УДК 517.947

О ПОВЕДЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ РАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Д.Л.Ткачёв, Г.А.Шмырёв (Новосибирск)

Исследованию поведения на бесконечности решений краевых задач для эллиптических уравнений и систем в неограниченных областях посвящено в настоящее время большое число работ. Достаточно полное изложение данного вопроса и библиографию к нему можно найти в работах [1-18] , где доказаны теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделёфа, исследованы вопросы единственности и существования решения в различных классах функций (с бесконечным интегралом энергии, экспоненциально растущих, суммируемых с весом и т.д.), а также получены априорные оценки.

В настоящей работе исследуется поведение на бесконечности решения задачи Дирихле для равномерно эллиптического оператора 2-го порядка в предположении, что область удовлетворяет некоторым условиям геометрического характера, при которых имеют место теорема Хопфа и теорема типа Жиро [1] . Получена скорость убывания решения при $|x| \longrightarrow \infty$ в зависимости от поведения коэффициентов и свойств правой части.

В неограниченной области $G \subset R^n$ с некомпактной границей $\Gamma = \partial G$ рассматривается задача Дирихле:

$$\begin{cases} L(x,D)u = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f, & (1) \\ u\big|_{\Gamma} = 0. & (2) \end{cases}$$

Оператор $L(x,D)$ предполагается равномерно эллиптическим, т.е.существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (константы эллиптичности) такие, что

$$\lambda_1 |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \lambda_2 |\xi|^2 \quad \forall x \in G, \tag{3}$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x).$$

Определение. Следуя работе [19] , будем говорить, что в точке $M_0 \in \Gamma$ выполняется условие $D - \Omega$ строгой параболоидности, если существует параболоид $\Pi(M_0,h) = M_0 + \{\xi : 0 < p(|\xi|) < \eta < h\}$ (здесь ξ - касательные координаты; η - координата вдоль вектора нормали $\vec{n}$; $p(s) = s\Omega(s)$, а модуль непрерывности $\Omega(s)$ удовлетворяет условию Дини) такой, что $\overline{\Pi}(M_0,h) \subset G$,

$\bar{\Pi}(M_0, h) \cap \Gamma = M_0$.

Введем некоторые ограничения на границу Γ и коэффициенты оператора $L(x, D)$:

1) В каждой точке $x \in \Gamma$ выполнено условие D-Ω строгой параболоидности и вектор $\vec{\nu} = \|a_{ij}(x)\| \cdot \vec{n}$ направлен строго внутрь G.

2) Коэффициенты оператора $L(x, D)$ принадлежат C' и с некоторой скоростью стабилизируются на бесконечности, т.е. существуют постоянные C и $K > 1$ такие, что имеет место

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_\ell} a_{ij(x)} \right| < C(1 + |x|)^{-K}, \quad \ell = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Будем предполагать, что $f(x) \in C^\lambda$ и для нее выполнено одно из условий:

3)
$$|f(x)| \leqslant \frac{C}{(1 + |x|)^\ell}, \quad \ell > 2.$$

3') $f(x) \in L_{p,\beta}(E_n), p > \frac{n}{2}, n(p-1) > \beta > 2(p - \frac{n}{2})$, т.е. конечна норма

$$\|f(x), L_{p,\beta}\| = \|f(x)(1 + |x|)^{\frac{\beta}{p}}, L_p\| < \infty.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1) - 3). Тогда если $u(x)$ - решение задачи (1), (2), удовлетворяющее условию*

$$\lim_{|x| \to \infty} |u(x)| = 0, \tag{5}$$

то имеет место оценка

$$|u(x)| \leqslant \frac{C(\varepsilon)|x|^\varepsilon}{(1 + |x|)} \varkappa,$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, $\varkappa = \min\{K-1, \ell-2, n-2\}$.

Теорема 1'. *Пусть выполнены предположения 1), 2), 3'). Тогда если $u(x)$ - решение задачи (1), (2), удовлетворяющее условию (5), то имеет место оценка*

$$|u(x)| \leqslant \frac{C(\varepsilon)|x|^\varepsilon}{(1 + |x|)^{K_1 - 1}} + C|x|^{-\varkappa} \|f, L_{p,\beta}\|,$$

где
$$\varkappa = \frac{\beta}{np} - \frac{2}{n} + \frac{1}{p} > 0, \quad K_1 = \min\{K, n\}.$$

Для доказательства теорем нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Построим по $u(x)$ среднюю функцию

$$u_h(x) = \frac{h^{-\frac{n}{2}}}{\left(2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^m} \int \hat{G}\left(x, \frac{t - x}{h^{1/2}}\right) u(t) \, dt, \tag{6}$$

где
$$\hat{G}(x,\tau) = \int e^{i\tau\xi} G_0^m(\xi)d\xi , \tag{7}$$

а
$$G_0(\xi) = \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}\left(\sqrt{a_{ij}(x)\xi_i\xi_j}\right)\left(\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right)^{-\frac{n-2}{2}} , \tag{8}$$

m - некоторое целое число, $m > 2$, $\mathcal{J}_\nu(z)$ - функция Бесселя со значком ν .

Обозначим через $\overset{\circ}{C}{}^1$ пространство непрерывно дифференцируемых финитных функций.

Имеет место следующая

Лемма 1. *При любом фиксированном* $x \in E_n$ *функция* $\hat{G}(x,\tau) \in \overset{\circ}{C}{}^1(E_n)$, $\operatorname{supp} G \subset \{\tau : |\tau| \leqslant \sqrt{\lambda_2}\, m\}$, *где* λ_2 - *константа эллиптичности в* (3) *и* $\hat{G}(x,\tau) \geqslant 0 \quad \forall \tau \in E_n$.

Доказательство. Для функций Бесселя справедливы представления (см. [20 , гл.IX, §2]):
$$\mathcal{J}_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} , \tag{9}$$

$$\mathcal{J}_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\pm itx}dt. \tag{10}$$

Тогда, в силу (9), имеем
$$G_0(\xi) = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)}\,\frac{\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right)^k}{2^{2k}} ,$$

т.е. $G_0(\xi)$ - целая функция, следовательно, и $G_0^m(\xi)$ также является целой функцией. Из (10), заменив x на
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)z_i z_j ,$$
где z_i -комплексные, получим
$$\left|\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}\left(\sqrt{\sum a_{ij}(x)z_iz_j}\right)\left(\sqrt{\sum a_{ij}(x)z_iz_j}\right)^{-\frac{n-2}{2}}\right| \leqslant C_1 e^{\lambda_2^{\frac{1}{2}}|z|} ,$$

откуда имеем $|G_0^m(z)| \leqslant C_2 e^{m\sqrt{\lambda_2}|z|}$.

Таким образом, функция $G_0^m(z)$ является целой функцией экспоненциального сферического типа $m\sqrt{\lambda_2}$ (см. [21]). Кроме того, при $m>2$ функция

$G_0^m(\xi) \in L_1(R^n)$, что получается непосредственно из формулы асимптотического разложения при $|x| \to \infty$ (см. [20 , формула (IX.2; 24)])

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}}\right).$$

Таким образом, выполнены требования теоремы Пэли-Винера [21] . Тем самым первое утверждение леммы доказано. Отметим, что $\hat{G}(x,\tau) \in \overset{\circ}{C}{}^{\ell}$ для любого $\ell < m\left(\frac{n-1}{2}\right) - n$, что легко проверяется в силу соотношения $D^\alpha \mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}((i\xi)^\alpha \varphi)$, где $\mathcal{F}(\varphi)$ - преобразование Фурье функции φ.

Докажем теперь, что при фиксированном x функция $\hat{G}(x,\tau) \geq 0$. Для этого достаточно установить, что

$$\int \hat{G}(x,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \geq 0 \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}, \ \varphi \geq 0. \tag{11}$$

Обозначим для удобства

$$<\xi> = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j .$$

Покажем, что

$$\int e^{i\tau\xi} J_{\frac{n-2}{2}}(<\xi>)<\xi>^{-\frac{n-2}{2}} d\xi = C(x)\,\delta(S(x)), \tag{12}$$

где $\delta(S(x))$ обозначает обобщенную функцию, сосредоточенную на поверхности $S(x) = \{\tau : \sum a_{ij}(x)\tau_i\tau_j = 1\}$ (см.[22]) , $C(x) \geq C > 0$. Действительно, в силу (3) , существует преобразование $B(x)$ такое, что $A(x) = B^*(x)\cdot B(x)$, $\det B(x) \geq C_0 > 0$, где $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$. Произведя замену $\tau = B(x)\eta$, имеем

$$\int_{E_n} e^{i\tau\xi}\delta(S(x))d\tau = \int_{S(x)} e^{i\tau\xi}d\tau = \det B \int_{|\eta|=1} e^{i(\eta, B\xi)}d\eta =$$

(переходя к полярным координатам и учитывая (10) , имеем)

$$= \det B(x)\cdot 2\pi\, J_{\frac{n-2}{2}}(|B(x)\xi|)\,|B(x)\xi|^{-\frac{n-2}{2}}.$$

Так как $|B(x)\xi| = \sqrt{(B(x)\xi, B(x)\xi)} = \sqrt{\xi B^*(x) B(x)\xi} = \sqrt{\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j}$, то

$\mathcal{F}(\delta(S(x))) = C(x) J_{\frac{n-2}{2}}(<\xi>)<\xi>^{-\frac{n-2}{2}}$. Поскольку преобразование Фурье осуществляет изоморфизм в пространстве Шварца S' , тем самым (12) доказано. Воспользуемся следующими соотношениями:

$$\mathcal{F}(\varphi\psi) = \mathcal{F}(\varphi) * \mathcal{F}(\psi), \quad \int f(\xi) g(\xi) d\xi = (f * \bar{g})(0),$$

где $\mathcal{F}$ - оператор преобразования Фурье, $*$ - свертка, $\bar{g}(x) = g(-x)$. В силу этих формул,

$$\int \widehat{G}(x,\tau)\varphi(\tau)d\tau = \Big(\underbrace{\mathcal{F}\big(J_{\frac{n-2}{2}}<\xi><\xi>\big)^{-\frac{n-2}{2}} * \ldots * \mathcal{F}\big(J_{\frac{n-2}{2}}<\xi><\xi>^{-\frac{n-2}{2}}}_{m \text{ раз}}\big) * \overline{\varphi}\Big)(0) =$$

(свертка существует и ассоциативна в силу компактности носителей $\delta(S(x))$ и φ. Учитывая (12), получаем)

$$= (C(x))^m \big(\delta(S(x)) * \ldots * \delta(S(x)) * (\delta(S(x)) * \overline{\varphi})\big)(0).$$

Так как $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}$, то и $\overline{\varphi} \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}$. Но тогда

$$\overline{\varphi}_1(\eta) = \delta(S(x)) * \overline{\varphi} = \int_{S(x)} \varphi(\eta-\xi)d\xi \quad -$$

неотрицательная функция из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$.

Повторяя это рассуждение $m-1$ раз, получаем, что

$$\int \widehat{G}(x,\tau)\varphi(\tau)d\tau = (c(x))^m(\delta(S(x)) * \varphi_{m-1})(0) = \int_{S(x)} \varphi_{m-1}(\eta-\xi)d\xi \geq 0,$$

поскольку на каждом шаге у нас получается неотрицательная функция из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$. Тем самым установлена справедливость (11), т.е. неотрицательность функции $\widehat{G}(x,\tau)$. Лемма доказана.

Обозначим

$$G_1(x,\xi) = \frac{m}{2}\left(J_{\frac{n-2}{2}}(<\xi>)<\xi>^{-\frac{n-2}{2}}\right)^{m-1} J_{\frac{n}{2}}(<\xi>)<\xi>^{-\frac{n}{2}}. \tag{13}$$

Здесь, как и ранее,

$$<\xi> = \sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

Имеет место следующая

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\frac{d}{dh}h^{-\frac{n}{2}}\widehat{G}\left(x,\frac{t-x}{h^{1/2}}\right) = h^{-\frac{n}{2}}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j}\widehat{G}_1\left(x,\frac{t-x}{h^{1/2}}\right), \tag{14}$$

где $\widehat{G}_1(x,\tau)$ *– неотрицательная финитная функция.*

Доказательство. Сделав замену $\frac{\xi_i}{h^{1/2}} = \overline{\xi}_i$, имеем

$$\frac{d}{dh}h^{-\frac{n}{2}}\widehat{G}\left(x,\frac{t-x}{h^{1/2}}\right) = \frac{d}{dh}h^{-\frac{n}{2}}\int e^{i\left(\frac{t-x}{h^{1/2}}\right)\xi} G_0^m(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{d}{dh}\int e^{i(t-x)\overline{\xi}}\left[J_{\frac{n-2}{2}}(h^{1/2}<\overline{\xi}>)(h^{1/2}<\overline{\xi}>)^{-\frac{n-2}{2}}\right]^m d\overline{\xi}. \tag{15}$$

Обозначив $z = h^{1/2}<\overline{\xi}>$, получим

$$\frac{d}{dh}\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(z)z^{-\frac{n-2}{2}}=\frac{d}{dz}\left(\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(z)z^{-\frac{n-2}{2}}\right)\frac{<\bar{\xi}>^2}{2z}=$$

(применяя соотношение

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(\mathcal{J}_\nu(z)z^{-\nu}\right)=-z^{-(\nu+1)}\mathcal{J}_{\nu+1}(z)$$

(см. [20 , формула IX.1; 74])и возвращаясь к переменным $\bar{\xi}$, имеем)

$$=-\frac{1}{2}\mathcal{J}_{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{a_{ij}(x)\bar{\xi}_i\bar{\xi}_j}\right)\left(\sqrt{\sum a_{ij}(x)\bar{\xi}_i\bar{\xi}_j}\right)^{-\frac{n-2}{2}}\left(\sum a_{ij}(x)\bar{\xi}_i\bar{\xi}_j\right).$$

Дифференцируя подынтегральную функцию в (15) по h , получаем

$$\frac{d}{dh}\left(\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}\left(h^{1/2}<\bar{\xi}>\right)\left(h^{1/2}<\bar{\xi}>\right)^{-\frac{n-2}{2}}\right)^m=-\frac{m}{2}\left(\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}\left(h^{1/2}\xi\right)\left(h^{1/2}<\xi>\right)^{-\frac{n-2}{2}}\right)^{m-1}\times$$

$$\times\,\mathcal{J}_{\frac{n}{2}}\left(h^{1/2}<\bar{\xi}>\right)\left(h^{1/2}<\bar{\xi}>\right)^{-\frac{n}{2}}<\bar{\xi}>^2=-\frac{m}{2}G_1\left(x,h^{1/2}<\bar{\xi}>\right)<\bar{\xi}>^2. \qquad (16)$$

Пусть m выбрано так, что $(m-1)\left(\frac{n-1}{2}\right)+\frac{n+1}{2}-2>n$. Тогда функция $G_1\left(x,h^{1/2}<\bar{\xi}>\right)<\bar{\xi}>^2$ интегрируема, и, следовательно, допустимо дифференцирование по параметру под знаком интеграла, откуда с учетом (16) получаем, что

$$\frac{d}{dh}h^{-\frac{n}{2}}\widehat{G}\left(x,\frac{t-x}{h^{1/2}}\right)=\int e^{i(t-x)\bar{\xi}}\left(-\frac{m}{2}\right)\widehat{G}_1\left(x,h^{1/2}<\bar{\xi}>\right)<\bar{\xi}>^2d\bar{\xi}=$$

$$=\frac{m}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial t_i\partial t_j}\int e^{i(t-x)\bar{\xi}}G_1\left(x,h^{1/2}<\bar{\xi}>\right)d\bar{\xi}.$$

Произведя обратную замену $\bar{\xi}_i=\frac{\xi_i}{h^{1/2}}$, получаем (14). Финитность функции $\widehat{G}_1(x,\tau)$ проверяется так же, как и в лемме 1. Можно отметить, что $\widehat{G}_1(x,\tau)\in\overset{\circ}{C}{}^{\ell}(E_n)$ для $\ell<(m-1)\left(\frac{n-1}{2}\right)+\frac{n+1}{2}-n.$

Докажем неотрицательность функции $\widehat{G}_1(x,\tau)$. Для этого, рассуждая, как и в лемме 1, достаточно показать неотрицательность функции $\widehat{\mathcal{J}_{\frac{n}{2}}(<\xi>)<\xi>^{-\frac{n}{2}}}*\varphi(\xi)$ для любой неотрицательной функции $\varphi(\xi)\in\overset{\circ}{C}{}^{\infty}.$

Введем дополнительные переменные $t'=(t_{n+1},t_{n+2})$. Обозначим $t''=(t,t')=$ $=(t_1,\dots,t_{n+2})$. Пусть $\eta(t')\in\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(E_2)$ - некоторая функция такая, что $\eta(0)=1$ и $\eta(t')=1$ при $|t'|\leq K$, где K достаточно велико. Тогда

$$\left(\widehat{\mathcal{J}_{\frac{n}{2}}(<\xi>)<\xi>^{-\frac{n}{2}}}*\varphi(\xi)\right)(\tau)=\int_{E_n}\left(\mathcal{J}_{\frac{n}{2}}\widehat{(<\xi>)<\xi>^{-\frac{n}{2}}}\right)(t)\varphi(\tau-t)dt=$$

$$= \int_{E_{n+2}} \hat{f}(t')\, \widehat{\mathcal{I}_{\frac{n}{2}}(\langle\xi\rangle)\langle\xi\rangle^{-\frac{n}{2}}}(t)\, \varphi(\tau-t)\, \eta(-t')\, dt\, dt' =$$

$$= \int_{E_{n+2}} \delta(t')\, f(t') \int e^{it\xi}\, \mathcal{I}_{\frac{n}{2}}(\langle\xi\rangle)\langle\xi\rangle^{-\frac{n}{2}} d\xi\ \varphi(\tau-t)\, \eta(0-t')\, dt\, dt' =$$

(обозначим $\langle\xi''\rangle = \sqrt{\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j + \xi_{n+1}^2 + \xi_{n+2}^2}$, $\tilde{\varphi}(t'') = \varphi(t)\eta(t')$)

$$= \int_{E_{n+2}} \left(\int_{E_{n+2}} e^{it''\xi''}\, \mathcal{I}_{\frac{n}{2}}(\langle\xi''\rangle)\langle\xi''\rangle^{-\frac{n}{2}}\, \delta(\xi')\, d\xi'' \right) \tilde{\varphi}(\tau-t, 0-t')\, dt'' =$$

(используя формулу $\mathcal{F}(g\varphi) = \mathcal{F}(g) * \mathcal{F}(\varphi)$, имеем)

$$= \left(\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_{\frac{n}{2}}(\langle\xi'\rangle)\langle\xi'\rangle^{-\frac{n}{2}}\right) * \mathcal{F}\left(f(\xi)\,\delta(\xi')\right) * \tilde{\varphi}\right)(\tau)\Big|_{\tau'=0} =$$

(используя (12), получаем)

$$= \left(\delta(\tilde{S}(x)) * \delta(\xi')f(\xi) * \tilde{\varphi}\right)(\tau)\Big|_{\tau'=0}.$$

Здесь $\tilde{S}(x)$ - поверхность в E^{n+2} такая, что

$$\tilde{S}(x) = \left\{\xi' : \sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j + \xi_{n+1}^2 + \xi_{n+2}^2 = 1\right\},\quad \mathcal{F}(f(\xi)\,\delta(\xi'))$$

- преобразование Фурье от прямого произведения обобщенных функций $\delta(\xi')f(\xi)$ (см. [22]).

Таким образом,

$$\left(\widehat{\mathcal{I}_{\frac{n}{2}}\langle\xi\rangle\langle\xi\rangle^{-\frac{n}{2}}} * \varphi(\xi)\right)(\tau) = \int_{\tilde{S}(x)} \varphi(\tau-t)\, \eta(t')\, dS =$$

(в силу выбора функции η имеем) $= \int_{S(x)} \varphi(\tau-t)\, dS$. Отсюда следует в силу выбора φ , что $\widehat{\mathcal{I}_{\frac{n}{2}}(\langle\xi\rangle)\langle\xi\rangle^{-\frac{n}{2}}} * \varphi(\xi)$ - неотрицательная, финитная, бесконечно дифференцируемая функция. Далее поступаем, как в лемме 1. Лемма 2 доказана.

Обозначим

$$\begin{aligned} \hat{G}_{1j}(x,\tau) &= \int e^{i\tau\xi}\, \xi_j\, G_1(x,\xi)\, d\xi, \\ \hat{G}_{1ij}(x,\tau) &= \int e^{i\tau\xi}\, \xi_i\, \xi_j\, G_1(x,\xi)\, d\xi, \\ \vec{\nu} &= A(t)\cdot\vec{n}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\vec{n}$ - вектор внутренней нормали к Γ в точке t , $A(t) = \| a_{ij}(t) \|$ - матрица из коэффициентов оператора $L(t, D_t)$.

Лемма 3. *Пусть функция u является решением задачи* (1), (2) *и удовлет-*

воряет условию (5). Тогда для любого $x \in G$ имеет место представление

$$u(x) = \int_0^\infty h^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \int_{E_n} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial t_j} a_{ij}(t) \hat{G}_{ij}\left(x, \frac{t-x}{h^{1/2}}\right) u(t)\,dt\,dh +$$

$$+ \int_0^\infty h^{-\frac{n}{2}-1} \int_{E_n} \sum_{i,j=1}^{n} \{a_{ij}(x) - a_{ij}(t)\} \hat{G}_{1ij}\left(x, \frac{t-x}{h^{1/2}}\right) u(t)\,dt\,dh +$$

$$+ \int_0^\infty h^{-\frac{n}{2}} \int_{E_n} \hat{G}_1\left(x, \frac{t-x}{h^{1/2}}\right) f(t)\,dt\,dh +$$

$$+ \int_0^\infty h^{-\frac{n}{2}} \int \frac{\partial u(t)}{\partial \vec{\nu}} \hat{G}_1\left(x, \frac{t-x}{h^{1/2}}\right) dt\,dh =$$

$$= \mathcal{J}_1(x) + \mathcal{J}_2(x) + \mathcal{J}_3(x) + \mathcal{J}_4(x). \tag{18}$$

Доказательство. Будем предполагать, что функция u в формуле (6) продолжена нулем на все пространство. Тогда, повторяя рассуждения лемм 5,6 из [18], используя интегральную теорему Фурье и условие (5), можно показать, что $\forall x \in G$ имеет место

$$\lim_{h \to 0} u_h(x) = u(x),$$

$$\lim_{h \to \infty} u_h(x) = 0.$$

Отсюда, в силу формулы Ньютона-Лейбница и леммы 2, получаем

$$u(x) = \int_0^\infty h^{-\frac{n}{2}} \int \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} \hat{G}_1\left(x, \frac{t-x}{h^{1/2}}\right) dt\,dh. \tag{19}$$

Далее, имеем

$$a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} \hat{G}_1 = \frac{\partial}{\partial t_i}\left[(a_{ij}(x) - a_{ij}(t) + a_{ij}(t)) \frac{\partial G_1}{\partial t_j} \right] =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t_i} a_{ij}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t_j} \hat{G}_1 + [a_{ij}(x) - a_{ij}(t)] \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} \hat{G}_1 + L(t, D_t) \hat{G}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19) с учетом обозначений (17) и применяя затем формулу Грина, в силу финитности ядра $\hat{G}_1(x,\tau)$ и условия (2), получаем утверждение леммы.

Исследуем теперь поведение на бесконечности слагаемых $\mathcal{J}_1(x)$, $\mathcal{J}_2(x)$, $\mathcal{J}_3(x)$ в формуле (18).

Замечание 1. Везде далее считаем, что m в представлении (7) ядра $\hat{G}_1(x,\tau)$ выбрано достаточно большим, $m > \frac{2(n+2)}{n-1}$. Тогда, как отмечалось уже в лемме 2, функция $\hat{G}_1(x,\tau)$ для любого фиксированного x будет финитной и достаточно гладкой по τ, а в силу (17) функции $\hat{G}_{ij}(x,\tau)$ и $\hat{G}_{1ij}(x,\tau)$ будут также финитными и достаточно гладкими.

Замечание 2. В силу доказанной в леммах 1,2 финитности $\hat{G}_1, \hat{G}_{ij}, \hat{G}_{1ij}$, формула (18) является аналогом теоремы о среднем для гармонических функций.

Лемма 4. *Пусть коэффициенты $a_{ij}(t)$ удовлетворяют условию* (4), *а для функции u выполнено условие* (5). *Тогда имеет место неравенство*

$$|\mathcal{J}_1(x)| + |\mathcal{J}_2(x)| \leq \frac{c(\varepsilon)|x|^{\varepsilon}}{(1+|x|)^{\kappa_1-1}}, \tag{21}$$

где ε сколь угодно мало, $\kappa_1 = \min\{\kappa, n\}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала слагаемое $\mathcal{J}_1(x)$. Обозначим через $B_{h^{1/2}}(x)$ носитель ядра $\hat{G}_{ij}(x, \frac{t-x}{h^{1/2}})$. По замечанию 1, имеем:

$$B_{h^{1/2}}(x) \subset \{t : |t-x| \leq c_1 h^{1/2}\}, \quad |\hat{G}_{ij}(x,\tau)| \leq C_2,$$

где C_1 и C_2 - некоторые числа, не зависящие от x в силу равномерной эллиптичности оператора и построения ядра $\hat{G}(x,\tau)$. Учитывая это, получаем

$$|\mathcal{J}_1(x)| \leq C \int_0^{\frac{|x|^2}{2c_1}} h^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \int_{B_{h^{1/2}}(x)} \frac{|u(t)|}{(1+|t|)^{\kappa}} dt\, dh +$$

$$+ \int_{\frac{|x|^2}{2c_1}}^{\infty} h^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \int_{B_{h^{1/2}}(x)} \frac{|u(t)|}{(1+|t|)^{\kappa}} dt\, dh \leq$$

(учитывая, что в первом слагаемом $\frac{1}{(1+|t|)^{\kappa}} \leq \frac{C}{(1+|x|)^{\kappa}}$, а во втором, применяя неравенство Гёльдера с показателем $p = \frac{n+\varepsilon}{\kappa_1}$, получаем)

$$\leq \frac{C}{(1+|x|)^{\kappa}} \int_0^{\frac{|x|^2}{2c_1}} h^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \operatorname{mes} B_{h^{1/2}}(x) dh + \int_{\frac{|x|^2}{2c_1}}^{\infty} h^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \left\| \frac{1}{(1+|t|)^{\kappa_1}}, L_p \right\| (\operatorname{mes} B_{h^{1/2}}(x))^{\frac{1}{p'}} dh \leq$$

$$\leq \frac{c|x|}{(1+|x|)^{\kappa}} + \int_{\frac{|x|^2}{2c_1}}^{\infty} h^{-\frac{n\cdot\kappa_1}{2(n+\varepsilon)}-\frac{1}{2}} dh \leq \frac{c(\varepsilon)|x|^{\varepsilon}}{(1+|x|)^{\kappa_1-1}}.$$

Оценим теперь $\mathcal{J}_2(x)$. По теореме о среднем, имеем

$$a_{ij}(t) - a_{ij}(x) = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_{\kappa}} a_{ij}(x + \theta(t-x))(t_{\kappa} - x_{\kappa}).$$

Поступая аналогично, как с $\mathcal{J}_{\kappa}(x)$, с учетом свойств $\hat{C}_{1ij}$ получаем

$$|\mathcal{J}_2(x)|\leqslant c\int\limits_0^{\frac{|x|^2}{2c_1}} h^{-\frac{n}{2}-1}\int\limits_{B_{h^{1/2}}(x)}\frac{h^{1/2}dt}{(1+|x+\theta(t-x)|)^{\kappa}}\,dh\,+$$

$$+\int\limits_{\frac{|x|^2}{2c_1}}^{\infty} h^{-\frac{n}{2}-1}\int\limits_{B_{h^{1/2}}(x)}|a_{ij}(t)-a_{ij}(x)|\,dt\,dh\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_0^{\frac{|x|^2}{2c_1}}\frac{h^{-\frac{n}{2}-1}h^{1/2}\operatorname{mes}B_{h^{1/2}}(x)}{(1+|x|)^{\kappa}}+\int\limits_{\frac{|x|^2}{2c_1}}^{\infty} h^{-\frac{n}{2}-1}\int\limits_{-c_2h^{1/2}}^{c_2h^{1/2}}\cdots\int\limits_{-c_2h^{1/2}}^{c_2h^{1/2}}|a_{ij}(t)-a_{ij}(x)|\,dt\,dh\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c|x|}{(1+|x|)^{\kappa}}+\sum_{\kappa=1}^{n}\int\limits_{\frac{|x|^2}{2c_1}}^{\infty} h^{-\frac{n}{2}-1}\int\limits_{-h^{1/2}}^{h^{1/2}}\cdots\int\limits_{-h^{1/2}}^{h^{1/2}}|\Delta(e_\kappa,\tau_\kappa)a_{ij}(x)|\,d\tau\,dh.$$

Рассмотрим какой-нибудь член в сумме, например первый. Имеем

$$\int\limits_{\frac{|x|^2}{2c_1}}^{\infty} h^{-\frac{n}{2}-1}\int\limits_{-h^{1/2}}^{h^{1/2}}\cdots\int\limits_{-h^{1/2}}^{h^{1/2}}|\Delta(e_1,\tau_1)a_{ij}(x)|\,d\tau\,dh\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\frac{|x|^2}{2c_1}}^{\infty} h^{-\frac{n}{2}-1}\int\limits_{-h^{1/2}}^{h^{1/2}}\cdots\int\limits_{-h^{1/2}}^{h^{1/2}}\left|\int\limits_0^{\tau_1}\frac{\partial}{\partial z}a(x_1+z,\tau_2\ldots\tau_n)\,dz\right|d\tau\,dh\leqslant$$

(интегрируя по τ_1 и учитывая условие (4), получаем)

$$\leqslant\int\limits_{\frac{|x|^2}{2c_1}}^{\infty} h^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\int\limits_{|t-x|\leqslant 2ch^{1/2}}\frac{dt}{(1+|t|)^{\kappa}}\,dh.$$

Поступая далее, как с $\mathcal{J}_1(x)$, придем к утверждению леммы.

Лемма 5. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$|f(x)|\leqslant\frac{c}{(1+|x|)^{\ell}},\quad \ell>2.$$

Тогда для слагаемого $\mathcal{J}_3(x)$ из (18) имеет место оценка

$$|\mathcal{J}_3(x)|\leqslant\frac{c(\varepsilon)|x|^{\varepsilon}}{(1+|x|)^{\ell_1-2}},\tag{22}$$

где ε сколь угодно мало, $\ell_1=\min\{\ell,n\}$.

Доказательство. Как было отмечено в лемме 1, ядро $\widehat{G}(x,\tau)$ является гладкой финитной функцией, т.е. с некоторыми, не зависящими от x постоянными

K_1, K_2. Имеем

$$Q_{h^{1/2}}(x) = \operatorname{supp} G\left(x, \frac{t-x}{h^{1/2}}\right) \subset \{t : |x-t| \le K_1 h^{1/2}\}, \quad |\hat{G}(x,\tau)| \le K_2 .$$

Поступая далее, как в лемме 4, получаем

$$|\mathcal{J}_3(x)| \le c\left(\int_0^{\frac{|x|^2}{2K_1}} h^{-\frac{n}{2}} \int_{Q_{h^{1/2}}(x)} \frac{dt}{(1+|t|)^{\ell}} dh + \int_{\frac{|x|^2}{2K_1}}^{\infty} h^{-\frac{n}{2}} \int_{Q_{h^{1/2}}(x)} \frac{dt}{(1+|t|)^{\ell}} dh\right) \le$$

$$\le c \int_0^{\frac{|x|^2}{2K_1}} \frac{h^{-\frac{n}{2}} \operatorname{mes} Q_{h^{1/2}}(x) dh}{(1+|x|)^{\ell}} + c\int_{\frac{|x|^2}{2K_1}}^{\infty} h^{-\frac{n\ell_1}{(n+\varepsilon)^2}} dh \le \frac{c(\varepsilon)|x|^{\varepsilon}}{(1+|x|)^{\ell_1-2}} .$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим первоначально случай, когда $f(x) \le 0$. Как показано в работе [19] (см. теорему 1), при выполнении условия $D-\Omega$ строгой параболоидности имеет место аналог теоремы Жиро о знаке косой производной. Но тогда, в силу условия 1), в каждой точке границы имеем $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} > 0$. Из соотношения (18), учитывая лемму 2, получаем

$$u(x) \le \mathcal{J}_1(x) + \mathcal{J}_2(x) + \mathcal{J}_3(x),$$

откуда, применяя теорему Хопфа 1 и леммы 4, 5, получаем оценку

$$u(x) \le \frac{c(\varepsilon)|x|^{\varepsilon}}{(1+|x|)^{K_1-1}} + \frac{c(\varepsilon)|x|^{\varepsilon}}{(1+|x|)^{\ell_1-2}}. \tag{23}$$

В общем случае рассмотрим две задачи:

$$\begin{cases} L(x,D)u_1 = f_- , \\ u_1|_{\Gamma} = 0 , \end{cases} \qquad \begin{cases} L(x,D)u_2 = f_+ . \\ u_2|_{\Gamma} = 0 , \end{cases} \tag{24}$$

где $f_+ \le 0$, $f_- \le 0$, $f = f_- - f_+$.

Потребуем, чтобы решения задач (24) существовали и удовлетворяли условию (5). Тогда для каждой из функций u_1, u_2 выполняется (23). Но тогда из неравенства $|u| = |u_1 - u_2| \le |u_1| + |u_2|$ следует доказательство утверждения теоремы.

Доказательство теоремы 1'. В работе [17] проведены оценки интегралов типа $\mathcal{J}_3(x)$ из формулы (18). Продолжая далее рассуждения теоремы 1, получаем утверждение теоремы 1'.

Авторы выражают свою признательность проф. С.В. Успенскому за постанов-

ку задачи и помощь в работе.

Литература

1. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа.-М.: ИЛ, 1957.-256 с.
2. Krzyzanski M. Partial differential equations of second order. V. I. - Warszawa, 1971. - 562 p.
3. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типа.-М.: Наука, 1971.-288 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Решение первой краевой задачи для самосопряженных эллиптических уравнений в случае неограниченной области.- Изв.АН СССР.Серия мат., 1967, т.31, №5, с.1179-1199.
5. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.- Тр.Моск.мат.о-ва, 1967, т.16, с.209-292.
6. Зеленяк Т.И., Михайлов В.П. Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач математической физики при $t \to \infty$.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды симпозиума, посвященные 60-летию академика С.Л.Соболева), М., Наука, 1970. с. 96-118.
7. Ландис Е.М. О поведении решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях.- Труды Моск.мат. о-ва, 1974, т.31,с.35-58.
8. Oleinik O.A., Yosifian G.A. Boundary value problems for second order elliptic equations in unbounded domains and Saint-Venant's principle. - Annali Scuola Normale Superiore de Pisa, classe di Scienze, ser. IV, Pisa, 1977, v. 4, № 2, p. 269-290.
9. Oleinik O.A., Yosifian G.A. On singularities at the boundary points and uniqueness theorems for solutions of the first boundary value problems of elasticity.- Comm.Part.Eq., 1977, v.2, № 9, p.937-969.
1968, v. 121, № 3-4, p.193-218. /Перевод в сб."Математика", 1969, т.13, № 6, с.114-137.
10. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделёфа для эллиптических систем дифференциальных уравнений.- Мат.сб., 1974, т.95, №1, с.130-145.
11. Олейник О.А., Максимова Н.О. О поведении решений неоднородных эллиптических систем в неограниченных областях.- Труды семинара им.И.Г.Петровского, 1978, вып.3, с.117-137.
12. Соболева Т.С. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях.-Сиб.мат.журн.,1978, т.18, №5, с.1184-1195.
13. Копачек И., Олейник О.А. Об асимптотических свойствах решений систе-

мы уравнений теории упругости.- Успехи мат.наук, 1978, т.33, вып. 5, с.189-190.

14. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда - Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.- Math.Nachr. , 1978, № 81, p.25-82.

15. Олейник О.Л., Иосифьян Г.А. О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей.- Мат.сб., 1980, т.112, №4, с.588-610.

16. Филатов П.С. О дифференциальных свойствах решений уравнений квазиэллиптического типа на бесконечности.- Сиб.мат.журн., 1975, т.16, №2, с.368-383.

17. Чистяков Б.Н. О выходе на полином при стремлении $|x|\longrightarrow\infty$ решений уравнений квазиэллиптического типа.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л.Соболева), 1977, №1, с.159-179.

18. Успенский С.В. О дифференциальных свойствах решений одного класса псевдодифференциальных уравнений на бесконечности.1.-Сиб.мат.журн.,1972, т.13, №3, с.665-678.

19. Камынин Л.И., Химченко Б.Н. О принципе максимума для эллиптико-параболического уравнения второго порядка.- Сиб.мат.журн.,1972, т.13, №4, с.773-789.

20. Шварц Л. Математические методы для физических наук.-М.: Мир, 1965.- 412 с.

21. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.- М.: Наука, 1969.- 480 с.

22. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Вып.1.-М.: Гос.изд.физ.мат.лит., 1958.- 440 с.