УДК 518 + 517.392

ВЕСОВЫЕ ЭРМИТОВЫ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Дидур Л.И. (Красноярск)

С.Л. Соболев [1], применяя метод преобразований Фурье, исследовал приближенное интегрирование периодических функций и получил оценки норм функционалов погрешностей кубатурных формул с постоянным весом. Используя аппарат теории рядов Фурье, В.И. Половинкин [2] получил асимптотические оценки норм функционалов погрешностей весовых кубатурных формул на периодических функциях. Им же [3] получен удобный метод нахождения норм функционалов погрешностей на периодических функциях.

Эрмитовы кубатурные формулы рассматриваются в [4-6] для случая постоянного веса.

В настоящей работе дан алгоритм построения асимптотически оптимальных последовательностей весовых эрмитовых кубатурных формул в пространствах периодических функций $\tilde{L}_2^m$ и из этих последовательностей выводятся асимптотические оценки норм функционалов погрешностей кубатурных формул.

Верхние оценки норм функционалов погрешностей находятся методом, близким к методу из [2], что позволило использовать ряд оценок, полученных в [2]. Метод нахождения нижних оценок является новым.

Обозначения: $\nu=\{1,\dots,n\}$ - множество первых n натуральных чисел; G - единичный куб в n-мерном евклидовом пространстве,

$G=\{x: x=(x_1,\dots,x_n),\ 0<x_i<1,\quad i\in\nu\}$; t- натуральное число, α,β - целочисленные векторы;

$$\mu=\{\alpha:\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\ |\alpha|=\sum_{i\in\nu}\alpha_i\le m-\left[\frac{n}{2}\right]-1,\ 0\le\alpha_i\le m-\left[\frac{n}{2}\right]-1,\ i\in\nu\};$$

$$B_t=\{\beta:\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n),\ |\beta_i|\le t,\ i\in\nu\};\quad h=\frac{1}{2t+1};\quad |\beta|=\sqrt{\sum_{i\in\nu}\beta_i^2};$$

$$\Gamma_t=\{\tilde\beta:\tilde\beta=(\tilde\beta_1,\dots,\tilde\beta_n),\ \tilde\beta_i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,(2t+1)),\ \Gamma_t^*=\{\tilde\beta:\tilde\beta\in\Gamma_t,\ \tilde\beta_i\ne 0,\ i\in\nu\};$$

$(\beta, x) = \sum_{i\in\nu}' \beta_i x_i$; $\beta^{\alpha} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = \beta_1^{\alpha_1} \dots \beta_n^{\alpha_n}$, где $\beta_i^{\alpha_i} = 1$, если $\alpha_i = 0$,

$i \in \nu$; $f_\beta = f_{(\beta_1,\dots,\beta_n)} = \int\limits_G f(x_1,\dots,x_n) e^{-2\pi i \sum_{i\in\nu} \beta_i x_i} dx_1 \dots dx_n$;

$\widetilde{L}_2^m = \{ f : f$ - непрерывна, $\|f\|^2_{\widetilde{L}_2^m} = (2\pi)^{2m} \sum_\beta' |f_\beta|^2 |\beta|^{2m} < \infty \}$; $2m > n$, m, вообще говоря, - не обязательно целое.

Рассмотрим весовую эрмитову кубатурную формулу с функционалом ошибок:

$$(\ell^h(x), f(x)) = \int\limits_G g(x) [f - \mathcal{J}_\mu^h f](x) dx, \tag{1}$$

где

$$(\mathcal{J}_\mu^h f)(x) = h^n \sum_{\alpha\in\mu} \sum_{\gamma\in B_t} h^{|\alpha|} f^{(\alpha)}(h\gamma) \sum_{s\in B_t} a_{-s}^{h,\alpha} e^{-2\pi i (s, x - h\gamma)}, \tag{2}$$

$a_{-s}^{h,\alpha}$ - постоянные.

Операторы (2) обладают следующими свойствами:

1. Если $f(x) = 1$, то $(\mathcal{J}_\mu^h f)(x) = 1$ при $a_0^{h,0} = 1$.
2. При $\beta \in B_t$, $\tilde{\beta} \in \Gamma_t \setminus 0$ имеет место

$$(\mathcal{J}_\mu^h (e^{2\pi i (\beta + \tilde{\beta}, x)}))(x) = e^{2\pi i (\beta, x)} \sum_{\alpha\in\mu} a_\beta^{h,\alpha} h^{|\alpha|} (2\pi i (\beta + \tilde{\beta}))^{\alpha}.$$

3. При $\beta \in B_t$, $\tilde{\beta} = 0$ выполняется

$$(\mathcal{J}_\mu^h (e^{2\pi i (\beta, x)}))(x) = e^{2\pi i (\beta, x)},$$

если $a_\beta^{h,\alpha}$ таковы, что справедливо равенство:

$$\sum_{\alpha\in\mu} a_\beta^{h,\alpha} h^{|\alpha|} (2\pi i \beta)^{\alpha} = 1 \tag{3}$$

($a_\beta^{h,\alpha}$ всегда можно выбрать таким образом, что (3) имеет место при всех $\beta \in B_t$).

Пусть $\mathcal{I}$ - множество функционалов вида

$$(\rho(x), f(x)) = \int\limits_G f(x) dx - \sum_{\alpha\in\mu} c^{\alpha} f^{(\alpha)}(0), \quad c^0 = c^{(0,\dots,0)} = 1,$$

c^{α} - константы, $f \in \widetilde{L}_2^m$. Обозначим через ℓ_0 оптимальный функционал из $\mathcal{I}$, т.е. такой, что

$$\|\ell_0\|_{\widetilde{L}_2^{m*}} = \inf_{\rho\in\mathcal{L}} \|\rho\|_{\widetilde{L}_2^{m*}} .$$

В этом случае $C^{\alpha}=0$ при $|\alpha|$ нечетных [4].

Теорема 1. *Существует последовательность функционалов* $\{\ell^h\}$ *вида* (1) *такая, что при* $g\in L_2$, $t\to\infty$ *справедливо*

$$\|\ell^h\|^2_{\widetilde{L}_2^{m*}} \le h^{2m}\|\ell_0\|^2_{\widetilde{L}_2^{m*}}\|g\|^2_{L_2}(1+o(1)),$$

где ℓ_0 *- оптимальный функционал из* $\mathcal{L}$.

Доказательство. В [3] показано, что если $\rho\in\widetilde{L}_2^{m*}$, то

$$\|\rho\|^2_{\widetilde{L}_2^{m*}} = (2\pi)^{-2m}\sum_{\beta}{}' \frac{|(\rho(x),e^{2\pi i(\beta x)})|^2}{|\beta|^{2m}} . \tag{4}$$

Для функционалов вида (1) из (4) и свойств оператора (2) получим

$$\|\ell^h\|^2_{\widetilde{L}_2^{m*}} = (2\pi)^{-2m}\sum_{\widetilde{\beta}\in\Gamma_t}{}'\sum_{\beta\in B_t}\frac{|g_{-\beta-\widetilde{\beta}}-g_{-\beta}\sum_{\alpha\in\mu}a_\beta^{h,\alpha}h^{|\alpha|}(2\pi i(\beta+\widetilde{\beta}))^{\alpha}|^2}{|\beta+\widetilde{\beta}|^{2m}}, \tag{5}$$

откуда

$$\|\ell^h\|^2_{\widetilde{L}_2^{m*}} \le \mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2+2\sqrt{\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2}, \tag{6}$$

где

$$\mathcal{J}_1=(2\pi)^{-2m}\sum_{\widetilde{\beta}\in\Gamma_t}{}'\sum_{\beta\in B_t}\frac{|g_{-\beta}\sum_{\alpha\in\mu}a_\beta^{h,\alpha}h^{|\alpha|}(2\pi i(\beta+\widetilde{\beta}))^{\alpha}|^2}{|\beta+\widetilde{\beta}|^{2m}},$$

$$\mathcal{J}_2=(2\pi)^{-2m}\sum_{\widetilde{\beta}\in\Gamma_t}{}'\sum_{\beta\in B_t}\frac{|g_{-\beta-\widetilde{\beta}}|^2}{|\beta+\widetilde{\beta}|^{2m}} .$$

Определим $a_\beta^{h,\alpha}$ из (3) следующим образом:

$$a_\beta^{h,\alpha} = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} C^{\alpha}\left[\sum_{\alpha\in\mu}C^{\alpha}h^{|\alpha|}(2\pi i\beta)^{\alpha}\right]^{-1} & \text{при } |\alpha| \text{ четном;} \\ 0 & \text{при } |\alpha| \text{ нечетном;} \end{array}\right\}, \ \beta\in B_{\sqrt{t}}, \\ 0 \quad \text{при } \alpha\in\mu\setminus 0,\ \beta\in B_t\setminus B_{\sqrt{t}} . \end{cases} \tag{7}$$

где C^α - коэффициенты оптимального функционала $\ell_0 \in \mathcal{L}$.

Если множество μ состоит из одного нулевого элемента, то из (7) следует, что $a_\beta^{h,0} = 1$. В этом случае функционал (1) будет совпадать с функционалом (8) из [2] .

Для доказательства теоремы понадобятся следующие элементарные оценки:

1. При всех $\beta \in B_{\sqrt{t}}$, $\tilde{\beta} \in \Gamma_t^*$ существует функция $\sigma_1(\beta, \tilde{\beta}, \alpha)$ такая, что при $t \to \infty$ выполняется

$$(\beta + \tilde{\beta})^\alpha = \tilde{\beta}^\alpha \left(1 + \sigma_1(\beta, \tilde{\beta}, \alpha)\right), \tag{8}$$

где $|\sigma_1(\beta, \tilde{\beta}, \alpha)| = O(\sqrt{h})$.

2. Обозначим через η множество индексов нулевых компонент векторов $\tilde{\beta} \in \Gamma_t$; $\eta \subset \nu$. Тогда при всех $\beta \in B_{\sqrt{t}}$, $\tilde{\beta} \neq 0$, $\tilde{\beta} \in \Gamma_t \setminus \Gamma_t^*$ существует функция $\sigma_2(\beta, \tilde{\beta}, \alpha)$ такая, что при $t \to \infty$ имеет место

$$(\beta + \tilde{\beta})^\alpha = \left(1 + \sigma_2(\beta, \tilde{\beta}, \alpha)\right) \prod_{j \in \eta} \beta_j^{\alpha_j} \prod_{i \in \nu \setminus \eta} \tilde{\beta}_i^{\alpha_i}, \tag{9}$$

где

$$|\sigma_2(\beta, \tilde{\beta}, \alpha)| = O(\sqrt{h}) .$$

Заметим, что при всех $\beta \in B_{\sqrt{t}}$, $\tilde{\beta} \in \Gamma_t \setminus \Gamma_t^*$, $\tilde{\beta} \neq 0$, имеет место

$$\left| \prod_{j \in \eta} \beta_j^{\alpha_j} \prod_{i \in \nu \setminus \eta} \tilde{\beta}_i^{\alpha_i} \right| \le h^{-\frac{1}{2}\sum_{j \in \eta} \alpha_j} \left| \prod_{i \in \nu \setminus \eta} \tilde{\beta}_i^{\alpha_i} \right| . \tag{10}$$

3. Существует функция $\sigma_3(h, \beta)$ такая, что при $\beta \in B_{\sqrt{t}}$, $t \to \infty$ выполняется

$$\left[\sum_{\alpha \in \mu} c^\alpha h^{|\alpha|} (2\pi i \beta)^\alpha \right]^{-1} = \left[1 + \sum_{\alpha \in \mu}{}' c^\alpha h^{|\alpha|} (2\pi i \beta)^\alpha \right]^{-1} = 1 + \sigma_3(h, \beta), \tag{11}$$

где $|\sigma_3(h, \beta)| = O(h)$.

4. При всех $\beta \in B_{\sqrt{t}}$, $\tilde{\beta} \in \Gamma_t \setminus 0$ существует функция $\sigma_4(\beta, \tilde{\beta})$ такая, что при $t \to \infty$ имеет место

$$|\tilde{\beta}|^{-2m} \left(1 - \sigma_4(\beta, \tilde{\beta})\right) \le |\beta + \tilde{\beta}|^{-2m} \le \left(1 + \sigma_4(\beta, \tilde{\beta})\right) |\tilde{\beta}|^{-2m}, \tag{12}$$

где $|\sigma_4(\beta, \tilde{\beta})| = O(\sqrt{h})$.

Из (6), (10) следует, что при $t \to \infty$ справедливо

$$J_1 = (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde\beta \in \Gamma_t} \sum_{\beta \in B_{\sqrt{t}}} \frac{\left| g_{-\beta} \sum\limits_{\alpha\in\mu} c^{\alpha} (1+\sigma_3(h,\beta)) h^{|\alpha|} (2\pi i(\beta+\tilde\beta))^{\alpha} \right|^2}{|\beta+\tilde\beta|^{2m}} +$$

$$+ (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde\beta \in \Gamma_t} \sum_{\beta \in B_t \setminus B_{\sqrt{t}}} \frac{|g_{-\beta}|^2}{|\beta+\tilde\beta|^{2m}},$$

$$(2\pi)^{-2m} {\sum_{\tilde\beta \in \Gamma_t}}' \sum_{\beta \in B_t \setminus B_{\sqrt{t}}} \frac{|g_{-\beta}|^2}{|\beta+\tilde\beta|^{2m}} = o(h^{2m})$$

(см. [2]).

Используя (11), (12) и оценку второго слагаемого J_1, получаем при $t \to \infty$

$$J_1 \leq (2\pi)^{-2m} {\sum_{\tilde\beta \in \Gamma_t}}' \sum_{\beta \in B_{\sqrt{t}}} \frac{\left| g_{-\beta} \sum\limits_{\alpha\in\mu} c^{\alpha} h^{|\alpha|} (2\pi i(\beta+\tilde\beta))^{\alpha} \right|^2}{|\tilde\beta|^{2m}} (1+O(\sqrt{h})) + o(h^{2m}).$$

Из (8) имеем при $t \to \infty$

$$J_1 \leq (A+B)(1+O(\sqrt{h})) + o(h^{2m}), \tag{13}$$

где

$$A = (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde\beta \in \Gamma_t^*} \sum_{\beta \in B_{\sqrt{t}}} \frac{\left| g_{-\beta} \sum\limits_{\alpha\in\mu} c^{\alpha} h^{|\alpha|} (2\pi i\tilde\beta)^{\alpha} (1+\sigma_1(\beta,\tilde\beta,\alpha)) \right|^2}{|\tilde\beta|^{2m}},$$

$$B = (2\pi)^{-2m} {\sum_{\tilde\beta \in \Gamma_t \setminus \Gamma_t^*}}' \sum_{\beta \in B_{\sqrt{t}}} \frac{\left| g_{-\beta} \sum\limits_{\alpha\in\mu} c^{\alpha} h^{|\alpha|} (2\pi i(\beta+\tilde\beta))^{\alpha} \right|^2}{|\tilde\beta|^{2m}}.$$

Для A справедливо неравенство $A \leq A_1 + A_2 + 2\sqrt{A_1 A_2}$,

где

$$A_1 = (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde\beta \in \Gamma_t^*} \sum_{\beta \in B_{\sqrt{t}}} \frac{\left| g_{-\beta} \sum\limits_{\alpha\in\mu} c^{\alpha} h^{|\alpha|} (2\pi i\tilde\beta)^{\alpha} \right|^2}{|\tilde\beta|^{2m}} =$$

$$= (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde\beta \in \Gamma_t^*} \frac{\left| g_{-\beta} \sum\limits_{\alpha\in\mu} c^{\alpha} h^{|\alpha|} (2\pi i\tilde\beta)^{\alpha} \right|^2}{|\tilde\beta|^{2m}} \Big(\sum_{\beta \in B_{\sqrt{t}}} |g_{-\beta}|^2 \Big) \leq$$

$$\leq h^{2m} \|g\|^2_{L_2} (2\pi)^{-2m} \sum_{\substack{\beta \\ \beta_i \neq 0 \\ i \in \nu}}{}' \frac{\left| \sum_{\alpha \in \mu} c^\alpha (2\pi i \beta)^\alpha \right|^2}{|\beta|^{2m}},$$

$$A_2 = (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde\beta \in \Gamma_t^*} \sum_{\beta \in B_{\sqrt{t}}} \frac{\left| g_{-\beta} \sum_{\alpha \in \mu} c^\alpha h^{|\alpha|} (2\pi i \tilde\beta)^\alpha \Theta_1(\beta, \tilde\beta, \alpha) \right|^2}{|\tilde\beta|^{2m}}.$$

Используя оценку (8), получаем при $t \to \infty$

$$A_2 \leq Kh (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde\beta \in \Gamma_t^*} \sum_{\beta \in B_{\sqrt{t}}} \frac{|g_{-\beta}|^2 \left(\sum_{\alpha \in \mu} |c^\alpha| h^{|\alpha|} |(2\pi i \tilde\beta)^\alpha| \right)^2}{|\tilde\beta|^{2m}} \leq$$

$$\leq K_1 h^{2m+1} \sum_{\beta}{}' \frac{\left(\sum_{\alpha \in \mu} |c^\alpha| |\beta^\alpha| \right)^2}{|\beta|^{2m}} \leq$$

$$\leq K_2 h^{2m+1} \sum_{\beta}{}' \frac{1}{|\beta|^{2\left[\frac{n}{2}\right]+2}} = o(h^{2m}),$$

здесь K, K_1, K_2 - константы; ряд $\sum\limits_{\beta}{}' \frac{1}{|\beta|^{2\left[\frac{n}{2}\right]+2}}$ сходится при $t \to \infty$.

Таким образом,

$$A \leq h^{2m} \|g\|^2_{L_2} (2\pi)^{-2m} \sum_{\substack{\beta \\ \beta_i \neq 0 \\ i \in \nu}} \frac{\left| \sum_{\alpha \in \mu} c^\alpha (2\pi i \beta)^\alpha \right|^2}{|\beta|^{2m}} + o(h^{2m}).$$

Аналогично приведенным выше оценкам для A, используя (9), (10), доказываем, что при $t \to \infty$ выполняется

$$B \leq h^{2m} \|g\|^2_{L_2} (2\pi)^{-2m} \sum_{\substack{\beta \\ \beta_j = 0 \\ j \in \xi \subset \nu}}{}' \frac{\left| \sum_{\alpha \in \mu} c^\alpha (2\pi i \beta)^\alpha \right|^2}{|\beta|^{2m}} + o(h^{2m}).$$

Из (13), полученных оценок A и B, при $t \to \infty$ следует

$$J_1 \leq h^{2m} \|g\|^2_{L_2} (2\pi)^{-2m} \sum_{\beta}{}' \frac{\left| \sum_{\alpha \in \mu} c^\alpha (2\pi i \beta)^\alpha \right|^2}{|\beta|^{2m}} \left(1 + o(\sqrt{h}) \right).$$

Из (4) имеем

$$\|\ell_0\|^2_{\widetilde{L}_2^{m*}} = (2\pi)^{-2m} \sum_{\beta}{}' \frac{|\sum_{\alpha\in\mu} C^{\alpha}(2\pi i\beta)^{\alpha}|^2}{|\beta|^{2m}}. \tag{14}$$

Тогда при $t \to \infty$ получаем

$$\mathcal{J}_1 \leq h^{2m} \|\ell_0\|^2_{\widetilde{L}_2^{m*}} \|g\|^2_{L_2} \left(1+o(\sqrt{h})\right). \tag{15}$$

При $t \to \infty$ (см. [2]) имеет место

$$\mathcal{J}_2 = o(h^{2m}). \tag{16}$$

Теорема 1 следует из (6), (15), (16).

Определение. Последовательность функционалов $\{\ell^h\} \subset \widetilde{L}_2^{m*}$ вида (1) называется *асимптотически оптимальной*, если для любой последовательности $\{\rho^h\} \subset \widetilde{L}_2^{m*}$ того же вида (1) выполняется

$$\varliminf_{h\to 0} \left\{ \|\rho^h\|_{\widetilde{L}_2^{m*}} \|\ell^h\|^{-1}_{\widetilde{L}_2^{m*}} \right\} \geq 1.$$

Теорема 2. *Пусть* $g \in L_2$. *Тогда для произвольной последовательности функционалов* $\{\ell^h\} \subset \widetilde{L}_2^{m*}$ *вида* (1) *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *при достаточно больших* t *выполняется неравенство*

$$\|\ell^h\|^2_{\widetilde{L}_2^{m*}} \geq h^{2m} \|\ell_0\|^2_{\widetilde{L}_2^{m*}} \|g\|^2_{L_2} (1-\varepsilon),$$

где ℓ_0 *- оптимальный функционал из* $\mathcal{I}$.

Доказательство. Предварительно рассмотрим функционал

$$(\ell(x), f(x)) = \int_G [f - \mathcal{J}_\mu^h f](x) dx,$$

где $(\mathcal{J}_\mu^h f)(x)$ - оператор (2) , $(\ell, 1) = 0$ при $a_0^{h,0} = 1$.

Используя свойство 2 оператора (2), получаем

$$(\ell(x), e^{2\pi i(\beta+\tilde{\beta}, x)}) = \int_G e^{2\pi i(\beta+\tilde{\beta},x)} dx - \int_G e^{2\pi i(\beta,x)} \sum_{\alpha\in\mu} a_\beta^{h,\alpha} h^{(\alpha)} (2\pi i(\beta+\tilde{\beta}))^{\alpha} dx =$$

$$= \begin{cases} -\sum_{\alpha\in\mu} a_0^{h,\alpha} h^{|\alpha|} (2\pi i\tilde{\beta})^{\alpha} & \text{при } \beta = 0; \\ 0 & \text{при } \beta \neq 0; \end{cases} \tag{17}$$

т.е. функционал $(\ell(x), e^{2\pi i(\beta+\tilde{\beta},x)})$ обращается в нуль во всех точках, кроме $\tilde{\beta} \in \Gamma_t \setminus 0$, и

$$\left|\left(\ell(x), e^{2\pi i(\beta+\tilde\beta, x)}\right)\right| = \left|\left(\ell(x), e^{2\pi i(\tilde\beta, x)}\right)\right|. \tag{18}$$

Тогда из (4), (17) и (18) имеем

$$\|\ell\|^2_{\tilde L_2^{m*}} = (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde\beta\in\Gamma_t}{}' \frac{\left|\left(\ell(x), e^{2\pi i(\tilde\beta, x)}\right)\right|^2}{|\tilde\beta|^{2m}} = (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde\beta\in\Gamma_t}{}' \frac{\left|\sum_{\alpha\in\mu} a_0^{h,\alpha} h^{|\alpha|}(2\pi i\tilde\beta)^{\alpha}\right|^2}{|\tilde\beta|^{2m}}. \tag{19}$$

Положив $a_0^{h,\alpha} = c^{\alpha}$, где c^{α} - коэффициенты оптимального функционала $\ell_0 \in \mathcal{I}$, получим, используя (14),

$$\|\ell\|^2_{\tilde L_2^{m*}} = h^{2m} \|\ell_0\|^2_{\tilde L_2^{m*}}. \tag{20}$$

Для доказательства теоремы понадобится неравенство, вытекающее из (17),(18):

$$\left|\left(\ell(x), e^{2\pi i(\tilde\beta, x)}\right)\right| \leqslant \left|\sum_{\alpha\in\mu} a_\beta^{h,\alpha} h^{|\alpha|} (2\pi i(\beta+\tilde\beta))^{\alpha}\right|. \tag{21}$$

Рассмотрим произвольную последовательность $\{\ell^h\} \subset \tilde L_2^{m*}$ вида (1), удовлетворяющую условиям теоремы 2. Из (5) имеем

$$\|\ell^h\|^2_{\tilde L_2^{m*}} \geqslant \mathcal{J}_1 - 2\sqrt{\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2} - \mathcal{J}_2, \tag{22}$$

где

$$\mathcal{J}_1 = (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde\beta\in\Gamma_t}{}' \sum_{\beta\in B_t} \frac{\left|g_{-\beta} - \sum_{\alpha\in\mu} a_\beta^{h,\alpha} h^{|\alpha|} (2\pi i(\beta+\tilde\beta))^{\alpha}\right|^2}{|\beta+\tilde\beta|^{2m}},$$

$$\mathcal{J}_2 = (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde\beta\in\Gamma_t}{}' \sum_{\beta\in B_t} \frac{|g_{-\beta-\tilde\beta}|^2}{|\beta+\tilde\beta|^{2m}}.$$

Известно [16], что

$$\mathcal{J}_2 = o(h^{2m}).$$

Выберем $\varepsilon > 0$. Так как $g \in L_2$, то существует число t_0 такое, что

$$\sum_{\beta\in B_{t_0}} |g_{-\beta}|^2 \geqslant \|g\|^2_{L_2} (1-\varepsilon). \tag{23}$$

Пусть $R_{t_0} = \{\beta : \beta \in B_{t_0},\ g_{-\beta} \neq 0\}$. Тогда из неравенства (21), (23), (12) и соотношения (20) следует

$$\mathcal{J}_1 \geq (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde{\beta}\in\Gamma_t}{}' \sum_{\beta\in R_{t_0}} \frac{|g_{-\rho}|^2 \left|\sum_{\alpha\in\mu} a_\beta^{h,\alpha} h^{|\alpha|} (2\pi i(\beta+\tilde{\beta}))^\alpha\right|^2}{|\beta+\tilde{\beta}|^{2m}} \geq$$

$$\geq (2\pi)^{-2m} \sum_{\tilde{\beta}\in\Gamma_t}{}' \frac{\left|\left(\ell(x), e^{2\pi i(\tilde{\beta},x)}\right)\right|^2}{|\tilde{\beta}|^{2m}} (1-\varepsilon)\left(\sum_{\beta\in R_{t_0}} |g_{-\rho}|^2\right) \geq \|\ell\|^2_{\tilde{L}_2^{m*}} \|g\|^2_{L_2}(1-\varepsilon) - h^{2m} \|\ell_0\|^2_{\tilde{L}_2^{m*}} \|g\|^2_{L_2}(1+\varepsilon)^2 \qquad (24)$$

Из (22), (16), (24) следует теорема 2.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974, с.687-690.
2. Половинкин В.И. Весовые кубатурные формулы в периодическом случае.- Мат. заметки, 1968, т.3, №3, с.319-326.
3. Половинкин В.И. Последовательности функционалов с пограничным слоем. - Сиб. мат.журн.,1974, т.15, №2, с.413-429.
4. Хаитов Т.И. Кубатурные формулы с заданием производных. - Докл. АН ТаджССР, 1969, т.12, №10, с.3-6.
5. Половинкин В.И., Дидур Л.И. Асимптотически оптимальные последовательности эрмитовых кубатурных формул.- Сиб.мат.журн., 1978, т.19, №3, с.663-669.
6. Половинкин В.И., Дидур Л.И. О порядке сходимости кубатурных формул.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент , изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1975, вып.34, с.3-14.