УДК 517.946

АСИМПТОТИКА ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С НУЛЕВОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

А.В.Глушко (Воронеж)

Изучается поведение при $t \to \infty$ решения линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}, \vec{w}] - \nu \Delta \vec{v} + \operatorname{grad} p - \nu\beta \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\alpha^2 \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad (0.1)$$

при $\beta = \frac{1}{3}$, описывающей движение вязкой сжимаемой жидкости в области $\{x \in R_3,\ t \geq 0\}$ с учетом кориолисовых сил с начальными условиями

$$\vec{v}(x,0) = \vec{v}^{\,0}(x), \quad p(x,0) = p^0(x). \qquad (0.2)$$

Вектор-функция $\vec{v}(x,t)$ имеет вид $\vec{v}(x,t) = \{v_1(x,t),\ v_2(x,t),\ v_3(x,t)\}$, $\vec{w}$ - заданный постоянный вектор угловой скорости, который, не ограничивая общности, можно считать равным $\vec{w} = (0,0,w)$, $w > 0$; $[\cdot,\cdot]$ - векторное произведение в R_3. Коэффициенты вязкости $\nu > 0$, сжимаемости $\alpha^2 > 0$ и число $\beta > 0$ постоянные. В.Н.Масленникова [1] построила асимптотику по $t \to \infty$ решения задачи Коши для системы (0.1) без учета сжимаемости (т.е. при $\alpha^2 = 0$). В случае $\beta = 0$ асимптотика решения задачи (0.1) - (0.2) была изучена в [2].

В настоящей работе будет показано, что асимптотические свойства системы (0.1) при $\beta = 0$ и $\beta \neq 0$ в главном совпадают из-за отсутствия существенных различий между асимптотическими представлениями решений системы (0.1)-(0.2) при $\beta = 0$ (см. [2]) и при $\beta > 0$, полученными в настоящей работе.

Будем предполагать, что для функций $\vec{v}^{\,0}(x)$, $p^0(x)$ в (0.2) выпол-

няется

Условие 1. Функции $\vec{v}^\circ(x) = \{v_1^\circ(x),\ v_2^\circ(x),\ v_3^\circ(x),\ \rho^\circ(x)\}$ имеют обобщенные (по С.Л.Соболеву) производные до четвертого порядка в R_3, и существуют интегралы:

$$\int\limits_{R_3} (|(1+\Delta_x^2)\vec{v}^\circ(x)| + (1+|x|)|\vec{v}^\circ(x)|)dx < \infty,$$

$$\int\limits_{R_3} (|(1+\Delta_x^2)\rho^\circ(x)| + (1+|x|)|\rho^\circ(x)|)dx < \infty.$$

В настоящей работе основной является

Теорема 1. *При выполнении условия 1 для решения задачи* (0.1)- (0.2) *справедливо асимптотическое представление при* $t \to \infty$

$$\begin{bmatrix} \vec{v}(x,t) \\ \rho(x,t) \end{bmatrix} = \Big\{ t^{-\frac{3}{2}}(F(A,B)\cos\omega t + F(B,-A)\sin\omega t) + $$

$$+ t^{-\frac{7}{4}}F_3 + t^{-\frac{5}{4}}F_4 \Big\} \int\limits_{R_3} \begin{bmatrix} \vec{v}^\circ(y) \\ \rho^\circ(y) \end{bmatrix} dy + \int\limits_{R_3} F'(x-y,t) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \vec{v}^\circ(y) \\ \rho^\circ(y) \end{bmatrix} dy + e^{-\frac{t}{2\alpha^2\nu(1+\beta)}} \int\limits_{R_3} F''\Big(x-y,t,\frac{\partial}{\partial y}\Big) \begin{bmatrix} \vec{v}^\circ(y) \\ \rho^\circ(y) \end{bmatrix} dy, \qquad (0.3)$$

где

$$F(A,B) = \begin{pmatrix} A & -B & 0 & 0 \\ -B & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad F_3 = a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad F_4 = a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (0.4)$$

$$a_3 = -\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\,\omega^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{3}{2}}}{16\sqrt{2}\,\nu^{3/4}};\quad a_4 = -\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\,\omega^{\frac{3}{4}}\alpha^{\frac{1}{2}}}{8\sqrt{2}\,\nu^{1/4}}; \qquad (0.5)$$

$$A = \int\limits_0^{\pi} (a^3(\theta) - 3a(\theta)b^2(\theta))\sin\theta d\theta;\ B = \int\limits_0^{\pi} (b^3(\theta) - 3b(\theta)a^2(\theta))\sin\theta d\theta; \qquad (0.6)$$

$$a(\theta)=\left(\frac{P(\theta)+\sqrt{p^2(\theta)+q^4(\theta)}}{2(p^2(\theta)+q^4(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}};\quad b(\theta)=\frac{q^2(\theta)}{(2(p(\theta)+\sqrt{p^2(\theta)+q^4(\theta)})(p^2(\theta)+q^4(\theta)))^{\frac{1}{2}}};$$

$$q^2(\theta)=\frac{\sin^2\theta}{2\alpha^2\omega}\quad;\qquad p(\theta)=\nu\left(1+\frac{\sin^2(\theta)}{2}\beta\right);$$

числа A и B отличны от нуля при всех рассматриваемых значениях $\alpha, \beta, \omega, \nu$; элементы матрицы $F'(x,t)=\left\{f'_{\kappa,m}(x,t)\right\}_{1\le\kappa,m\le 4}$ — непрерывные в $R_3\times[0,\infty)$ функции (x,t), причем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f'_{\kappa,m}(x,t)t^{\frac{3}{4}}}{1+|x|}=0,\ 1\le\kappa,m\le 2;\quad \lim_{t\to\infty}\frac{f'_{3,3}(x,t)t^{\frac{7}{4}}}{1+|x|}=\lim_{t\to\infty}\frac{f'_{4,4}(x,t)t^{\frac{5}{4}}}{1+|x|}=0;$$

$$|f'_{\kappa,m}(x,t)|\le(1+|x|)t^{-\frac{7}{4}}c_{\kappa,m};\quad(\kappa,m)=(1,4),(2,4),(4,1),(4,2);$$

$$|f'_{\kappa,m}(x,t)|\le(1+|x|)t^{-2}c_{\kappa,m};\ (\kappa,m)=(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,3),$$

равномерно по всем $x\in R_3$. Элементы матрицы $F''(x,t,\frac{\partial}{\partial y})=$

$=\left\{g''_{\kappa,m}(x,t,\frac{\partial}{\partial y})\right\}_{1\le\kappa,m\le 4}$ есть дифференциальные операторы вида

$$g''_{\kappa,m}(x,t,\tfrac{\partial}{\partial y})=g^{0}_{\kappa,m}(x,t)(-\Delta_y)\quad\text{при}\quad 1\le\kappa,m\le 3;$$

$$g''_{\kappa,m}(x,t,\tfrac{\partial}{\partial y})=g^{0}_{\kappa,m}(x,t)(-\Delta_y)^2\quad\text{при}\ \kappa=4\ \text{или}\ m=4.$$

Здесь коэффициенты $g^{0}_{k,m}(x,t)$ $(1 \leq k, m \leq 4)$ *— непрерывные равномерно по* $t \in [0,\infty)$ *и* $x \in R_3$ *ограниченные функции.*

Доказательство теоремы 1, как и в [2], основано на асимптотическом представлении при $t \to \infty$ интегралов вида

$$\psi(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{R_3} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta - i\infty}^{\Delta + i\infty} \frac{\check{A}(\gamma,s)}{P(\gamma,s)} e^{i(x,s)} e^{\gamma t} \, d\gamma \, ds, \tag{0.7}$$

многочлен $P(\gamma,s)$ четвертой степени по γ имеет вид:

$$P(\gamma,s) = \alpha^2\gamma(\gamma+\nu|s|^2)^3 + |s|^2(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\gamma+\nu|s|^2)^2 +$$

$$+ \alpha^2\omega^2(\gamma+\nu|s|^2)\gamma + \omega^2 s_3^2(1+\alpha^2\nu\beta\gamma). \tag{0.8}$$

Элементы матрицы $\check{A}(\gamma,s)$ — некоторые достаточно гладкие функции γ и s (см. ниже, п.1).

Доказательство теоремы приводится в п.6.

1. Построение решения задачи (0.1) - (0.2)

После преобразования Фурье-Лапласа система (0.1) с начальными данными (0.2) может быть записана в виде:

$$\begin{bmatrix} \gamma+\nu|s|^2+\nu\beta s_1^2 & -\omega+\nu\beta s_1 s_2 & \nu\beta s_1 s_3 & is_1 \\ \omega+\nu\beta s_1 s_2 & \gamma+\nu|s|^2+\nu\beta s_2^2 & \nu\beta s_2 s_3 & is_2 \\ \nu\beta s_1 s_3 & \nu\beta s_2 s_3 & \gamma+\nu|s|^2+\nu\beta s_3^2 & is_3 \\ is_1 & is_2 & is_3 & \alpha^2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1^0 \\ \hat{v}_2^0 \\ \hat{v}_3^0 \\ \hat{p}^0 \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

где через $\tilde{\varphi}(s,\gamma)$ $(\hat{\varphi}(s))$ обозначается преобразование Фурье-Лапласа (преобразование Фурье) функции $\varphi(x,t)$ $(\varphi(x))$. Как известно, матри-

ца A^{-1} , обратная матрице A , стоящей в левой части (1.1), может быть записана в виде

$$A^{-1}(s,\gamma) = \frac{\check{A}(s,\gamma)}{P(s,\gamma)},$$

где $\det A(s,\gamma) = P(s,\gamma)$, и элементы матрицы $\check{A}(s,\gamma) = \{b_{k,m}(s,\gamma)\}_{1\le k,m\le 4}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
b_{1,1} &= \alpha^2\gamma(\gamma+\nu|s|^2)^2 + (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(s_2^2+s_3^2)(\gamma+\nu|s|^2);\\
b_{1,2} &= \alpha^2\gamma\omega(\gamma+\nu|s|^2) - (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)s_1s_2(\gamma+\nu|s|^2) + (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\omega s_3^2;\\
b_{1,3} &= -s_1s_3(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\gamma+\nu|s|^2) - \omega(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)s_2s_3;\\
b_{1,4} &= -is_1(\gamma+\nu|s|^2)^2 - is_2\omega(\gamma+\nu|s|^2);\\
\\
b_{2,1} &= -\alpha^2\gamma\omega(\gamma+\nu|s|^2) - s_1s_2(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\gamma+\nu|s|^2) - \omega(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)s_3^2;\\
b_{2,2} &= \alpha^2\gamma(\gamma+\nu|s|^2)^2 + (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(s_1^2+s_3^2)(\gamma+\nu|s|^2);\\
b_{2,3} &= \omega(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)s_1s_3 - s_2s_3(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\gamma+\nu|s|^2);\\
b_{2,4} &= is_1\omega(\gamma+\nu|s|^2) - is_2(\gamma+\nu|s|^2)^2;\\
\\
b_{3,1} &= -s_1s_3(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\gamma+\nu|s|^2) + s_2s_3(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\omega;\\
b_{3,2} &= -\omega(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)s_1s_3 - s_2s_3(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\gamma+\nu|s|^2);\\
b_{3,3} &= \alpha^2\gamma(\gamma+\nu|s|^2)^2 + \alpha^2\gamma\omega^2 + (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(s_1^2+s_2^2)(\gamma+\nu|s|^2);\\
b_{3,4} &= -is_3(\gamma+\nu|s|^2)(1+\alpha^2\nu\beta\gamma) - \omega^2 is_3(1+\alpha^2\nu\beta\gamma);\\
\\
b_{4,1} &= -is_1(\gamma+\nu|s|^2)^2 + i\omega s_2(\gamma+\nu|s|^2);\\
b_{4,2} &= i\omega s_1(\gamma+\nu|s|^2) - is_2(\gamma+\nu|s|^2)^2;\\
b_{4,3} &= -is_3(\gamma+\nu|s|^2)^2 - i\omega^2 s_3;\\
b_{4,4} &= (\gamma+\nu|s|^2)^3 + \omega^2(\gamma+\nu|s|^2).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

После перехода к сферической системе координат

$$s_1 = \lambda \sin\Theta \cos\varphi; \quad s_2 = \lambda \sin\Theta \sin\varphi; \quad s_3 = \lambda \cos\Theta, \tag{1.3}$$

где $0 < \lambda < \infty$, $0 \leq \Theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, элементы матрицы можно также записать в виде:

$$b_{1,1} = \alpha^2\gamma(\gamma + \nu\lambda^2)^2 + (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\sin^2\Theta\sin^2\varphi + \cos^2\Theta)\lambda^2(\gamma + \nu\lambda^2);$$

$$b_{1,2} = \alpha^2\gamma\omega(\gamma+\nu\lambda^2) - (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\lambda^2\sin^2\Theta\sin\varphi\cos\varphi(\gamma+\nu\lambda^2) + (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\omega\lambda^2\cos^2\Theta;$$

$$b_{1,3} = -\lambda^2\sin\Theta\cos\Theta\cos\varphi(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\gamma + \nu\lambda^2) - \omega(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\sin\Theta\cos\Theta\sin\varphi\,\lambda^2;$$

$$b_{1,4} = -i\sin\Theta\cos\varphi\,\lambda(\gamma + \nu\lambda^2)^2 - i\lambda\sin\Theta\sin\varphi\,\omega(\gamma + \nu\lambda^2);$$

$$b_{2,1} = -\alpha^2\gamma\omega(\gamma+\nu\lambda^2) - \sin^2\Theta\sin\varphi\cos\varphi\,\lambda^2(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\gamma+\nu\lambda^2) - \omega(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\lambda^2\cos^2\Theta;$$

$$b_{2,2} = \alpha^2\gamma(\gamma + \nu\lambda^2)^2 + (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\sin^2\Theta\cos^2\varphi + \cos^2\Theta)\lambda^2(\gamma+\nu\lambda^2);$$

$$b_{2,3} = \omega(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\lambda^2\sin\Theta\cos\Theta\cos\varphi - \lambda^2\sin\Theta\cos\Theta\sin\varphi(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\gamma+\nu\lambda^2);$$

$$b_{2,4} = i\lambda\sin\Theta\cos\varphi\,\omega(\gamma+\nu\lambda^2) - i\lambda\sin\Theta\sin\varphi(\gamma+\nu\lambda^2)^2; \tag{1.4}$$

$$b_{3,1} = -\lambda^2\sin\Theta\cos\Theta\cos\varphi(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\gamma+\nu\lambda^2) + \lambda^2\sin\Theta\cos\Theta\sin\varphi(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\omega;$$

$$b_{3,2} = -\omega(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\lambda^2\sin\Theta\cos\Theta\cos\varphi - \lambda^2\sin\Theta\cos\Theta\sin\varphi(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\gamma+\nu\lambda^2);$$

$$b_{3,3} = \alpha^2\gamma(\gamma+\nu\lambda^2)^2 + \alpha^2\omega^2\gamma + \lambda^2(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\sin^2\Theta(\gamma+\nu\lambda^2);$$

$$b_{3,4} = -i\lambda\cos\Theta(\gamma+\nu\lambda^2) - i\lambda\omega^2\cos\Theta;$$

$$b_{4,1} = -i\lambda\sin\Theta\cos\varphi(\gamma+\nu\lambda^2) + \omega i\lambda\sin\Theta\sin\varphi(\gamma+\nu\lambda^2);$$

$$b_{4,2} = i\lambda\omega\sin\Theta\cos\varphi(\gamma+\nu\lambda^2) - i\lambda\sin\Theta\sin\varphi(\gamma+\nu\lambda^2)^2;$$

$$b_{4,3} = -i\lambda\cos\Theta(\gamma+\nu\lambda^2)^2 - i\omega^2\lambda\cos\Theta;$$

$$b_{4,4} = (\gamma+\nu\lambda^2)^3 + \omega^2(\gamma+\nu\lambda^2).$$

В образах Фурье-Лапласа решение задачи (0.1) - (0.2) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\vec{v}}(s,\gamma) \\ \tilde{p}(s,\gamma) \end{bmatrix} = A^{-1}(s,\gamma) \begin{bmatrix} \hat{\vec{v}}^{\circ}(s) \\ \hat{p}^{\circ}(s) \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Формула (1.5) позволяет (пока формально) записать решение задачи (0.1) - (0.2) в виде

$$\begin{bmatrix} \vec{v}(x,t) \\ p(x,t) \end{bmatrix} = \int_{R_3} \Psi(x-y,t) \begin{bmatrix} \vec{v}^{\circ}(y) \\ p^{\circ}(y) \end{bmatrix} dy, \tag{1.6}$$

где функция $\Psi(x,t)$ имеет вид (0.7). Для обоснования формулы (1.6) и нахождения асимптотик интегралов (0.7) необходимо исследовать свойства корней многочлена $P(\gamma,s)$.

2. Свойства корней многочлена $P(\gamma,s)$

После замены переменных (1.3) уравнение $P(\gamma,s)=0$ (см. (0.8)) записывается в виде

$$P(\gamma,\lambda,\Theta) = \alpha^2\gamma(\gamma+\nu\lambda^2)^3 + \lambda^2(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\gamma+\nu\lambda^2)^2 +$$

$$+ \alpha^2\omega^2\gamma(\gamma+\nu\lambda^2) + \omega^2\lambda^2\cos^2\Theta(1+\alpha^2\nu\beta\gamma) = 0. \tag{2.1}$$

Найдем асимптотическое представление корней уравнения (2.1) при $0 \le \lambda < \delta$, где δ - достаточно малое положительное число. Производя те же выкладки, что и в [2], легко получаем, что при $0 \le \lambda < \delta$ два корня уравнения (2.1), не обращающиеся в нуль при $\lambda = 0$, асимптотически представляются в виде

$$\gamma_j = (-1)^{j+1} i\left(\omega + \frac{\sin^2\theta}{2\alpha^2\omega}\lambda^2\right) - \left(1+\frac{\sin^2\theta}{2}\beta\right)\nu\lambda^2 + \lambda^4\hat{\varphi}_j(\lambda^2,\cos^2\theta), \tag{2.2}$$

где $j=1,2$; $\hat{\varphi}_j(p,q)$ - гладкие функции (p,q) при $0 \le q < \delta^2$, $0 \le p \le 1$.

Учитывая формулу (2.2) и используя теорему Виета, получим из уравне-

ния (2.1)

$$\gamma_3 + \gamma_4 = -(1+\beta\cos^2\theta)\nu\lambda^2 + \lambda^4\Phi(\lambda^2, \cos^2\theta);$$

$$\gamma_3\gamma_4 = \frac{\frac{\nu^2}{\omega^2}\lambda^6 + \cos^2\theta\lambda^2}{\alpha^2\left(1 + \frac{\sin^2\theta}{\alpha^2\omega^2}\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{\omega^2}\Psi\left(\lambda^2, \cos^2\theta\right)\right)}, \qquad (2.3)$$

где $\Phi(\rho,q)$, $\Psi(\rho,q)$ - гладкие функции аргументов $\rho \in [0,\delta^2]$ и $q \in [0,1]$. Полагая

$$\chi(\rho,q) = \left\{\alpha^2\left(1 + \frac{1-q}{\alpha^2\omega}\rho + \frac{\rho^2}{\omega^2}\Psi(\rho,q)\right)\right\}^{-2},$$

получаем из (2.3)

$$\gamma_3\gamma_4 = \left(\frac{\nu^2}{\omega^2}\lambda^6 + \cos^2\theta\,\lambda^2\right)\chi(\lambda^2, \cos^2\theta);$$

$$\qquad (2.4)$$

$$\gamma_3 + \gamma_4 = \nu\lambda^2(1-\beta\cos^2\theta) + \lambda^4\Phi(\lambda^2, \cos^2\theta).$$

Из (2.4) находим

$$\gamma_{3,4} = \frac{1}{2}\Big\{-(\nu\lambda^2(1-\beta\cos^2\theta) + \lambda^4\Phi(\lambda^2, \cos^2\theta)) \pm$$

$$\pm\left((\nu\lambda^2(1-\beta\cos^2\theta) + \lambda^4\Phi)^2 - 4(\lambda^2\cos^2\theta + \frac{\nu^2}{\omega^2}\lambda^6)\chi\right)^{\frac{1}{2}}\Big\}; \qquad (2.5)$$

$$\gamma_3 - \gamma_4 = \left((\nu\lambda^2(1-\beta\cos^2\theta) + \lambda^4\Phi)^2 - 4(\lambda^2\cos^2\theta + \frac{\nu^2}{\omega^2}\lambda^6)\chi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из формул (2.5) видно, что порядок стремления к нулю при $\lambda \to 0$ правых частей в равенствах (2.5) различен при $\cos^2\theta > 0$ и $\cos^2\theta = 0$. Поэтому мы находим различные асимптотики для корней γ_3 и γ_4 при $|\cos\theta| > \delta_1$ и при $|\cos\theta| < \delta_1$, где δ_1 - сколь угодно положительное число.

В случае $|\cos\theta| > \delta_1$ из (2.5) получаем

$$\gamma_{3,4} = \pm \frac{i}{\alpha}(\cos\Theta)\lambda - \frac{\nu}{2}\lambda^2(1-\beta\cos^2\Theta) + O(\lambda^3);$$

$$\gamma_3 - \gamma_4 = \frac{2i}{\alpha}(\cos\Theta)\lambda + O(\lambda^3), \qquad (2.6)$$

где через $O(\lambda^3)$ мы обозначаем такие функции от λ и $\cos\Theta$, для которых справедлива оценка $|O(\lambda^3)| \leq c\lambda^3$ при всех $\lambda \in [0,\delta]$, $|\cos\Theta| \geq \delta_1$, причем δ и δ_1 - достаточно малые положительные числа, а постоянная $c>0$ зависит лишь от δ и δ_1.

Если же $0<\lambda<\delta$ и $|\cos\Theta| \leq \delta_1$, то после замены переменных

$$\lambda = \rho\sin\sigma, \quad \cos\Theta = \rho\cos\sigma, \qquad (2.7)$$

где $0<\rho\leq\delta_2=\sqrt{\delta^2+\delta_1^2}$, $0\leq\sigma\leq\pi$, равенства (2.5) можно записать в виде:

$$\gamma_{3,4} = \frac{\rho^2}{2}Q_{3,4}(\rho^2, \cos^2\sigma); \qquad (2.8)$$

$$\gamma_3 - \gamma_4 = \rho^2 Q(\rho^2, \cos^2\sigma),$$

где

$$Q_{3,4}(\eta,\xi) = -\nu(1-\xi)(1-\beta\eta\xi) - \eta(1-\xi)^2\Phi(\eta(1-\xi),\eta\xi) \pm Q(\eta,\xi); \qquad (2.9)$$

$$Q(\eta,\xi) = ((-\nu(1-\xi)(1-\beta\eta\xi) - \eta(1-\xi)^2\Phi(\eta(1-\xi),\eta\xi))^2 -$$

$$-4((\xi(1-\xi) + \frac{\nu^2}{\omega^2}\eta(1-\xi)^3)\chi(\eta(1-\xi),\eta\xi))^{\frac{1}{2}};$$

$$\chi(\eta(1-\xi),\eta\xi) = \left\{\alpha^2+\omega^{-2}\eta(1-\xi)(1-\eta\xi)+\frac{\alpha^2}{\omega^2}\eta^2(1-\xi)^2\Psi(\eta(1-\xi),\eta\xi)\right\}^{-1}.$$

Учитывая, что

$$Q(\eta,0) = (\nu+\eta\Phi(\eta,0))^2 - 4(\frac{\nu^2}{\omega^2}\eta\chi(\eta,0))^{\frac{1}{2}};$$

$$\left.\frac{\partial Q(\eta,\xi)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = \left\{\frac{1}{2Q(\eta,\xi)}\right. \Big[\, 2(\nu(1-\xi)(1-\beta\eta\xi) + \eta(1-\xi)^2 \times$$

$$\times\Phi(\rho(1-\xi),\rho\xi))[-\nu(1-\beta\rho\xi)-\nu\beta\rho(1-\xi)+2\rho(1-\xi)(-1)\Phi(\rho(1-\xi),\rho\xi)+$$

$$+\rho(1-\xi)^2\cdot\frac{\partial\Phi(\rho(1-\xi),\rho\xi)}{\partial\xi}]-4[[(1-\xi)-\xi+\frac{\nu^2}{\omega^2}\rho\cdot 3(1-\xi)^2\times$$

$$\times(-1)]\chi(\rho(1-\xi),\rho\xi)+[\xi(1-\xi)+\frac{\nu^2}{\omega^2}\rho(1-\xi)^3]\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\xi}\chi(\rho(1-\xi),\rho\xi)]]\}\Big|_{\xi=0}=$$

$$=\frac{-\nu^2+2\chi(\rho,0)}{Q(\rho,0)}+O(\rho)=-\left(\nu+\frac{2}{\alpha^2\nu}\right)+O(\rho),$$

получаем по формуле Тейлора представление

$$Q(\rho,\xi)=Q(\rho,0)-\nu\left(1+\frac{2}{\alpha^2\nu^2}\right)\xi+O(\rho\xi)+O(\xi^2). \tag{2.10}$$

В свою очередь, функцию $Q(\rho,0)$ можно представить в виде

$$Q(\rho,0)=\nu+\left[\Phi(\rho,0)-\frac{2\nu}{\omega^2}\chi(\rho,0)+\frac{1}{2\nu}\rho\Phi^2(\rho,0)\right]\rho-$$

$$-\nu^2\rho^2\left[\Phi(\rho,0)-\frac{2\nu}{\omega^2}\chi(\rho,0))+\frac{1}{2\nu}\rho\Phi(\rho,0)\right]^2\times$$

$$\times\int_0^1(1-\tau)(\nu^2+\tau(2\nu\rho\Phi(\rho,0)-4\nu^2\omega^{-2}\rho\chi(\rho,0)+\rho^2\Phi^2(\rho,0)))^{-\frac{3}{2}}. \tag{2.11}$$

Поскольку из (2.9) следует, что $Q_3(\rho,\xi)=-\nu(1-\xi)(1-\beta\rho\xi)-\rho\Phi(\rho,0)+$ $+O(\rho\xi)+Q(\rho,\xi)$, то из (2.9) - (2.11) вытекают представления

$$\begin{aligned}Q(\rho,\xi)&=\nu+\left(\Phi(\rho,0)-\frac{2\nu}{\alpha^2\omega^2}\right)\rho+2\rho^2\mu(\rho)-\nu\left(1+\frac{2}{\nu^2\alpha^2}\right)\xi+O(\rho\xi)+O(\xi^2);\\ Q_3(\rho,\xi)&=-\frac{2}{\nu\alpha^2}-\frac{2\nu}{\alpha^2\omega^2}\rho+2\rho^2\mu(\rho)+O(\rho\xi)+O(\xi^2),\end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$\mu(\eta)=\frac{1}{4\nu}\Phi(\eta,0)-\nu^2\eta^2\Big[\Phi(\eta,0)-\frac{2\nu}{\omega^2}\chi(\eta,0)\Big)+\frac{1}{2\nu}\eta\Phi(\eta,0)\Big]^2\times$$

$$\times\int\limits_0^1\frac{(1-\tau)\,d\tau}{\Big(\nu^2+\tau\big(2\nu\tau\Phi(\eta,0)-4\frac{\nu^2}{\omega^2}\eta\chi(\eta,0)+\eta^2\Phi(\eta,0)\big)\Big)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\chi(\eta,0)-\chi(0,0)}{\eta}\,.$$

С помощью (2.12) из (2.8) находим

$$\gamma_3=-\frac{\nu}{\alpha^2\omega^2}\rho^4-\frac{1}{\alpha^2\nu}\rho^2\cos^2\sigma+\rho^6\mu(\rho^2)+O(\rho^4\cos^2\sigma)+O(\rho^2\cos^4\sigma); \qquad (2.13)$$

$$\gamma_3-\gamma_4=\nu\rho^2-\nu\Big(1-\frac{2}{\alpha^2\nu^2}\Big)\rho^2\cos^2\sigma+O(\rho^4)+O(\rho^4\cos^2\sigma)+O(\rho^2\cos^4\sigma). \qquad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.14) следует, что

$$\gamma_4=-\nu\rho^2+\Big(\nu+\frac{1}{\alpha^2\nu}\Big)\rho^2\cos^2\sigma-\rho^4\Phi(0,0)+O(\rho^4\cos^2\sigma)+O(\rho^6)+O(\rho^2\cos^4\sigma). \qquad (2.15)$$

Формулы (2.13) - (2.15) справедливы при $0<\lambda<\delta$, $|\cos\Theta|<\delta_1$, $|\cos\sigma|<\delta_3$ $(\lambda=\rho\sin\sigma;\ \cos\Theta=\rho\cos\sigma)$, где δ_1, δ и δ_3 - достаточно малые положительные числа.

Повторив выкладки, проведенные в (2.8) - (2.15), можно также представить корни γ_3, γ_4 при $0<\lambda<\delta$, $|\cos\Theta|<\delta_1$, $0\le\sin\sigma\le\delta_4$ в виде:

$$\begin{aligned}\gamma_{3,4}&=\pm\frac{i}{2}\rho^2\sin\sigma-\nu\rho^2\sin^2\sigma+O(\rho^2\sin^3\sigma);\\ \gamma_3-\gamma_4&=\frac{2i}{\alpha}\rho^2\sin\sigma+O(\rho^2\sin^3\sigma).\end{aligned} \qquad (2.16)$$

Если же при $0<\lambda<\delta$ и $|\cos\theta|<\delta_1$ величина $\sin\sigma$ изменяется в пределах $\delta_4\le\sin\sigma\le\sqrt{1-\delta_3^2}$: (δ_3, δ_4 - достаточно малые положительные числа) , то из (2.8), (2.9) также следует, что

$$Q(\rho^2,\cos^2\sigma)=\sin\sigma\sqrt{\Big(\frac{4}{\alpha^2}+\nu^2\Big)\sin^2\sigma-\frac{4}{\alpha^2}+O(\rho^2)}\ ;$$

$$\gamma_3-\gamma_4=\rho^2\sin\sigma\sqrt{\left(\frac{4}{\alpha^2}+\nu^2\right)\sin^2\sigma-\frac{4}{\alpha^2}+O(\rho^2)}\ ; \tag{2.17}$$

$$\gamma_{3,4}=\pm\frac{\rho^2}{2}\sin^2\sigma\sqrt{\frac{4+\alpha^2\nu^2}{\alpha^2}-\frac{1}{\sin^2\sigma}\left(\frac{4}{\alpha^2}-O(\rho^2)\right)}-\frac{\nu}{2}\rho^2\sin^2\sigma+O(\rho^4).$$

Отсюда при некотором $\nu^*:\ 0<\nu^*<\nu$, можно выписать оценки (при $\delta_4<\sin\sigma<\sqrt{1-\delta_3^2};\ 0<\rho<\sqrt{\delta^2+\delta_4^2}$):

$$Re\gamma_3\leqslant-\frac{\nu}{2}\rho^2\sin^2\sigma+O(\rho^4);\quad Re\gamma_4\leqslant-\frac{\nu}{2}\rho^2\sin^2\sigma+O(\rho^4). \tag{2.18}$$

Подробное доказательство оценок (2.18) приведено в [2].

Обратимся теперь к изучению корней уравнения (2.1) в случае $\lambda\geqslant N$, где N - достаточно большое положительное число. Повторяя аналогичные оценки из [2, с. 15-17], получаем асимптотические разложения

$$\begin{aligned}\gamma_1&=-\frac{1}{\alpha^2(1+\beta)\nu}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\\ \gamma_2&=-\nu(1+\beta)\lambda^2+\frac{1}{\alpha^2(1+\beta)}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\end{aligned} \tag{2.19}$$

причем оценки $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ равномерны по $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

Два других корня уравнения (2.1) при каждом $\cos\theta\neq0$ представимы в виде:

$$\gamma_3=-\nu\lambda^2+i\omega\cos\theta+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right);\quad \gamma_4=-\nu\lambda^2-i\omega\cos\theta+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right); \tag{2.20}$$

а при $\cos\theta=0$ в виде :

$$\gamma_3=-\nu\lambda^2;\quad \gamma_4=-\nu\lambda^2-\frac{\omega^2}{\nu\beta}\cdot\frac{1}{\lambda^2}+O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right). \tag{2.21}$$

Заметим, что нумерация γ-корней уравнения (2.1) при $0<\lambda<\delta$ и $\lambda>N$ не обязательно совпадает. Поведение корней уравнения (2.1) при всех $\lambda>0$ характеризует следующая

Лемма 2.1. *Для любого* $\delta_0>0$ *найдется такое* $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\delta_0)>0$,

что при всех $\lambda \geqslant \delta_0$ *для любого корня* $\gamma(\lambda,\theta)$ *уравнения* (2.1) *справедливо*

$$Re\gamma(\lambda,\theta) \leqslant -\varepsilon_0,\ \lambda \geqslant \delta_0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{2.22}$$

Доказательство проведем от противного. Если утверждение леммы неверно, то в силу непрерывной зависимости корней уравнения (2.1) от параметров λ и θ найдутся такие $\lambda_0 \in (0,\infty)$, $\theta_0 \in [0,\pi]$ и такой γ-корень, что $Re\gamma(\lambda_0,\theta_0) = 0$. Из формул (2.2), (2.6), (2.13), (2.15), (2.16), (2.18)-(2.21) следует, что для любого γ-корня уравнения (2.1) имеем $Re\gamma < 0$ при $0<\lambda<\delta$ и $\lambda > N$, и поэтому равенство $Re\gamma(\lambda_0,\theta_0) = 0$ возможно лишь при $\lambda_0 \in [\delta, N]$, где δ - достаточно малое, а N - достаточно большое положительные числа. Пусть $\gamma(\lambda_0,\theta_0) = i\tau_0$. Тогда после подстановки $\gamma = i\tau_0$ в уравнение (2.1), приравняв вещественную и мнимую части $P(i\tau_0,\lambda_0,\theta_0)$ нулю, получим

$$\begin{gathered}\alpha^2\tau_0^4 - ((3+2\beta)\alpha^2\nu^2\lambda^4 + \lambda^2 + \alpha^2\omega^2)\tau_0^2 + \nu^2\lambda^6 + \omega^2\lambda^2\cos^2\theta = 0;\\ \tau_0(-(3+\beta)\alpha^2\nu\tau_0^2 + (1+\beta)\alpha^2\nu^3\lambda^4 + 2\lambda^2\nu + \omega^2\nu\alpha^2(1+\beta\cos^2\theta)) = 0.\end{gathered} \tag{2.23}$$

Учитывая, что $\tau_0 \neq 0$, исключим τ_0 из системы (2.23). После простых преобразований найдем соотношение

$$\begin{gathered}2\alpha^6\nu^4(1+\beta)(\beta+2)^2\lambda^8 + 4(1+\beta)(2+\beta)\lambda^6 + [1+\beta\cos^2\theta(2+\\ +2\beta+(3+2\beta)(3+\beta)]\alpha^6\omega^2\nu^4\lambda^4 + \vartheta(\lambda,\theta) = 0,\end{gathered} \tag{2.24}$$

где

$$\begin{gathered}\vartheta(\lambda,\theta) = \{2(1+\beta)\alpha^2\lambda^4 + \lambda^2\omega^2\alpha^4(5 - 7\beta\cos^2\theta -\\ - 9\cos^2\theta + 3\beta) + (1+\beta\cos^2\theta)(2+\beta-\beta\cos^2\theta)\alpha^6\omega^4\} \geqslant\\ \geqslant 2\alpha^2(\lambda^4 + \lambda^2\omega^2\alpha^2(5-9\cos^2\theta) + 2\alpha^4\omega^4) \geqslant\\ \geqslant 2\alpha^2(\lambda^2-\alpha^2\omega^2)^2 \geqslant 0.\end{gathered} \tag{2.25}$$

Поставив в соответствие равенству (2.24) неравенство (2.25), получим доказывающее утверждение леммы противоречие.

3. Асимптотические оценки некоторых интегралов

В этом разделе будут приведены формулировки лемм, установленных в п.3 работы [2], или их простых модификаций (лемма 3.2). Эти леммы будут использованы ниже при выводе асимптотических оценок интегралов.

Вначале приведем модификацию одного хорошо известного утверждения.

Лемма Ватсона [3]. *Пусть функция* $f(x,\rho)$ *принадлежит* $C^1([0,\delta])\times\times C(R_3)$; $f(0,\rho)$ *отлично от нуля при* $\rho\in R_3$; *для функции* $f(x,\rho)$ *и ее производной* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\rho)$ *справедливы оценки*

$$|f(x,\rho)|\leqslant c\,;\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\rho)\right|\leqslant c(1+|\rho|)\quad (x\in[0,\delta],\ \rho\in R_3) \tag{3.1}$$

с постоянной $c>0$, *не зависящей от* x *и* ρ. *Тогда при* $\alpha>0$, $\beta>0$ *и* $t\to\infty$

$$\int_0^\delta f(x,\rho)x^{\beta-1}e^{-tx^\alpha}dx=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\Big[f(0,\rho)+o(1)(1+|\rho|)\Big]t^{-\frac{\beta}{\alpha}}, \tag{3.2}$$

где $o(1)\to 0$ *при* $t\to 0$ *равномерно по* $\rho\in R_3$.

Лемма 3.1. *Пусть* $f(x,\rho,\theta)$ *принадлежит* $C^1([0,\delta])\times C(R_3)\times\times C^1([\theta_0,\theta_1])$; $f(0,\rho,\theta)$ *отлично от нуля и не зависит от* $\rho\in R_3$; *для функции* $f(x,\rho,\theta)$ *и ее производной* $\frac{\partial f(x,\rho,\theta)}{\partial x}$ *справедливы оценки* (3.1), *равномерные по* $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$; $\mu(x)\in C([0,\delta])\times C([\theta_0,\theta_1])$; $\mu(x,\theta)\leqslant\frac{1}{2\delta}$, *постоянная* $\kappa\geqslant 0$. *Тогда при* $t\to\infty$ *справедливо*

$$\int_0^\delta f(x,\rho,\theta)x^\kappa e^{-tx^2+tx^3\mu(x,\theta)}dx=\big(1+o(1)(1+|\rho|)\big)\int_0^\delta f(x,\rho,\theta)x^\kappa e^{-tx^2}dx, \tag{3.3}$$

где $o(1)\to 0$ *при* $t\to\infty$ *равномерно по* $\rho\in R_3$ *и* $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$.

Лемма 3.2. *Пусть функция* $f(x,\rho,\theta)$ *непрерывна в полуплоскости* $Re\,x\geqslant 0$ *и аналитична при* $0<Re\,x\leqslant\delta$ *для всех* $\rho\in R_3$ *и* $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$, *пусть также при всех* $\rho\in R_3$ *и* $\{x : Re\,x\geqslant 0\}$ *функция* $f(x,\rho,\theta)$ *непрерывна по* θ *при* $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$. *Кроме того,*

предположим, что при $0 < \mathrm{Re}\,x < \delta$ и $p \in R_3$ равномерно по параметру $\theta \in [\theta_3, \theta_1]$ выполнены оценки (3.1). Далее, пусть $S_\pm(x,\theta) = \pm(\omega + q^2(\theta)x^2)i - p(\theta)x^2$, где ω - вещественное число, а $q(\theta)$ и $p(\theta)$ непрерывно зависят от $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, причем $q^2(\theta) \geq 0$, $p(\theta) > 0$ при $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, число $\ell > 0$, функция $\mu(x,\theta)$ принадлежит $C([0,\delta]) \times C([\theta_0, \theta_1])$ и $|\mu(x,\theta)| \leq \frac{1}{2\delta}$ для $x \in [0,\delta]$, $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Определим положительные функции $a(\theta)$ и $b(\theta)$ по формулам:

$$a(\theta) = \left(\frac{p(\theta) + \sqrt{p^2(\theta) + q^4(\theta)}}{2(p^2(\theta) + q^4(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad b(\theta) = \frac{q^2(\theta)}{(2(p(\theta) + \sqrt{p^2(\theta) + q^4(\theta)})(p^2(\theta) + q^4(\theta)))^{\frac{1}{2}}}.$$

Тогда интеграл

$$J_\pm(t,p,\theta) = \int_0^\delta f(x,p,\theta)x^\ell e^{t(S_\pm(x,\theta) + x^3\mu(x,\theta))}dx \tag{3.4}$$

имеет при $t \to \infty$ равномерную по $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ и $p \in R_3$ асимптотику

$$J_\pm(t,p,\theta) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\ell+1}{2}\right)(a \pm ib)^{\ell+1}(f(0,p,\theta) + O(1)(1+|p|))e^{\pm i\omega t}t^{-\frac{\ell+1}{2}}. \tag{3.5}$$

Лемма 3.3. *Пусть $f(\xi,x,p)$ принадлежит $C^1([0,\delta_1] \times [0,\delta_2]) \times C(R_3)$ и выполняются оценки*

$$|f(\xi,x,p)| \leq c, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi,x,p)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,x,p)\right| \leq c(1+|p|) \tag{3.6}$$

при $\xi \in [0,\delta]$, $x \in [0,\delta_2]$, $p \in R_3$ с постоянной $c > 0$, не зависящей от x, ξ и p. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $\delta_1 > 0$ и целые числа κ, ℓ удовлетворяют условию $\kappa > \ell > 0$; δ_2 - достаточно малое число. Тогда интеграл

$$J(t) = \int_0^{\delta_1}\int_0^{\delta_2} f(\xi,x,p)x^\ell\xi^\kappa \exp\{-at\xi^4 - bt\xi^2x^2 + t\xi^6\mu(\xi) +$$

$$+to(\xi^2x^4)+to(x^2\xi^4)\}\,dx\,d\xi \tag{3.7}$$

имеет при $t\to\infty$ *асимптотику*

$$\mathcal{J}(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{\ell+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-\ell}{4}\right)}{8a^{\frac{k-\ell}{4}}\,b^{\frac{\ell+1}{2}}}\left(f(0,0,\rho)+o(1)(1+|\rho|)\right)t^{-\frac{k+\ell+2}{4}}\,, \tag{3.8}$$

причем $o(1)\to 0$ *при* $t\to\infty$ *равномерно по* $\rho\in R_3$.

Лемма 3.4. *Пусть* a *- действительное число;* $b>0$; $\delta_2>0$; δ_4 *- достаточно малое положительное число.*

1. Если $f(\xi,x,\rho)$ *принадлежит* $C([0,\delta_2]\times[0,\delta_4])\times C(R_3)$ *и* $|f(\xi,x,\rho)|\leq C$ *при всех* ξ,x,ρ *из области определения, то при* $t\to\infty$

$$\mathcal{Y}_3(t)=\int_0^{\delta_2}\int_0^{\delta_4} f(\xi,x,\rho)\xi^4x^3\exp[t(ia\xi^2x-bx^2\xi^2+O(x^3\xi^2))]\,dx\,d\xi=O(t^{-2}) \tag{3.9}$$

равномерно по всем $\rho\in R_3$.

2. Если $f(\xi,x,\rho)$ *принадлежит* $C^1([0,\delta_1]\times[-\delta_4,\delta_4])\times C(R_3)$ *и* $|f(\xi,x,\rho)|\leq C$ *при всех* ξ,x,ρ *из области определения, то при* $t\to\infty$

$$\mathcal{Y}_2(t)=\int_0^{\delta_2}\int_{-\delta_4}^{\delta_4} f(\xi,x,\rho)\xi^3x^2\exp[t(ia\xi^2x-bx^2\xi^2+O(x^3\xi^2))]\,dx\,d\xi=O(t^{-2+\varepsilon}) \tag{3.10}$$

равномерно по $\rho\in R_3$. *Здесь* ε *- любое положительное число.*

4. Асимптотика ядра обратного оператора. Случай $0<|S|<\delta$

Ядро (0.7) интегрального оператора (1.6) можно записать (пока формально) в виде : $\Psi(x,t)=\mathcal{P}(x,t)+Q(x,t)+\mathcal{R}(x,t)$,

где

$$\mathcal{P}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{R_3}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\check{A}(\gamma,s)\eta_0(|s|)}{P(\gamma,s)}e^{i(x,s)}e^{\gamma t}\,d\gamma\,ds\,; \tag{4.1}$$

$$Q(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R_3}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\check{A}(\gamma,s)\eta(|s|)}{P(\gamma,s)}e^{i(x,s)}e^{\gamma t}d\gamma ds\;; \tag{4.2}$$

$$\mathcal{R}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R_3}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\check{A}(\gamma,s)\eta_\infty(|s|)}{P(\gamma,s)}e^{i(x,s)}e^{\gamma t}d\gamma ds\,, \tag{4.3}$$

где $\eta_0(\tau),\ \eta(\tau),\ \eta_\infty(\tau)\in C^\infty([0,\infty)),\ \eta_0(\tau)+\eta(\tau)+\eta_\infty(\tau)=1$ при $\tau\in[0,\infty)$; $supp\,\eta_0(\tau)\in[0,\delta),\quad \eta_0(\tau)=1$ при $0\leqslant\tau\leqslant\frac{1}{2}\delta$; $supp\,\eta_\infty(\tau)\in[N,\infty),\quad \eta_\infty(\tau)=1$ при $\tau\geqslant 2N$, числа $0<\delta<N:\ \delta$ достаточно мало, N достаточно велико (выбор величин δ и N уже проводился в пп. 2 и 3 и будет уточнен ниже). Для того чтобы в представлениях (4.1) - (4.3) записать в интегральном виде обратное преобразование Лапласа, мы воспользовались вытекающей из результатов п.2 оценкой $Re\,\gamma_j(s)<0$, $s\in R_3$, $s\neq 0$, вещественной части γ-корней уравнения $P(\gamma,s)=0$.

Построим асимптотическое представление $\mathcal{P}(x,t)$ при $t\to\infty$. В интеграле (4.1) перейдем к сферической системе координат (1.3). Обозначим через $\Gamma_j=\Gamma_j(\lambda,\theta)$ контур достаточно малого диаметра, окружающий корень $\gamma_j(\lambda,\theta)\,(j=1,2,3,4)$ уравнения (2.1). Заметим, что из результатов п.2 (см. формулы (2.2), (2.6), (2.14), (2.16), (2.17)) следует существование таких непересекающихся контуров $\Gamma_j\ (j=1,2,3,4)$ при каждом $\lambda\in(0,\delta]$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. С помощью леммы Жордана и теоремы о вычетах можно записать представление $\mathcal{P}(x,t)=\mathcal{P}_1(x,t)+\mathcal{P}_2(x,t)+\mathcal{P}_3(x,t)+\mathcal{P}_4(x,t)$,

где

$$\mathcal{P}_j(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\delta}\check{\mathcal{P}}_j(x,\lambda,\theta,\varphi)e^{t\gamma_j(\lambda,\theta)}\lambda^2\sin\theta\,d\lambda\,d\theta\,d\varphi; \tag{4.4}$$

$$\check{\mathcal{P}}_j(x,\lambda,\theta,\varphi)=\frac{\check{A}(\gamma_j(\lambda,\theta),\lambda,\theta,\varphi)\eta_0(\lambda)\,e^{i\rho(x,\theta,\varphi)\lambda}}{\prod\limits_{i=1,\,i\neq j}^{4}\varkappa^2(\gamma_j(\lambda,\theta)-\gamma_i(\lambda,\theta))}\;; \tag{4.5}$$

$$\rho = \rho(x,\theta,\varphi) = x_1 \sin\theta\cos\varphi + x_2 \sin\theta\sin\varphi + x_3\cos\theta ; \qquad (4.6)$$

элементы матрицы $\check{A}(\gamma,\lambda,\theta,\varphi)$ выписаны в (1.4). С помощью формул (2.2), (2.6), (2.13), (2.15)-(2.17) найдем

$$\check{\mathcal{P}}_j(x,\lambda,\theta,\varphi) = \frac{\check{A}(\delta_j(\lambda,\theta),\lambda,\theta,\varphi)\tau_0(\lambda)\, e^{i\rho(x,\theta,\varphi)\lambda}}{\alpha^2((-1)^{j+1}2i\omega + O(\lambda^2))((-1)^{j+1}i\omega + O(\lambda))((-1)^{j+1}i\omega+O(\lambda))} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{P}_j^0 + \lambda\check{\mathcal{P}}'_j(x,\lambda,\theta,\varphi), \quad j = 1,2, \qquad (4.7)$$

где

$$\mathcal{P}_1^0 = \bar{\mathcal{P}}_2^0 = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

элементы матриц $\check{\mathcal{P}}'_j(x,\lambda,\theta,\varphi)$, $j = 1,2$, - бесконечно дифференцируемые функции $\theta \in [0,\pi^{\delta}]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Поскольку γ_1 и γ_2 представимы в виде (2.2), то для вычисления асимптотик интегралов $\mathcal{P}_1(x,t) + \mathcal{P}_2(x,t)$ можно воспользоваться леммой 3.2, полагая $q^2 = q^2(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{2\alpha^2\omega}$, $\ell = 2$, $p = p(\theta) = \nu(1 + \frac{\sin^2\theta}{2}\beta)$. Тогда из (4.7) и (3.5), воспользовавшись обозначением (0.4) (как и в [2] при вычислении аналогичных интегралов), получим:

$$\mathcal{P}_1(x,t) = \mathcal{P}_2(x,t) = \left\{ t^{-\frac{3}{2}}\cos\omega t\, F(A,B) + t^{-\frac{3}{2}}\sin\omega t\, F(B,-A)\right\}(1+o(1)(1+|x|)) + O(t^{-2}), \qquad (4.8)$$

причем оценка $|O(t^{-2})| \le ct^{-2}$ выполняется равномерно по $x \in R_3$.

Переходя к рассмотрению интегралов $\mathcal{P}_3(x,t)$ и $\mathcal{P}_4(x,t)$, запишем $\mathcal{P}_j(x,t)$ в виде $\mathcal{P}_j(x,t) = \mathcal{P}_j^{(1)} + \mathcal{P}_j^{(2)}$ $(j = 3,4)$, где

$$\mathcal{P}_j^{(1)}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \int_{|\cos\theta| > \delta_1,\, \theta \in [0,\pi]} \int_0^{\delta} \check{\mathcal{P}}_j(x,\lambda,\theta,\varphi) e^{t\delta_j(\lambda,\theta)} \lambda^2 \sin\theta\, d\lambda\, d\theta\, d\varphi;$$

$$\mathcal{P}_j^{(2)}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int_{\substack{|\cos\theta|<\delta_1\\ \theta\in[0,\pi]}}\int_0^{\delta}\check{\mathcal{P}}_j(x,\lambda,\theta,\varphi)e^{t\gamma_j(\lambda,\theta)}\lambda^2\sin\theta\,d\lambda\,d\theta\,d\varphi;$$

$j=3,4$; δ_1 - достаточно малое положительное число.

Рассмотрим далее интегралы $\mathcal{P}_j^{(1)}(x,t)$ $(j=3,4)$. Из вида матрицы $\check{A}$ и из формул (2.6) вытекает, что матрицы $\check{\mathcal{P}}_j$ представимы в виде:

$$\check{\mathcal{P}}_j(x,\lambda,\theta,\varphi)=\frac{\check{A}(\gamma_j(\lambda,\theta),\lambda,\theta,\varphi)\eta_0(\lambda)e^{i\rho(x,\theta,\varphi)\lambda}}{\alpha^2\left((-1)^{j+1}\frac{i\cos\theta}{\alpha}\lambda-i\omega+O(\lambda^2)\right)\left((-1)^{j+1}\frac{i\cos\theta}{\alpha}\lambda+i\omega+O(\lambda^2)\right)\left((-1)^{j+1}\frac{2i\cos\theta}{\alpha}\lambda+O(\lambda^2)\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2\alpha^2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-\alpha^2&(-1)^{j+1}\alpha\\0&0&(-1)^{j+1}\alpha&-1\end{bmatrix}+\lambda\check{\mathcal{P}}_j'(x,\lambda,\theta,\varphi),\ j=3,4, \qquad (4.9)$$

причем элементы матриц $\check{\mathcal{P}}_j'(x,\lambda,\theta,\varphi)$ – бесконечно дифференцируемые по $x\in R_3$ функции, равномерно ограниченные при всех $\lambda\in[0,\delta]$, $|\cos\theta|\geqslant\delta_1>0$, $\varphi\in[0,2\pi]$. Из представления (4.9) так же, как в [2], получаем оценку интеграла $\mathcal{P}_j^{(1)}(x,t)$, $j=3,4$, $\mathcal{P}_j^{(1)}(x,t)=$ $=O(t^{-2})$.

Для того чтобы построить асимптотики интегралов $\mathcal{P}_j^{(2)}$, $j=3,4$, сделаем в этих интегралах замену переменных по формулам (2.7). Получим

$$\mathcal{P}_j^{(2)}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\delta_2}\check{\mathcal{P}}_j(x,\rho,\sigma,\varphi)e^{t\gamma_j(\rho,\sigma)}\rho^3\sin\sigma\,d\rho\,d\sigma\,d\varphi, \qquad (4.10)$$

где $j=3,4$,

$$\check{\mathcal{P}}_j(x,\rho,\sigma,\varphi)=(-1)^{j+1}\frac{\check{A}(\gamma_j,\rho,\sigma,\varphi)\eta_0(\rho\sin\sigma)\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\,\sin\sigma\,e^{i\varkappa\rho}}{\alpha^2(\gamma_j(\rho,\sigma)-\gamma_1(\rho,\sigma))(\gamma_j(\rho,\sigma)-\gamma_2(\rho,\sigma))(\gamma_3(\rho,\sigma)-\gamma_4(\rho,\sigma))}; \qquad (4.10')$$

$\delta_2=\sqrt{\delta^2+\delta_1^2}$; $\varkappa=\varkappa(x,\rho,\sigma,\varphi)=(x_1\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\ \cos\varphi\ +$

$$+ x_2\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\,\sin\varphi + x_3\cos\sigma)\sin\sigma .$$

Элементы матрицы $\check{A}(\gamma,\rho,\sigma,\varphi)$, как видно из (1.4), имеют в координатах, введенных в (2.7), вид

$$b_{1,1} = \alpha^2\gamma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)^2 + (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\sin^2\varphi(1-\rho^2\sin^2\sigma) + \rho^2\cos^2\sigma)\times$$
$$\times\ \rho^2\sin^2\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma);$$
$$b_{1,2} = \alpha^2\gamma\omega(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma) - (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\rho^2(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\sigma(1-$$
$$-\rho^2\cos^2\sigma) + (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\omega\rho^4\sin^2\sigma\cos^2\sigma;$$
$$b_{1,3} = (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(-\rho^3\sin^2\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma\ )\cdot\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\cos\sigma\cos\varphi -$$
$$-\ \omega\rho^3\sin^2\sigma\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\ \cos\sigma\cos\varphi;$$
$$b_{1,4} = -\ i\rho\sin\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)^2\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\cos\varphi - i\omega\rho\sin\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\sin\varphi;$$
$$b_{2,1} = -\alpha^2\gamma\omega(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma) + (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(-\rho^2\sin^2\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)(1-$$
$$-\rho^2\cos^2\sigma)\sin\varphi\cos\varphi\ -\ \omega\rho^4\sin^2\sigma\cos^2\sigma);$$
$$b_{2,2} = \alpha^2\gamma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)^2 + (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\rho^2\sin^2\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma(1-$$
$$-\rho^2\cos^2\sigma)\times\cos^2\varphi + \rho^2\cos^2\sigma);$$
$$b_{2,3} = (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(\omega\rho^3\sin^2\sigma\cos\sigma\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\ \cos\varphi - \rho^3\sin^2\sigma(\gamma+$$
$$+\nu\rho^2\sin^2\sigma)\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\ \cos\sigma\sin\varphi;$$
$$b_{2,4} = i\omega\rho\sin\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma} - i\rho(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)^2\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\ \sin\varphi;$$
$$b_{3,1} = \{-\rho^3\sin^2\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\ \cos\sigma\cos\varphi + \tag{4.11}$$
$$+\ \omega\rho^3\sin^2\sigma\cos\sigma\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\ \sin\varphi\}(1+\alpha^2\nu\beta\gamma);$$
$$b_{3,2} = (1+\alpha^2\nu\beta\gamma)(-\omega\rho^3\sin^2\sigma\cos\sigma\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\cos\varphi - \rho^3\sin^2\sigma\cos\sigma(\gamma +$$

$$+\nu\rho^2\sin^2\sigma)\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\ \sin\varphi;$$

$$b_{3,3}=\alpha^2\gamma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)^2+\alpha^2\omega^2\gamma+(1+\alpha^2\nu\beta\gamma)\rho^2\sin^2\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)\times$$

$$\times(1-\rho^2\cos^2\sigma);$$

$$b_{3,4}=-i\rho^2\sin\sigma\cos\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)^2-i\omega\rho^2\sin\sigma\cos\sigma;$$

$$b_{4,1}=-i\rho\sin\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)^2\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\cos\varphi+\omega i\rho\sin\sigma(\gamma+$$

$$+\nu\rho^2\sin^2\sigma)\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\ \sin\varphi;$$

$$b_{4,2}=i\omega\rho\sin\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\cos\varphi-i\rho\sin\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)^2\times$$

$$\times\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\ \sin\varphi;$$

$$b_{4,3}=-i\rho^2\sin\sigma\cos\sigma(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)^2-i\omega\rho^2\sin\sigma\cos\sigma;$$

$$b_{4,4}=(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma)^3+\omega^2(\gamma+\nu\rho^2\sin^2\sigma).$$

Из (4.11) вытекает, что матрицу $\check{A}(\gamma,\rho,\sigma,\varphi)$ можно представить в виде

$$\check{A}(\gamma,\rho,\sigma,\varphi)=\check{A}^{o}(\gamma,\rho,\sigma,\varphi)+\rho^2\beta\Phi(\gamma,\rho,\sigma,\varphi), \qquad (4.12)$$

где $\Phi(\gamma,\rho,\sigma,\varphi)$ - матрица, непрерывно зависящая от своих аргументов в их области определения; $\check{A}^{o}(\gamma,\rho,\sigma,\varphi)=\check{A}(\gamma,\rho,\sigma,\varphi)\,|_{\beta=0}$, т.е. матрица $\check{A}^{o}$ совпадает с матрицей $\check{A}$, рассмотренной в работе [2] и соответствующей системе (0.1) с $\beta=0$.

Рассмотрим интеграл $\mathcal{P}_3^{(2)}(x,t)$. Учитывая, что

$$e^{i\varkappa\rho}=1+i\tilde{\varkappa}\rho\int_0^1 e^{i\tau\tilde{\varkappa}\rho}d\tau+ix_3\rho\cos\sigma\sin\sigma e^{i\tilde{\varkappa}\rho}\int_0^1 e^{ix_3\rho\cos\sigma\sin\sigma\tau}d\tau, \qquad (4.13)$$

где $\tilde{\varkappa}=\tilde{\varkappa}(x,\rho,\sigma,\varphi)=(x_1\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\cos\varphi+x_2\sqrt{1-\rho^2\cos^2\sigma}\sin\varphi)\sin\sigma$, запишем $\mathcal{P}_3^{(2)}(x,t)$ в виде

$$\mathcal{P}_3^{(2)}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\delta_2}\check{\mathcal{P}}_3^{0}(\rho,\sigma,\varphi)e^{t\gamma_3(\rho,\sigma)}\rho^3\sin\sigma\,d\rho\,d\sigma\,d\varphi\ +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\delta_2}\check{\mathcal{P}}_3^{\prime}(x,\rho,\sigma,\varphi)e^{t\gamma_3(\rho,\sigma)}\rho^4\sin\sigma\,d\rho\,d\sigma\,d\varphi\ +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\delta_2}\check{\mathcal{P}}_3^{\prime\prime}(x,\rho,\sigma,\varphi)e^{t\gamma_3(\rho,\sigma)}\rho^5\cos\sigma\sin\sigma\,d\rho\,d\sigma\,d\varphi =$$

$$= \mathcal{P}_3^{0}(t)+\mathcal{P}_3^{\prime}(x,t)+\mathcal{P}_3^{\prime\prime}(x,t). \qquad (4.14)$$

Определим матрицу $\mathcal{D} = e^{i\varkappa\rho}\check{A}(\gamma,\rho,\sigma,\varphi) =$

$$=\left(1+i\tilde{x}\rho\int_0^1 e^{i\tilde{x}\rho\tau}d\tau+ix_3\rho^2\cos\tau\sin\tau e^{i\tilde{x}\rho}\int_0^1 e^{ix_3\tau\rho^2\cos\sigma\sin\sigma}d\tau\right)\times$$

$$\times\check{A}(\gamma,\rho,\sigma,\varphi).$$

Разобьем матрицу $\mathcal{D}$ на сумму $\mathcal{D}=\mathcal{D}^0+\mathcal{D}'+\mathcal{D}''$ по следующему правилу. В матрицу $\mathcal{D}''$ включим лишь те слагаемые из элементов матрицы $\mathcal{D}$, для которых $\mathcal{D}''\cdot\rho^{-2}$ есть непрерывная по $\rho\in[0,\delta)$ функция; в матрицу $\mathcal{D}'$ включим лишь те слагаемые из элементов матрицы $(\mathcal{D}-\mathcal{D}'')$, для которых $\mathcal{D}'\cdot\rho^{-1}$ есть непрерывная по $\rho\in[0,\delta)$ функция; наконец, $\mathcal{D}^0=\mathcal{D}-\mathcal{D}'-\mathcal{D}''$. Разбиение матрицы $\mathcal{D}$ порождает соответствующее разбиение матрицы $\check{\mathcal{P}}_3$ (см. (4.14)) на матрицы $\check{\mathcal{P}}_3^0$, $\check{\mathcal{P}}_3^{\prime}$ и $\check{\mathcal{P}}_3^{\prime\prime}$ в (4.14). Из (4.12) вытекает, что от β зависят лишь элементы матрицы $\check{\mathcal{P}}_3^{\prime\prime}$. В [2] был исследован интеграл $\mathcal{P}_3^{(2)}(x,t)$ при $\beta=0$. Из вышеизложенного следует, что результаты [2], касающиеся интегралов $\mathcal{P}_3^0(t)$ и $\mathcal{P}_3^{\prime}(x,t)$ сохраняют силу. Элементы интеграла - матрицы $\mathcal{P}_3^{\prime\prime}(x,t)$ - оцениваются при $t\to\infty$ совершенно аналогично оценкам из [2] (также с использованием леммы 3.3). Таким образом, из вышеизложенного и результатов работы [2] находим

$$\mathcal{P}_3(x,t)=\begin{bmatrix} O(t^{-7/4}) & O(t^{-2}) & 0 & 0\\ O(t^{-2}) & O(t^{-7/4}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & P_5(t)+O(t^{-2}) & 0\\ 0 & 0 & & P_3(t)+O(t^{-7/4})\end{bmatrix}+R,$$

где

$$\frac{R}{1+|x|} = \begin{pmatrix} O(t^{-2}) & O(t^{-2}) & O(t^{-2}) & O(t^{-\frac{7}{4}}) \\ O(t^{-2}) & O(t^{-2}) & O(t^{-2}) & O(t^{-\frac{7}{4}}) \\ O(t^{-2}) & O(t^{-2}) & O(t^{-2}) & O(t^{-2}) \\ O(t^{-\frac{7}{4}}) & O(t^{-\frac{7}{4}}) & O(t^{-2}) & O(t^{-2}) \end{pmatrix};$$

$$P_5(t) = -\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{16\sqrt{2}}\omega^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{3}{2}}\nu^{-\frac{3}{4}}(1+o(1))\,t^{-\frac{7}{4}};$$

$$P_3(t) = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{8\sqrt{2}}\omega^{\frac{3}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\nu^{-\frac{1}{4}}(1+o(1))\,t^{-\frac{5}{4}}.$$

Перейдем далее к рассмотрению $\mathcal{P}^{(2)}_4(x,t)$. Как и при оценке $\mathcal{P}^{(2)}_3(x,t)$, представим $\mathcal{P}^{(2)}_4(x,t)$ в виде суммы $\mathcal{P}^{(2)}_4(x,t) = \mathcal{P}_{4,\delta_3}(x,t) + \mathcal{P}_{4,\delta_4}(x,t) + \tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_4(x,t)$, где

$$\mathcal{P}_{4,\delta_3}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int\limits_{0<|\frac{\pi}{2}-\sigma|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon_3}\int_0^{\delta_2}\check{\mathcal{P}}_4(x,\rho,\sigma,\varphi)e^{t\gamma_4}\rho^3\sin\sigma\,d\rho\,d\sigma\,d\varphi;$$

$$\mathcal{P}_{4,\delta_4}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon_4<|\frac{\pi}{2}-\sigma|<\frac{\pi}{2}}\int_0^{\delta_2}\check{\mathcal{P}}_4(x,\rho,\sigma,\varphi)e^{t\gamma_4}\rho^3\sin\sigma\,d\rho\,d\sigma\,d\varphi;$$

$$\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_4(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon_3<|\frac{\pi}{2}-\sigma|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon_4}\int_0^{\delta_2}\check{\mathcal{P}}_4(x,\rho,\sigma,\varphi)e^{t\gamma_4}\rho^3\sin\sigma\,d\rho\,d\sigma\,d\varphi,$$

где $\varepsilon_3 = \arccos\delta_3$, $\varepsilon_4 = \arcsin\delta_4$, δ_2, δ_3, δ_4 - достаточно малые положительные числа; матрица $\check{\mathcal{P}}_4(x,\rho,\sigma,\varphi)$ определена в (4.10).

После замены переменной интегрирования $\cos\sigma = y$ элементы матрицы $\mathcal{P}_{4,\delta_3}$ могут быть записаны в виде

$$p^{(4)}_m(x,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta_3}\int_0^{\delta_2} f^{(4)}_m(x,\rho,y,\varphi)\rho^m e^{t\gamma_4}\,d\rho\,dy\,d\varphi,$$

где $m \geq 3$. Учитывая асимптотическую формулу (2.15), при достаточно малых $\delta_2 > 0$ и $\delta_3 > 0$ на основании леммы 3.1 получаем: $\rho_m^{(4)}(x,t) = O(t^{-2})(1+o(1)(1+|x|)), m \geq 3$. Элементы матрицы $\mathcal{P}_{4,\delta_4}(x,t)$ имеют вид

$$\tilde{p}_3(x,t) + \tilde{p}_2(x,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta_2}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon_4<|\frac{\pi}{2}-\sigma|<\frac{\pi}{2}} \tilde{f}_3(x,\rho,\sigma,\varphi)\rho^4 \sin^3\sigma \times$$

$$\times e^{\delta_4 t}\cos\sigma \, d\sigma d\rho d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta_2}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon_4<|\frac{\pi}{2}-\sigma|<\frac{\pi}{2}} \tilde{f}_2(x,\rho,\sigma,\varphi)\rho^3 \sin^2\sigma e^{t\delta_4}\cos\sigma \, d\sigma d\rho d\varphi. \quad (4.15)$$

Как показано в п.2, при $0 < \rho < \delta_2$, $0 < \sin\sigma < \delta_4$ для корня $\gamma_4(\rho,\sigma)$ и разности $\gamma_3 - \gamma_4$ справедливы асимптотические представления (2.15), (2.14). Из этих представлений следует, что при вычислении асимптотики интегралов (4.15) можно воспользоваться леммой 3.4 (сделав замену переменной $\sin\sigma = z$). На основании этой леммы все элементы матрицы $\mathcal{P}_{4,\delta_4}(x,t)$, кроме элементов с номерами (3.3) и (4.4), имеют порядок $O(t^{-2})$, а элементы с номерами (3.3) и(4.4) имеют порядок $O(t^{-2+\varepsilon})$, причем оценки выполняются равномерно по $x \in R_3$. Элементы матрицы $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_4(x,t)$ имеют вид:

$$\tilde{\tilde{p}}_\ell(x,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta_2}\int_0^{\sqrt{1-\delta_3^2}} \tilde{\tilde{f}}_\ell(x,\rho,z,\varphi)\rho^\ell e^{t\gamma_4} dz d\rho d\varphi, \quad (4.16)$$

где $\ell \geq 3$. Учитывая вид матрицы $\check{\mathcal{P}}_4(x,\rho,\sigma,\varphi)$ и представления (2.17), (2.18), получаем как и при выводе формулы (4.33) из [2]), что $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_4(x,t) = O(t^{-2})(1+|x|)$.

Суммируя полученные в этом пункте асимптотические оценки, можно сформулировать следующую лемму.

Лемма 4.1. *При достаточно малом* $\delta > 0$ *для интеграла* (4.1) *справедливо асимптотическое представление*

$$\mathcal{P}(x,t) = \left\{t^{-\frac{3}{2}}\cos\omega t \cdot F(A,B) + t^{-\frac{3}{2}}\sin\omega t \cdot F(B,-A) + t^{-\frac{7}{4}}F_3 + \right.$$

$$\left. + t^{-\frac{5}{4}}F_4\right\}(1+o(1)(1+|x|)) + \tilde{F}(x,t),$$

где матрицы $F(A,B)$, F_3, F_4 *определены (в формулировке теоремы 0.1),*

а матрица $\widetilde{F}(x,t)$ *имеет вид*

$$\frac{\widetilde{F}(x,t)}{1+|x|}=\begin{pmatrix} O(t^{-\frac{7}{4}}) & O(t^{-2}) & O(t^{-2}) & O(t^{-\frac{7}{4}}) \\ O(t^{-2}) & O(t^{-\frac{7}{4}}) & O(t^{-2}) & O(t^{-\frac{7}{4}}) \\ O(t^{-2}) & O(t^{-2}) & O(t^{2+\varepsilon}) & O(t^{-2}) \\ O(t^{-\frac{7}{4}}) & O(t^{-\frac{7}{4}}) & O(t^{-2}) & O(t^{-2+\varepsilon}) \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

где $\varepsilon>0$. *Оценки в* (4.17) *равномерны по* $x\in R_3$.

5. Асимптотика ядра обратного оператора. Случай $\frac{1}{2}\delta\leq|S|<\infty$

Вначале рассмотрим случай $|S|\geq N$, где N - достаточно большое положительное число. Часть ядра $\mathcal{R}(x,t)$ (см. (4.3)) интегрального оператора (1.6), соответствующую рассматриваемому случаю, можно записать в виде

$$\mathcal{R}(x,t)=\mathcal{R}_1'(x,t)+\mathcal{R}_2'(x,t)+\mathcal{R}''(x,t), \tag{5.1}$$

где

$$\mathcal{R}_j'(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{R_3}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j'}\frac{\check{A}(\gamma,s)\eta_\infty(|S|)}{P(\gamma,s)}e^{\gamma t}e^{i(x,s)}d\gamma ds; \tag{5.2}$$

$$\mathcal{R}''(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{R_3}\frac{\check{A}(\gamma,s)\eta_\infty(|s|)e^{i(x,s)}}{\{\frac{\partial}{\partial\gamma}P(\gamma,s)\}|_{\gamma=\gamma_1}}e^{\gamma_1 t}ds; \tag{5.3}$$

Γ_j' - окружность в комплексной γ-плоскости фиксированного радиуса с центром в точке $(-\nu(1+\beta)\lambda^2,0)$ для $j=1$ и точке $(-\nu\lambda^2,0)$ для $j=2$, внутри которой лежат корни γ_3,γ_4, $j=2$, или корень γ_2, $j=1$, уравнения (2.1) при $N\leq|S|<\infty$. Получая представление (5.1), мы воспользовались асимптотическими представлениями корней (2.19) - (2.21) для $\lambda=|S|\geq N$, леммой Жордана, теоремой Коши и формулой Коши. Оценка интегралов $\mathcal{R}_j'$, $j=1,2$, аналогична, поэтому будем рассматривать лишь интеграл $\mathcal{R}_1'(x,t)$.

Выбрав N достаточно большим, легко получить оценки для элементов $r_{i,j}'(x,t)$, $1\leq i,j\leq 4$, матрицы $\mathcal{R}_1'(x,t)$. Действительно, учитывая асимптотические представления (2.19) -(2.21) и вид (1.4) элементов

матрицы $\check{A}$, из (5.2) после перехода к сферической системе координат (1.3) и простейших оценок получаем

$$|r'_{i,j}(x,t)| \leq c \int_N^{\infty} \lambda^8 e^{-\frac{\nu}{2}(1+\beta)\lambda^2 t} d\lambda, \tag{5.4}$$

где постоянная $C>0$ не зависит от $x \in R_3$. Из (5.4) вытекает, что $r'_{i,j}(x,t) = O(t^{-\infty})$, $1 \leq i, j \leq 4$.

Из (5.3) находим, что элементы матрицы $\mathcal{R}''(x,t)$ имеют вид:

$$r''_{i,j}(x,t) = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_N^{\infty} \frac{b_{i,j}(\gamma_1,\lambda,\theta,\varphi) r_\infty(\lambda) e^{i\rho\lambda} e^{\gamma_1 t}}{\alpha_2(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)(\gamma_1-\gamma_4)} \lambda^2 \sin\theta \, d\lambda \, d\theta \, d\varphi. \tag{5.5}$$

Учитывая асимптотические формулы (2.19) - (2.21), легко убедиться, что интегралы (5.5), вообще говоря, не существуют (обратное преобразование Фурье

функции $\dfrac{b_{i,j}(\gamma_1,\lambda,\theta,\varphi) r_\infty(\lambda)}{\alpha^2(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)(\gamma_1-\gamma_4)} e^{i\rho\lambda} e^{\gamma_1 t}$ в (5.5) можно рассматривать лишь в смысле теории обобщенных функций).

Поэтому элементы $r''_{i,j}$ матрицы $\mathcal{R}''(x,t)$ заменим на новые элементы $f^{o}_{i,j}(x,t)$, которые имеют вид

$$f^{o}_{i,j}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_N^{\infty} \frac{b_{i,j}(\gamma_1,\lambda,\theta,\varphi) r_\infty(\lambda) e^{i\rho\lambda}}{\lambda^{\kappa}\alpha^2(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1-\gamma_3)(\gamma_1-\gamma_4)} e^{\left(\gamma_1+\frac{1}{2\alpha^2\nu(1+\beta)}\right)t} \sin\theta \, d\lambda \, d\theta \, d\varphi, \tag{5.6}$$

где $\kappa = 2$ при $1 \leq i, j \leq 3$ и $\kappa = 4$ при $i = 4$ или $j = 4$. Поскольку подынтегральная функция в (5.6) абсолютно интегрируема, то с помощью (2.19)-(2.21) при достаточно большом N получим оценки

$$|f^{o}_{i,j}(x,t)| \leq c, \quad 1 \leq i, j \leq 4, \tag{5.7}$$

с постоянной $C>0$, не зависящей от $x \in R_3$ и $t>0$.

Так как $r''_{i,j} = (-\Delta_x) f^{o}_{i,j} e^{-\frac{t}{2\alpha^2\nu(1+\beta)}}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ и $r''_{i,j} = (-\Delta_x)^2 f^{o}_{i,j} e^{-\frac{1}{2\alpha^2\nu(1+\beta)}t}$ $(i = 4$ или $j = 4)$, то свертку

$$\mathcal{J}_{i,j}(x,t) = \int\limits_{R_3} R''_{i,j}(x-y,t)W(y)dy = F^{-1}_{s\to x}\left[F_{x\to s}\left[\tau''_{i,j}(x,t)\right]F_{x\to s}\left[W(x)\right]\right],$$

рассматриваемую в смысле теории обобщенных функций, можно записать в виде

$$\mathcal{J}_{i,j}(x,t) = e^{-\frac{1}{2\alpha^2\nu(1+\beta)}t}\int\limits_{R_3} f^{\circ}_{i,j}(x-y,t)(-\Delta_y)W(y)dy \quad (1\leq i,j\leq 3);$$

$$\mathcal{J}_{i,j}(x,t) = e^{-\frac{1}{2\alpha^2\nu(1+\beta)}t}\int\limits_{R_3} f^{\circ}_{i,j}(x-y,t)(-\Delta_y)^2 W(y)dy \,(i=4 \text{ или } j=4), \tag{5.8}$$

причем интегралы в (5.8) абсолютно (и равномерно по x и t) сходятся для любой функции $W(y)$, для которой выполнено условие 1 из п.1.

В силу (5.1), (5.4), (5.7), (5.8), справедлива следующая

Лемма 5.1. *Пусть для функций* $v^{\circ}_j(x)$ $(j=1,2,3)$, $\rho^{\circ}(x)$ *выполнено условие 1 из п.1. Тогда свертка (в обобщенном смысле)*

$$\mathcal{R}(x,t) * \begin{pmatrix} \vec{v}_0(x) \\ \rho^{\circ}(x) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{R}(x,t) = F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\check{A}(\gamma,s)\mathcal{Z}_\infty(|s|)}{P(\gamma,s)} e^{\gamma t}d\gamma\right],$$

представима в виде

$$\mathcal{R}(x,t) * \begin{pmatrix} \vec{v}^{\circ}(x) \\ \rho^{\circ}(x) \end{pmatrix} = e^{-\frac{t}{2\alpha^2\nu(1+\beta)}}\int\limits_{R_3} F''\left(x-y,t,\frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \vec{v}^{\circ}(y) \\ \rho^{\circ}(y) \end{pmatrix}dy + O(t^{-\infty}),$$

элементы $f''_{i,j}$ *матрицы* F'' *имеют вид*

$$f''_{i,j}\left(x-y,t,\frac{\partial}{\partial y}\right) = f^{\circ}_{i,j}(x-y,t)(-\Delta_y) \qquad \text{при} \quad 1\leq i,j\leq 3,$$

$$f''_{i,j}\left(x-y,t,\frac{\partial}{\partial y}\right)=f^{\circ}_{i,j}(x-y,t)(-\Delta_y)^2 \quad \text{при } i=4 \quad \text{или} \quad j=4,$$

а функции $f^{\circ}_{i,j}(x,t)\ (1\le i,\ j\le 4)$ *равномерно по* $t\in[0,\infty)$ *и* $x\in R_3$ *ограничены.*

В случае $\frac{1}{2}\delta\le|S|\le 2N$, в силу леммы 2.1, существует такое $\varepsilon>0$, что при $\frac{1}{2}\delta\le|S|\le 2N$ для любого корня $\gamma_j(S)$ уравнения (2.1) справедлива оценка

$$Re\,\gamma_j(s)\le -2\varepsilon,\ j=1,2,3,4;\quad \frac{1}{2}\delta\le|S|\le 2N, \tag{5.9}$$

из которой, как и в аналогичном случае из [2], вытекает

Лемма 5.2. *Для функции* $Q(x,t)$, *определенной формулой (4.2), справедлива оценка*

$$|Q(x,t)|\le ce^{-2\varepsilon t},\qquad x\in R_3.$$

6. Дополнение

Доказательство теоремы вытекает из лемм 4.1. 5.1, 5.2.

Для завершения доказательства теоремы необходимо убедиться в том, что числа A и B, определенные в (0.6), отличны от нуля при всех рассматриваемых значениях параметров α^2, β, ω, ν.

Отличие от нуля числа B очевидно, поскольку верно равенство:

$$B=\int_0^{\pi} b(\theta)(b^2(\theta)-3a^2(\theta))\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}\frac{q^2(\theta)\sin\theta}{\sqrt{2\left(p(\theta)+\sqrt{p^2(\theta)+q^4(\theta)}\right)}\left(p^2(\theta)+q^4(\theta)\right)}\times$$

$$\times\left(-2q^4(\theta)-6p^2(\theta)-6p(\theta)\sqrt{p^2(\theta)+q^4(\theta)}\right)\left\{2\left(p^2(\theta)+q^4(\theta)\right)\left(p(\theta)+\sqrt{p^2(\theta)+q^4(\theta)}\right)\right\}^{-1}d\theta<0;$$

$$q^2=\frac{\sin^2\theta}{2\alpha^2\omega};\qquad p=\nu\left(1+\frac{\sin^2\theta}{2}\beta\right).$$

Выражение A можно записать в виде

$$A=\int_0^{\pi} a(\theta)(a^2(\theta)-3b^2(\theta))\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(p^2(\theta,\beta)+q^4(\theta)\right)^{-\frac{3}{2}}\left(p(\theta,\beta)\right.+$$

$$+\sqrt{p^2(\theta,\beta)+q^4(\theta)}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(p^2(\theta,\beta)-q^4(\theta)+p(\theta,\beta)\sqrt{p^2(\theta,\beta)+q^4(\theta)}\Big)d\theta.$$

Так как

$$\frac{1}{p^2(\theta,\beta)+q^4(\theta)}>\frac{1}{(1+\beta)^2}\cdot\frac{1}{p^2(\theta,0)+q^4(\theta)}\quad;$$

$$\frac{1}{p(\theta,\beta)+\sqrt{p^2(\theta,\beta)+q^4(\theta)}}\geqslant\frac{1}{1+\beta}\cdot\frac{1}{p(\theta,0)+\sqrt{p^2(\theta,0)+q^4(\theta)}}$$

и

$$p^2(\theta,\beta)-q^4(\theta)+p(\theta,\beta)\sqrt{p^2(\theta,\beta)+q^4(\theta)}\quad>$$

$$>p^2(\theta,0)-q^4(\theta)+p(\theta,0)\sqrt{p^2(\theta,0)+q^4(\theta)},$$

то справедлива оценка

$$A(\beta)>A(0)>0,\quad \beta>0,$$

здесь функции $p(\theta,\beta)$ и $q(\theta)$ определены в формулировке теоремы. Оценка $A(0)>0$ доказана в п.6 работы [2].

Автор искренне благодарен проф. В.Н.Масленниковой за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Масленникова В.Н. О скорости затухания вихря в вязкой жидкости.- Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1973, 76, с.46-72.
2. Глушко А.В. О затухании вихря в вязкой сжимаемой жидкости. Деп. ВИНИТИ 25.01.79 № 537-79 Деп.- 56 с.
3. Федорюк М.В. Метод перевала.- М.: Наука, 1977.-368 с.