-1059.
14. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными.- М.: Мир, 1965.-379с.
15. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.- М.: ИЛ, 1962.- 205с.