УДК 517.5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СЛЕДА ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА $L_p^{\mu}(E_n)$ С.Л. СОБОЛЕВА

Е.А. Хамаев (Улан-Уде)

С.Л.Соболев в [1] ввел пространства функций, имеющих все обобщенные производные порядка ℓ , суммируемые в $L_p(g)$. Каждая такая функция имеет представление

$$f(x) = Q_{\ell-1}(x) + \int\limits_{g} \sum_{|\alpha|<\ell} \mathcal{K}_{\alpha}(x,y)\mathcal{D}^{\alpha} f(y)dy, \tag{1}$$

где $Q_{\ell-1}(x)$ - полином степени $(\ell-1)$. Множество таких функций с нормой

$$\|f(x), W_p^{\ell}\| = \|Q_{\ell-1}(x)\| + \sum_{|\alpha|=\ell} \|\mathcal{D}^{\alpha} f(x), L_p(g)\|$$

образует банахово пространство $W_p^{\ell}(g)$. Фактор-пространство W_p^{ℓ} по конечномерному подпространству полиномов степени $(\ell-1)$ получило название $L_p^{\ell}(E_n)$. Пространство Соболева нашло широкое приложение в различных областях анализа, дифференциальных уравнений и вычислительной математики. Имеются многочисленные работы, в которых были даны различные обобщения $L_p^{\ell}(E_n)$ для более общих пространств функций (см.,например, [2-5]).

В настоящей работе рассматривается пространство типа $L_p^{\ell}(E_n)$, построенное с помощью псевдодифференциального оператора вида

$$PU = \int\limits_{E_n} e^{-2\pi i x\xi} \mu(i\xi)\hat{U}\,d\xi, \tag{2}$$

где символ $\mu(i\xi)$ однороден и имеет заданное поведение на бесконечности и около координатных плоскостей $\xi_j = 0$, $j=1,2,\ldots,n$. Каждая функция $f(x)$, для которой $\|pf, L_p(E_n)\| < \infty$ и рост которой ограничен некоторой фиксированной степенью $|x|$, имеет представление типа (1). Множество таких функций с конечной нормой

$$\|f(x), L_p^{\mu}(E_n)\| = \|\rho f(x), L_p(E_n)\| < \infty$$

будем называть пространством $L_p^{\mu}(E_n)$. Как частный случай, в этот класс входят пространства $L_p^{\psi}(E_n)$ с лиувиллевскими производными, введенные П.И.Лизоркиным в [5,6]. Некоторые свойства этого пространства были изучены в [7,8]. В настоящей работе изучаются граничные свойства функций, принадлежащих классам $L_p^{\mu}(E_n)$. Полученные теоремы вложения и продолжения для следа дают необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяет след функции из $L_p^{\mu}(E_n)$ на $n-1$ -мерной плоскости евклидова пространства E_n.

§ 1. Основные определения

Рассмотрим четную функцию $\mu(i\xi) = \mu(i\xi_1, i\xi_2, \ldots, i\xi_n)$,

$$\mu(i\xi) \in C^{2N}, \quad \xi_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1) Функция $\mu(i\xi)$ однородна, т.е. существует вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что для любого $\lambda > 0$ выполняется $\mu(i\xi\lambda^{\alpha}) = \lambda\mu(i\xi)$. Назовем $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ показателем однородности $\mu(i\xi)$. В дальнейшем всюду будем полагать $\alpha_j^{-1} = \ell_j \geqslant 1$.

2) Функция $\mu(i\xi)$ удовлетворяет неравенству

$$C_1\|\xi\| < \mu(i\xi) \leq C_2\|\xi\|, \qquad \text{где } \|\xi\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi^{2\ell_j}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Функция $(i\xi_k)^{\ell_k} = |i\xi_k|^{\ell_k} \cdot e^{i(\varphi + 2\pi m)\ell_k}$ является многозначной, поэтому $(i\xi_k)^{\ell_k}$ будем считать равной ветви при $K = 0$.

3) Для любого $\beta, \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, при $\xi_j \neq 0, j = 1, \ldots, n$, функции $\mathcal{D}^{\beta}\mu(i\xi)$ непрерывные и имеют место следующие оценки:

$$|\mathcal{D}^{\beta}\mu(i\xi)| \leq C\|\xi\|^{\nu} \qquad \text{при } 0 \leq \beta_j \leq [\ell_j], \ \nu > 0,$$

$$\left|\prod_{j=1}^{n} |\xi_j|^{\ell_j} \mathcal{D}_j^{K_j} \mathcal{D}^{\beta}\mu(i\xi)\right| \leq C(1 + \|\xi\|)^{\nu},$$

где $\gamma_j = 0$ при ℓ_j целом или $\kappa_j = 0$ и $\gamma_j = \kappa_j - (\ell_j - [\ell_j])$ при $\kappa_j \geqslant 1$, $|\kappa| < nN$. Положим

$$(u, v) = \int_{E_n} u\bar{v}\,dx,$$

$F\varphi = \hat{\varphi}$ - преобразование Фурье,

$F^{-1}\varphi = \check{\varphi}$ - обратное преобразование Фурье.

Определим множество функций S_n. Функция $\varphi(x) \in S_n$, если $\varphi(x) \in C^{2N}(E_n) \cap L_1(E_n)$ и удовлетворяет условию

$$\left|\mathcal{D}^{\beta}\left[\mu(i\xi)\hat{\varphi}(\xi)\right]\right| \leqslant C_{\varphi}\left(1 + \|\xi\|\right)^{-N}, \quad |\beta| = 0, 1, \ldots, N. \tag{3}$$

Обозначим через Φ' совокупность бесконечно дифференцируемых комплексно-значных функций $\varphi(x)$, стремящихся к нулю вместе со всеми производными на бесконечности быстрее полинома любой степени и равных нулю на каждой из координатных плоскостей $x_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, так что остаются конечными выражения

$$\|\varphi, \kappa\| = \sup_{|\alpha| < \kappa} \sup_{x} M_{\kappa}(x) \cdot |\mathcal{D}^{\alpha}\varphi(x)|, \quad \kappa = 0, 1, \ldots,$$

где $M_{\kappa}(x) = \max\left\{\left(1 + |x|^2\right)^{\frac{\kappa}{2}}, \frac{1}{\lambda^{\kappa}}\right\}$, $\lambda = \min\left\{\min_i |x_i|, 1\right\}$,

$$\Phi = \{\psi : \ \psi = \check{\varphi}(x), \ \varphi(x) \in \Phi'\}.$$

Из [9] следует, что функции $\psi(x) \in \Phi$ плотны в $L_p(E_n)$, $\kappa p < \infty$. Из свойств символа $\mu(i\xi)$ (см. 1)-3)) следует, что на функциях $\psi \in \Phi$ имеет место оценка (3), т.е. класс $\Phi \subset S_N$. Действительно, пусть $\varphi \in \Phi$, $\varphi = \check{\psi}$, $\psi \in \Phi'$. Тогда

$$\left|\left(1 + \|\xi\|\right)^{N} \sum_{\kappa=0}^{|\beta|} \mathcal{D}^{\beta-\kappa}\mu(i\xi)\,\mathcal{D}^{\beta+\kappa}\hat{\varphi}\right| =$$

$$= \left|\left(1 + \|\xi\|\right)^{N} \sum_{\kappa=0}^{|\beta|} \mathcal{D}^{\beta-\kappa}\mu(i\xi)\,\mathcal{D}^{\beta+\kappa}\psi\right| \leqslant$$

$$\leq \sum_{\kappa=0}^{|\beta|} \frac{(1+\|\xi\|)^N (1+\|\xi\|^\nu)}{\prod_{j=1}^{n} |\xi_j|^{\kappa_j-(\ell_j-[\ell_j])}} \cdot |\mathcal{D}^{\beta+\kappa} \psi| \leq$$

$$\leq \max_{|\alpha|\leq N_1} \max_{\xi\in E_n} \frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{N_1}{2}}}{\min_i |\xi_j|^{N_1}} |\mathcal{D}^\alpha \psi| \leq C ,$$

откуда следует, что класс S_N является плотным в $L_p(E_n)$.

Определим класс функций $U(x)\in S_N'$. Функция $U(x)\in S_N'$, если:

1. $u(x)\in L_p^{loc}(E_n)$, $1<p<\infty$, и для почти всех $x\in E_n$ имеет место оценка

$$2.\ |u(x)|\cdot(1+\|x\|)^{-N} < K_0(x), \tag{4}$$

где $K_0(x)\in L_1(E_n)$.

Пусть символ $\mu(i\xi)$ удовлетворяет условиям 1)-3), на функциях $\varphi(x)\in S_N$ определим операторы

$$PU = \int_{E_n} e^{2\pi i x\xi} \mu(i\xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi ,$$

$$P^*U = \int_{E_n} e^{2\pi i x\xi} \mu(i\xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi .$$

Определим класс $L_p^\mu(E_n)$. Функция $U(x)\in L_p^\mu(E_n)$, если:

1. $U(x)\in S_N'$.

$$2.\ \|U(x), L_p^\mu(E_n)\| = \sup_{\varphi\in S_N} \frac{(U, F^{-1}(\mu\hat{\varphi}))}{\|\varphi, L_{p'}(E_n)\|} < \infty . \tag{5}$$

3. Для почти всех $x'(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ имеет место

$$\frac{U(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)}{(1+|x_j|)^{m_j^0}} \longrightarrow 0 \qquad \text{при } x_j \longrightarrow \infty ,$$

где $m_j^0 = \begin{cases} [\ell_j]+1 & \text{при } \ell_j \text{ нецелом;} \\ \ell_j & \text{при } \ell_j \text{ целом.} \end{cases}$

Класс $L_p^\mu(E_n)$ является обобщением класса $L_p^\ell(E_n)$ Соболева, а также классов $L_p^\gamma(E_n)$ с лиувиллевскими производными, введенными П.И.Лизоркиным в [5].

Для функций $U(x)\in L_p^\mu(E_n)$ функционал $(U, F^{-1}(\mu\hat\varphi))$ является непрерывным функционалом над $L_{p'}(E_n)$, $1<p<\infty$. Тогда существует функция $f(x)\in L_p(E_n)$ такая, что для любых $\varphi\in S_N$

$$(U(x), F^{-1}[\mu(i\xi)\hat\varphi(\xi)]) = (U, P^*\varphi) = (f,\varphi), \qquad (6)$$

где $P^*\varphi = F^{-1}[\mu(i\xi)\hat\varphi(\xi)]$.

Учитывая (6), получаем, что $U(x)\in L_p^\mu(E_n)$ есть решение уравнения $(U, P^*\varphi) = (f,\varphi)$. Тогда

$$\|U(x), L_p^\mu(E_n)\| = \sup_{\varphi\in S_N} \frac{(U, P^*\varphi)}{\|\varphi, L_{p'}(E_n)\|} =$$

$$= \sup_{\varphi\in S_N} \frac{(f,\varphi)}{\|\varphi, L_{p'}(E_n)\|} = \|f, L_p(E_n)\|.$$

Замечание. Если $U(x)\in S_N$, то $(U, P^*\varphi) = (PU,\varphi) = (f,\varphi)$, следовательно, $PU = f$ и $\|U(x), L_p^\mu(E_n)\| = \|PU, L_p(E_n)\|$. Из [10] следует, что пространство $L_p^\mu(E_n)$ является полным и для любой функции $U(x)\in L_p^\mu(E_n)$ имеет место представление

$$U(x) = P_{m_0-1}(x) + \lim_{h\to 0} J_{h,1}[f] + J_{1,0}[f], \qquad (7)$$

где $$J_{h,\varepsilon}[f] = \int_\varepsilon^{h^{-1}} v^{-|\alpha|}\int_{E_n}\hat G\left(\frac{t-x}{v^\alpha}\right) f(t)\,dt\,dv, \qquad (8)$$

$$f_h(x) = h^{-|\alpha|}\int_{E_n}\hat G_0\left(\frac{t-x}{h^\alpha}\right) f(t)\,dt,$$

и $G(t) = \mu^{-1}(it)G_1(t)$, $G_1(t) = G_0(t)\cdot\sum_{j=1}^{n} t_j^{4k}$,

$$G_0(t) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} t_j^{4\kappa}(\alpha_j 4\kappa)^{-1}\right), \tag{9}$$

$$m_0 = \begin{cases} [\ell_j]+1 & \text{при } \ell_j \text{ нецелом;} \\ \ell_j & \text{при } \ell_j \text{ целом.} \end{cases} \tag{10}$$

§ 2. Теоремы вложения

Определение. Следуя О.В. Бесову [3], будем считать, что функция $f \in \tilde{B}_p^{\nu}(E_n)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\nu_j = \bar{\nu}_j + \beta_j$, где $0 < \beta_j \leq 1$ и $\bar{\nu}_j = [\nu_j]$, если f локально суммируема и $\sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} h^{-1-p\beta_j} \| \Delta_{h\ell_j}^{\kappa} \mathcal{D}_{x_j}^{\bar{\nu}_j} f, L_p(E_n) \|^p dh < \infty$ ($\kappa = 1$ при ν_j нецелом и $\kappa = 2$ при ν_j целом), где

$$\Delta_{h\ell_j} f = f(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\Delta_{h\ell_j}^2 f = f(x_1, \ldots, x_j - h, \ldots, x_n) - 2f(x_1, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n),$$

$$\ell_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0).$$

Положим
$$\| f, \tilde{B}_p^{\nu}(E_n) \|^p = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} \frac{\| \Delta_{h\ell_j}^{\kappa} \mathcal{D}_{x_j}^{\bar{\nu}_j} f, L_p(E_n) \|^p}{h^{1+p\beta_j}} dh. \tag{11}$$

Пространство $\tilde{\mathcal{B}}_{p,\kappa}^{\nu}(E_n)$ является полным. Две различные функции, принадлежащие $\tilde{\mathcal{B}}_{p,\kappa}^{\nu}(E_n)$, отличаются на полином $P_m(x)$ степени $m = (m_1, \ldots, m_n)$, где $m_j = \bar{\nu}_j$ при ν_j нецелом и $m_j = \bar{\nu}_j + 1$ при ν_j целом.

Теорема 1. *Пусть* $u(x) \in L_p^{\mu}(E_n)$ *и символ* $\mu(i\xi)$ *однородности* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\ell_1^{-1}, \ell_2^{-1}, \ldots, \ell_n^{-1})$ *удовлетворяет условиям* 1)–3), $1 < p < \infty$, $1 - \frac{\alpha_n}{p} > 0$. *Тогда существует такой полином* $P_m(x)$ *степени* $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $m_j = [\ell_j]$ *при* ℓ_j *нецелом,* $m_j = \ell_j - 1$ *при* ℓ_j *целом* $j = 1, 2, \ldots, n$, *что* $(u(x) - P_m(x))_{x_n=0} \in \tilde{B}_p^{\nu}(E_{n-1})$, *где* $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\nu_j = \varkappa \ell_j$, $\varkappa = 1 - \frac{\alpha_n}{p}$, *т.е.* $\nu_j = \frac{1}{\alpha_j}\left(1 - \frac{\alpha_n}{p}\right)$, *и имеет место оценка*

$$\left\| u(x)-P_m(x)\right|_{x_n=0},\ \tilde{B}_p^{\psi}(E_{n-1})\Big\| < C\|u, L_p^{\mu}(E_n)\|^{p},$$

где C не зависит от $u(x)$.

Доказательство. Обозначим $x'=(x_1,\dots,x_{n-1},0)$, полагая $K=1$ при ψ_j нецелом и $K=2$ при ψ_j целом, а также $\bar{\psi}_j=[\psi_j]$ или $\psi_j=\bar{\psi}_j+\beta_j$, $0<\beta_j\le 1$, имеем:

$$\int_0^\infty \frac{\left\|\Delta^K_{he_j}\mathcal{D}_{x_j}^{\bar{\psi}_j} J[f(x)], L_p(E_{n-1})\right\|^p}{h^{1+p\beta_j}}\,dh \le$$

$$\le \sup_{\substack{\varepsilon>0\\N>1}} \int_0^\infty h^{-1-p\beta_j}\left\|\Delta^K_{he_j}\int_\varepsilon^N v^{-|\alpha|-\bar{\psi}_j\alpha_j}\int_{E_{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j}\hat{G}\left(\frac{x'-y}{v^\alpha}\right)f(y)\,dy\,dv\,dx', L_p(E_{n-1})\right\|^p dh \le$$

$$\le \sup_{\substack{\varepsilon>0\\N>1}} \int_0^\infty h^{-1-p\beta_j}\left\|\Delta^K_{he_j}\int_\varepsilon^N v^{-|\alpha|-\bar{\psi}_j\alpha_j}\int_{E_{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j}\hat{G}\left(\frac{x'-y}{v^\alpha}\right)f(y)\,dy\,dv\,dx', L_p(E_{n-1})\right\|^p dh \le$$

$$\le \int_0^\infty h^{-1-p\beta_j}\left|\int_0^{h^\gamma} v^{-|\alpha|-\bar{\psi}_j\alpha_j}\int_{E_{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j}\hat{G}\left(\frac{y}{v^\alpha}\right)\right|\cdot\|f(y+x'), L_p(E_{n-1})\|\,dy\,dx'\,dv\right|^p dh +$$

$$+\int_0^\infty h^{-1-p\beta_j+Kp}\left|\int_{h^\gamma}^{\infty} v^{-|\alpha|-\bar{\psi}_j\alpha_j-K\alpha_j}\int_{E_{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j+K}\hat{G}\left(\frac{y}{v^\alpha}\right)\right|\cdot\|f(y+x'), L_p(E_{n-1})\|\,dy\,dx'\,dv\right|^p dh = J, \quad (12)$$

где $\gamma=\alpha_j^{-1}$.

Введем функцию $\chi(y_n)\in C_0^\infty$, $\operatorname{supp}\chi(y_n)\subset[-1,1]$, $|\chi|\le 1$, $\chi(y_n)\equiv 1$, $y_n\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Тогда

$$\hat{G}\left(\frac{y-x}{v^\alpha}\right)=\hat{G}\left(\frac{y-x}{v^\alpha}\right)\cdot\chi\left(\frac{y_n-x_n}{v^{\alpha_n}}\right)+\hat{G}\left(\frac{y-x}{v^\alpha}\right)\left[1-\chi\left(\frac{y_n-x_n}{v^{\alpha_n}}\right)\right].$$

Обозначим $\hat{G}\left(\frac{y-x}{v^\alpha}\right)\cdot\chi\left(\frac{y_n-x_n}{v^{\alpha_n}}\right)=\hat{G}_1\left(\frac{y-x}{v^\alpha}\right)$ и $\hat{G}\left(\frac{y-x}{v^\alpha}\right)\cdot\left[1-\chi\left(\frac{y_n-x_n}{v^{\alpha_n}}\right)\right]=$ $=\hat{G}_2\left(\frac{y-x}{v^\alpha}\right)$. Учитывая это, перепишем (12):

$$\tilde{J} = \int_0^\infty h^{-1-p\beta_j} \left| \int_0^{h^\gamma} v^{-|\alpha|-\bar{\nu}_j\alpha_j} \int_{E_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{D}^{\bar{\nu}_j} \hat{G}_1\left(\frac{y}{v^\alpha}\right) \right| \cdot \| f(x'+y), L_p(E_{n-1}) \| dy\, dx'\, dv \right|^p dh +$$

$$+ \int_0^\infty h^{-1-p\beta_j} \left| \int_0^{h^\gamma} v^{-|\alpha|-\bar{\nu}_j\alpha_j} \int_{E_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{D}^{\bar{\nu}_j} \hat{G}_2\left(\frac{y}{v^\alpha}\right) \right| \cdot \| f(x'+y), L_p(E_{n-1}) \| dy\, dx'\, dv \right|^p dh +$$

$$+ \int_0^\infty h^{-1-p\beta_j+\kappa p} \left| \int_{h^\gamma}^\infty v^{-|\alpha|-\bar{\nu}_j\alpha_j-\kappa\alpha_j} \int_{E_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{D}^{\bar{\nu}_j+\kappa} \hat{G}_1\left(\frac{y}{v^\alpha}\right) \right| \cdot \| f(x'+y), L_p(E_{n-1}) \| dy\, dx'\, dv \right|^p dh +$$

$$+ \int_0^\infty h^{-1-p\beta_j+\kappa p} \left| \int_{h^\gamma}^\infty v^{-|\alpha|-\bar{\nu}_j\alpha_j-\kappa\alpha_j} \int_{E_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{D}^{\bar{\nu}_j+\kappa} \hat{G}_2\left(\frac{y}{v^\alpha}\right) \right| \cdot \| f(x'+y), L_p(E_{n-1}) \| dy\, dx'\, dv \right|^p dh.$$

Обозначим

$$J_1 = \int_0^\infty h^{-1-p\beta_j} \left| \int_0^{h^\gamma} v^{-|\alpha|-\bar{\nu}_j\alpha_j} \int_{E_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{D}^{\bar{\nu}_j} \hat{G}_1\left(\frac{y}{v^\alpha}\right) \right| \cdot \| f(x'+y), L_p(E_{n-1}) \| dy\, dx'\, dv \right|^p dh +$$

$$+ \int_0^\infty h^{-1-p\beta_j+\kappa p} \left| \int_0^{h^\gamma} v^{-|\alpha|-\bar{\nu}_j\alpha_j-\kappa\alpha_j} \int_{E_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{D}^{\bar{\nu}_j+\kappa} \hat{G}_1\left(\frac{y}{v^\alpha}\right) \right| \cdot \| f(x'+y), L_p(E_{n-1}) \| dy\, dx'\, dv \right|^p dh,$$

$$J_2 = \int_0^\infty h^{-1-p\beta_j} \left| \int_0^{h^\gamma} v^{-|\alpha|-\bar{\nu}_j\alpha_j} \int_{E_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{D}^{\bar{\nu}_j} \hat{G}_2\left(\frac{y}{v^\alpha}\right) \right| \cdot \| f, L_p(E_{n-1}) \| dy\, dx'\, dv \right|^p dh +$$

$$+ \int_0^\infty h^{-1-p\beta_j+\kappa p} \left| \int_{h^\gamma}^\infty v^{-|\alpha|-\bar{\nu}_j\alpha_j-\kappa\alpha_j} \int_{E_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{D}^{\bar{\nu}_j+\kappa} \hat{G}_2\left(\frac{y}{v^\alpha}\right) \right| \times \right.$$

$$\left. \times \| f(x'+y), L_p(E_{n-1}) \| dy\, dx'\, dv \right|^p dh.$$

Используя неравенство Харди, оценим J_1 :

$$J_1 \leqslant c_1 \int_0^\infty h^{p-1-\frac{p\beta_j}{\gamma}-|\alpha|p-\bar{\nu}_j\alpha_j p} \left| \int_{E_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{D}^{\bar{\nu}_j} \hat{G}_1\left(\frac{y'}{h^\alpha}, \frac{y_n}{h^{\alpha_n}}\right) \right| \cdot \| f(x', y_n), L_p(E_{n-1}) dy\, dy_n \right|^p dh +$$

$$+ c_1' \int_0^\infty h^{-1-\frac{p\beta_j}{\gamma}+\frac{\kappa p}{\gamma}+p-|\alpha|p-\bar{\nu}_j\alpha_j p-\kappa\alpha_j p} \left| \int_{E_{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{D}^{\bar{\nu}_j+\kappa} \hat{G}_1\left(\frac{y'}{h^\alpha}, \frac{y_n}{h^{\alpha_n}}\right) \right| \cdot \| f, L_p(E_{n-1}) \| dy\, dy_n \right|^p dh \leqslant$$

используя подстановку $\frac{y'}{h^\alpha} = z$)

$$\leq C_{11}\int\limits_0^\infty h^{\sigma}\left|\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j}\hat{G}_1\left(z,\frac{y_n}{h^{\alpha_n}}\right)\right|\cdot\|f(x',y_n),L_p(E_{n-1})\|dz\,dy_n\right|^p dh+$$

$$+C'_{11}\int\limits_0^\infty h^{\sigma_1}\left|\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j+\kappa}\hat{G}_1\left(z,\frac{y_n}{h^{\alpha_n}}\right)\right|\cdot\|f(x',y_n),L_p(E_{n-1})\|dz\,dy_n\right|^p dh,$$

где $\sigma=p-1-\dfrac{p\beta_j}{\gamma}-\alpha_n p-\bar{\psi}_j\alpha_j p=p-1-\dfrac{p\beta_j}{\gamma}-\alpha_n p-p+\alpha_n+\alpha_j\beta_j p=$

$$=-1-\alpha_j\beta_j p\left(\frac{\alpha_j^{-1}}{\gamma}-1\right)-\alpha_n(p-1)=-1-\alpha_n(p-1),$$

$$\sigma_1=-1-\frac{p\beta_j}{\gamma}+\frac{\kappa p}{\gamma}+p-\alpha_n p-\bar{\psi}_j\alpha_j p-\kappa\alpha_j p=-1-\frac{p\beta_j}{\gamma}+\frac{\kappa p}{\gamma}+p-\alpha_n p-$$

$$-\kappa\alpha_j p-p+\alpha_n+\alpha_j\beta_j p=-1-\alpha_j\beta_j p\left(\frac{\alpha_j^{-1}}{\gamma}-1\right)+\kappa p\alpha_j\left(\frac{\alpha_j^{-1}}{\gamma}-1\right)-\alpha_n(p-1)=$$

$$=-1-\alpha_n(p-1).$$

Далее, имеем

$$\mathcal{J}_1\leq C_{11}\int\limits_0^\infty h^{-1-\alpha_n(p-1)}\left|\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j}\hat{G}_1\left(z,\frac{y_n}{h^{\alpha_n}}\right)\right|\cdot\|f(x',y_n),L_p(E_{n-1})\|dz\,dy_n\right|^p dh+$$

$$+C'_{11}\int\limits_0^\infty h^{-1-\alpha_n(p-1)}\left|\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j+\kappa}\hat{G}_1\left(z,\frac{y_n}{h^{\alpha_n}}\right)\right|\cdot\|f(x',y_n),L_p(E_{n-1})\|dz\,dy_n\right|^p dh\leq$$

(учитывая значение $\hat{G}_1\left(z,\dfrac{y_n}{h^{\alpha_n}}\right)$)

$$\leq C_{11}\int\limits_0^\infty h^{-1-\alpha_n(p-1)}\left|\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{-h^{\alpha_n}}^{h^{\alpha_n}}\left|\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j}\hat{G}_1\left(z,\frac{y_n}{h^{\alpha_n}}\right)\right|\cdot\|f(x',y_n),L_p(E_{n-1})\|dz\,dy_n\right|^p dh+$$

$$+C'_{11}\int\limits_0^\infty h^{-1-\alpha_n(p-1)}\left|\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{-h^{\alpha_n}}^{h^{\alpha_n}}\left|\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j+\kappa}\hat{G}_1\left(z,\frac{y_n}{h^{\alpha_n}}\right)\right|\cdot\|f(x',y_n),L_p(E_{n-1})\|dz\,dy_n\right|^p dh=.$$

Оценим слагаемое $\mathcal{J}_{11}$:

$$J_{11}\leq C_{11}\int_0^\infty h^{-1-\alpha_n(p-1)}\left|\int_{E_{n-1}}\int_{-h^{\alpha_n}}^{h^{\alpha_n}}\left|\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j}\hat{G}_1\left(z,\frac{y_n}{h^{\alpha_n}}\right)\right|\cdot\|f(x',y_n),L_p(E_{n-1})\|dzdy_n\right|^p dh\leq$$

$$\leq C_{11}\int_0^\infty h^{-1-\alpha_n(p-1)}\left|\int_0^{h^{\alpha_n}}\int_{E_{n-1}}\left|\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j}\hat{G}_1\left(z,\frac{y_n}{h^{\alpha_n}}\right)\right|\cdot\|f(x',y_n),L_p(E_{n-1})\|dzdy_n\right|^p dh+$$

$$+C_{11}\int_0^\infty h^{-1-\alpha_n(p-1)}\left|\int_0^{-h^{\alpha_n}}\left|\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j}\hat{G}_1\left(z,\frac{y_n}{h^{\alpha_n}}\right)\right|\cdot\|f(x',y_n),L_p(E_{n-1})\|dzdy_n\right|^p dh\leq$$

(применяя подстановку $h^{\alpha_n}=t$)

$$\leq C_{11}'\int_0^\infty t^{-\frac{1}{\alpha_n}-p+1+\frac{1}{\alpha_n}-1}\left|\int_0^t\int_{E_{n-1}}\left|\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j}\hat{G}_1\left(z,\frac{y_n}{t}\right)\right|\cdot\|f(x',y_n),L_p(E_{n-1})\|dzdy_n\right|^p dt+$$

$$+C_{11}'\int_0^\infty t^{-p}\left|\int_0^{-t}\int_{E_{n-1}}\left|\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j}\hat{G}_1\left(z,\frac{y_n}{t}\right)\right|\cdot\|f(x',y_n),L_p(E_{n-1})\|dzdy_n\right|^p dt.$$

Учитывая оценку на $|\chi|\leq 1$, условие $\chi(0)=1$ и построение функции G , имеем следующую оценку:

$$\left|\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j}\hat{G}\left(z,\frac{y_k}{t}\right)\right|\leq K(z,0)\quad\text{, где } K(z,0)\in L_1(E_{n-1}).$$

Тогда

$$J_{11}\leq C_{11}\int_0^\infty t^{-p}\left|\int_0^t\int_{E_{n-1}}K(z,0)\|f(x',y_n),L_p(E_{n-1})\|dzdy_n\right|^p dt+$$

$$+C_{11}'\int_0^\infty t^{-p}\left|\int_0^t\int_{E_{n-1}}K(z,0)\|f(x',-y_n),L_p(E_{n-1})\|dzdy_n\right|^p dt\leq$$

(используя неравенство Харди)

$$\leq c\int_{-\infty}^\infty\|f(x',t),L_p(E_{n-1})\|^p dt\leq c\|f,L_p(E_n)\|^p.$$

Аналогично оценим слагаемое J_{12} :

$$J_{12}\leq c\int_{-\infty}^\infty\|f(x',t),L_p(E_{n-1})\|^p dt<c\|f,L_p(E_n)\|^p,$$

откуда

$$\mathcal{J}_1 \leq K_1 \| f_0 L_p(E_n) \|^p .$$

Применяя подстановку $h^{\gamma} = t$ и используя неравенство Харди, оценим $\mathcal{J}_2$

$$\mathcal{J}_2 \leq c \int_0^{\infty} t^{\,p-1-\frac{p\beta_j}{\gamma}-|\alpha|p-\bar{\varphi}_j\alpha_j p} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy_n \int_{E_{n-1}} \left| \mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j} \hat{G}_2 \left(\frac{y'}{t^{\alpha}}, \frac{y_n}{t^{\alpha_n}} \right) \right| \cdot \| f, L_p(E_{n-1}) \| dy \right|^p dt +$$

$$+ c \int_0^{\infty} t^{\,p-1-\frac{p\beta_j}{\gamma}+\frac{\kappa p}{\gamma}-|\alpha|p-\bar{\varphi}_j\alpha_j p-\kappa\alpha_j p} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy_n \int_{E_{n-1}} \left| \mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j+\kappa} \hat{G}_2 \left(\frac{y'}{t^{\alpha}}, \frac{y_n}{t^{\alpha_n}} \right) \right| \cdot \| f, L_p(E_{n-1}) \| dy \right|^p dt \leq$$

(применяя подстановку $\frac{y'}{t^{\alpha_n}} = z$ и учитывая, что $\gamma = \alpha_j^{-1}$)

$$\leq C_1 \int_0^{\infty} t^{-1-\alpha_n(p-1)} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy_n \int_{E_{n-1}} \left| \mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j} \hat{G}_2 \left(z, \frac{y_n}{t^{\alpha_n}} \right) \right| \cdot \| f(x', y_n), L_p(E_{n-1}) \| dz \right|^p dt +$$

$$+ \dot{C}_1 \int_0^{\infty} t^{-1-\alpha_n(p-1)} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy_n \int_{E_{n-1}} \left| \mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j+\kappa} \hat{G}_2 \left(z, \frac{y_n}{t^{\alpha_n}} \right) \right| \cdot \| f(x', y_n), L_p(E_{n-1}) \| dz \right|^p dt = \mathcal{J}_{21} + \mathcal{J}_{22} .$$

Так как рассмотрение $\mathcal{J}_{21}$ и $\mathcal{J}_{22}$ аналогично, то ограничимся оценкой слагаемого $\mathcal{J}_{21}$ (подстановка $t^{\alpha_n} = h$):

$$\mathcal{J}_{21} \leq C_2 \int_0^{\infty} h^{-p} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy_n \int_{E_{n-1}} \left| \mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j} \hat{G}_2 \left(z, \frac{y_n}{h} \right) \right| \cdot \| f(x', y_n), L_p(E_{n-1}) \| dz \right|^p dh \leq$$

(используя неравенство Гёльдера)

$$\leq C_2' \int_0^{\infty} h^{-1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy_n \int_{E_{n-1}} \left| \mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j} \hat{G}_2 \left(z, \frac{y_n}{h} \right) \right| \cdot \| f(x', y_n), L_p(E_{n-1}) \|^p dz \right| dh \leq$$

$$\leq C_2'' \int_0^{\infty} h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dy_n \int_{E_{n-1}} \left| \mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j} \hat{G}_2 \left(z, \frac{y_n}{h} \right) \right| \cdot \| f(x', y_n), L_p(E_{n-1}) \|^p dz\, dh \leq$$

(применяя подстановку $\frac{h}{y_n} = \sigma$)

$$\leq K_2 \int_{-\infty}^{\infty} v^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dy_n \int_{E_{n-1}} |\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j} \hat{G}_2(z, \tfrac{1}{v})| \cdot \|f(x', y_n), L_p(E_{n-1})\|^p dz dv \leq$$

$$\leq K_2' \int_{-\infty}^{\infty} v^{-1} \int_{E_{n-1}} |\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j} \hat{G}_2(z, \tfrac{1}{v})| dz dv \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \|f(x', y_n), L_p(E_{n-1})\|^p dy_n \leq$$

(используя подстановку $v = t^{-1}$)

$$\leq K_2'' \int_{-\infty}^{\infty} t^{-1} \int_{E_{n-1}} |\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j} \hat{G}_2(z,t)| dz dt \cdot \|f, L_p(E_n)\|^p \leq$$

(так как $G_2(z,t) = 0$ при $|t| \leq \frac{1}{2}$)

$$\leq K_{21}' \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} t^{-1} \int_{E_{n-1}} |\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j} \hat{G}_2(z,t)| \cdot \|f, L_p(E_n)\|^p dz dt +$$

$$+ K_{21} \int_{-\infty}^{-1/2} t^{-1} \int_{E_{n-1}} |\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j} \hat{G}_2(z,t)| \cdot \|f, L_p(E_n)\|^p dz dt \leq$$

$$\leq C \|f, L_p(E_n)\|^p,$$

так как $\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j} \hat{G}_2(z,t) \equiv \mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j} \hat{G}(z,t)$ при $t > 1$ и, следовательно, суммируема в E_n . Тогда утверждение теоремы следует из полученной оценки и представления (7).

Лемма. *Пусть* f *- локально суммируемая функция и* $f \in \tilde{B}_p^{\varphi}(E_n)$. *Тогда для почти всех* $x \in E_n$ *имеет место представление*

$$f(x) = P_m(x) - \lim_{N \to \infty} \int_1^N v^{-|\alpha|-1} \int_{E_n} \hat{G}_1\left(\frac{x-y}{v^{\alpha}}\right) f(y) dy dv -$$

$$- \int_0^1 v^{-|\alpha|-1} \int_{E_n} \hat{G}_1\left(\frac{x-y}{v^{\alpha}}\right) f(y) dy dv, \tag{13}$$

где $P_m(x)$ *- полином степени* $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $m_j = \bar{\varphi}_j = [\varphi_j]$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $G_1(x)$ *определена в* (9), *а предел понимается по норме* $\tilde{B}_p^{\varphi}(E_n)$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$\mathcal{J}_N[f] = \int_1^N \sigma^{-|\alpha|-1} \int_{E_n} \hat{G}_1\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right) f(y)\,dy\,d\sigma,$$
$$\mathcal{J}_1[f] = \int_0^1 \sigma^{-|\alpha|-1} \int_{E_n} \hat{G}_1\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right) f(y)\,dy\,d\sigma. \tag{14}$$

Из [10] следует, что

$$\mathcal{J}_N[f] = f_N(x) - f_1(x), \qquad \mathcal{J}_1[f] = f_1(x) - f(x),$$

где $f_h(x)$ определена в (8). Тогда

$$-\mathcal{J}_1[f] - \mathcal{J}_N[f] = f(x) - f_N(x). \tag{15}$$

Покажем, что $f_N(x) \longrightarrow P_m(x)$:

$$\| f_N(x), \tilde{B}_p^{\psi}(E_n)\|^p = \int_{E_n} \int_0^{\infty} \frac{|\Delta^{\kappa}_{h\ell_j} \mathcal{D}^{\bar{\psi}_j} f_N(x)|^p}{h^{1+p\beta_j}}\, dx\,dh =$$
$$= \int_{E_n} \left(\left| \int_0^{\infty} \frac{|\Delta^{\kappa}_{h\ell_j} \mathcal{D}^{\bar{\psi}_j} f_N(x)|^p}{h^{1+p\beta_j}}\, dx \right|^{\frac{1}{p}} \right)^p dh \leqslant$$
$$\leqslant \int_{E_n} \left(\left| N^{-|\alpha|} \int_{E_n} \left| G_1\left(\frac{y}{N^{\alpha}}\right)\right| dy \int_0^{\infty} \frac{|\Delta^{\kappa}_{h\ell_j} \mathcal{D}^{\bar{\psi}_j} f(x+y)|^p}{h^{1+p\beta_j}}\, dh \right|^{\frac{1}{p}} \right)^p dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{E_n} \left| N^{-|\alpha|} \int_{E_n} \left| G_1\left(\frac{x-y}{N^{\alpha}}\right)\right| dy \left(\int_0^{\infty} \frac{|\Delta^{\kappa}_{h\ell_j} \mathcal{D}^{\bar{\psi}_j} f(y)}{h^{1+p\beta_j}}\, dh \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{E_n} \left| N^{-|\alpha|} \int_{E_n} \left| G_1\left(\frac{x-y}{N^{\alpha}}\right)\right| \mathcal{J}(y)\,dy \right|^p dx.$$

Так как $\mathcal{J}(y) \in L_p(E_n)$, $1<p<\infty$, то, по лемме 3 из [8], этот интеграл стремится к нулю при $N \to \infty$. Тогда $\lim\limits_{N\to\infty} f_N(x) = 0$ по норме $\tilde{B}_p^{\psi}(E_n')$. Из (15) имеем $\lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{J}_N[f] = -f(x) - \mathcal{J}_1[f]$ по норме $\tilde{B}_p^{\psi}(E_n)$.

Следовательно, существует такой полином $P_m(x)$, где m удовлетворяет условиям леммы, что выполняется (13).

Теорема 2 (обратная). *Пусть на* E_{n-1} *задана локально суммируемая функция* $\varphi \in \tilde{B}_p^{\psi}(E_{n-1})$, $1<p<\infty$, $\psi=(\psi_1,\dots,\psi_n)$. *Определим вектор* $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ *так, что*

$$\psi_j=\alpha_j^{-1}\left(1-\frac{\alpha_n}{p}\right) \tag{16}$$

и $\psi_j=\bar{\psi}_j+\beta_j$, *где* $\bar{\psi}_j=[\psi_j]$, $j=1,2,\dots,n$. *Пусть* $\mu(\xi)$ *- однородный символ, удовлетворяющий условиям* 1)-3). *Тогда существует функция* $U(x)\in L_p^{\mu}(E_n)$ *такая, что* $U(x)\big|_{x_n=0}=\varphi$ *и* $\|U,L_p^{\mu}(E_n)\|\leq$ $\leq C\|\varphi,\tilde{B}_p^{\psi}(E_{n-1})\|$, *где* C *не зависит от* $U(x)$ *и* $\varphi(x)$.

Для простоты доказательства дополнительно предположим, что 1) $[\psi_j]$ - четное и 2) α_n - достаточно мало. Теорема верна и в общем случае, но доказательство становится громоздким.

Доказательство. В силу полноты пространств $\tilde{B}_p^{\psi}(E_{n-1})$ и $L_p^{\mu}(E_n)$ достаточно построить последовательность функций $U_N(x)\in L_p^{\mu}(E_n)$, для которых выполняется

$$\|U_N(x)\big|_{x_n=0}-\varphi(x),\tilde{B}_p^{\psi}(E_{n-1})\|\to 0 \text{ при } N\to\infty \tag{17}$$

и $\|U_N(x),L_p^{\mu}(E_n)\|\leq C\|\varphi(x),\tilde{B}_p^{\psi}(E_{n-1})\|$, где C не зависит от N.

Введем обозначения: пусть $G_2(t)\in C_0^{\infty}(E_1)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_2(\xi_n)d\xi_n=1$,

$$\hat{G}_2(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ix_n\xi_n}G_2(\xi_n)d\xi_n,$$

$$G_0(\xi)=\exp-\left[\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^{4N}(\alpha_j4N)^{-1}\right],\quad G_1(\xi)=G_0(\xi)\cdot\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^{4N},$$

$$\hat{G}_1(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_{E_{n-1}}e^{-ix\xi}G_1(\xi)d\xi.$$

Пусть функция φ имеет представление (13). Рассмотрим последовательность функций

$$\mathcal{U}_N(x) = P_m(x) - \int_0^N v^{-|\alpha|-1} dv \int_{E_{n-1}} \hat{G}_1\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right) \hat{G}_2\left(\frac{x_n}{v^{\alpha_n}}\right) \varphi(y)dy,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ удовлетворяет (16), $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j$, $P_m(x)$ - полином от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ степени $m_j = [\gamma_j]$. Докажем, что предел последовательности $\mathcal{U}_N(x)$ удовлетворяет условиям (17). Достаточно показать это для последовательности $\mathcal{U}_{N\varepsilon}(x)$. Используя лемму, имеем

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{U}_N(x)\Big|_{x_n=0} = P_m(x) - \lim_{N\to\infty} \int_0^N v^{-|\alpha|-1} dv \int_{E_{n-1}} \hat{G}_1\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right) \cdot \varphi(y)dy = \varphi(x).$$

Имеем также

$$\|\mathcal{U}_{N\varepsilon}(x), L_p^\mu(E_n)\| = \left\|F^{-1}\mu(i\xi, i\xi_n)F \int_\varepsilon^N v^{-|\alpha|-1} dv \int_{E_{n-1}} \hat{G}_1\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right) \hat{G}_2\left(\frac{x_n}{v^{\alpha_n}}\right) \varphi(y)dy, L_p(E_n)\right\| =$$

(используя преобразование Фурье свертки)

$$= \left\|F^{-1}\mu(i\xi_j, i\xi_n) \int_\varepsilon^N v^{\alpha_n-1} G_1(v^\alpha \xi) G_2(v^{\alpha_n} \xi_n) \hat{\varphi}(\xi) dv, L_p(E_n)\right\| =$$

$$= \left\|F^{-1} \int_\varepsilon^N v^{-2+\alpha_n} \mu(i\xi v^\alpha, i\xi_n v^{\alpha_n}) G_1(v^\alpha \xi) G_2(v^{\alpha_n}\xi_n) \hat{\varphi}(\xi) dv, L_p(E_n)\right\| =$$

$$= \left\| \int_\varepsilon^N v^{-2-|\alpha|} dv \int_{E_{n-1}} \hat{G}\left(\frac{x-y}{v^\alpha}, \frac{x_n}{v^{\alpha_n}}\right) \varphi(y)dy, L_p(E_n)\right\|,$$

где $G(x) = \mu G_1(x) \cdot G_2(x)$.

Положим $\gamma_j = \bar{\gamma}_j + \beta_j$, $\bar{\gamma}_j$ - четное, $0 < \beta_j \le 1$. Имеем $G(\xi) = \mu(\xi, \xi_n) G_1(\xi) \times G_2(\xi_n)$ (используя вид $G_1(\xi)$) $= \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^{\bar{\gamma}_j} G_j(\xi)$, где $G_j(\xi) = G_2(\xi_n)\mu(\xi, \xi_n)\xi_j^{4N-\bar{\gamma}_j} \cdot exp(-|\xi|^{4N} \cdot (\alpha \cdot 4N)^{-1})$. Тогда $G_j(\xi)$- четная по ξ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}_j(x, x_n) dx = 0. \quad (18)$$

При доказательстве теоремы будет использоваться следующая оценка:

$$\left|\hat{G}_j\left(\frac{y_j}{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}h^{\alpha_j}}, \frac{1}{h^{\alpha_n}}\right)\right| \leqslant \left|\hat{G}_j\left(\frac{y_j}{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}h^{\alpha_j}}, \frac{1}{h^{\alpha_n}}\right)\right|^{1+\varepsilon} \times$$

$$\times \left|\hat{G}_j\left(\frac{y_j}{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}h^{\alpha_j}}, \frac{1}{h^{\alpha_n}}\right)\right|^{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \left|\left(\frac{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}h^{\alpha_j}}{y_j}\right)^K \cdot \left(\frac{y_j}{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}h^{\alpha_j}}\right)\right|^K \times$$

$$\times \int_{E_n} e^{\frac{iy_j\xi}{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}h^{\alpha_j}}} G_j(\xi)d\xi \leqslant \left|\left(\frac{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}h^{\alpha_j}}{y_j}\right)^K \int_{E_n} \frac{d^K}{d\xi_j^K}\left(e^{\frac{iy_j\xi}{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}h^{\alpha_j}}}\right) e^{iy'\xi'} G_j(\xi')d\xi'\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left(\frac{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}h^{\alpha_j}}{y_j}\right)^K\right| \int_{E_n} \left|\mathcal{D}_{\xi_j}^K G_j(\xi)\right| d\xi \leqslant C\left(\frac{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}h^{\alpha_j}}{y_j}\right)^K.$$

Из представления G_j следует, что $\mathcal{D}_{\xi_j}^K G_j$ суммируема. Тогда

$$\left|\hat{G}_j\left(\frac{y_j}{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}h^{\alpha_j}}, \frac{1}{h^{\alpha_n}}\right)\right| \leqslant C\left(\frac{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}h^{\alpha_j}}{y_j}\right)^{K(1-\varepsilon)}.$$

Имеем $\left\|U_{N\varepsilon}(x), L_p^{\mu}(E_n)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n-1}\int_\varepsilon^N v^{-2-|\alpha|+\bar{\varphi}_j\alpha_j}dv \int_{E_{n-1}} \hat{G}_j\left(\frac{x-y}{v^{\alpha}}, \frac{x_n}{v^{\alpha_n}}\right)\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j}\varphi(y)dy, L_p(E_n)\right\| =$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\left\|\int_\varepsilon^N v^{-2-|\alpha|+\bar{\varphi}_j\alpha_j}dv\, \frac{1}{2}\int_{E_{n-1}}\left[\hat{G}_j\left(\frac{y'}{v^{\alpha}}, \frac{y_j}{v^{\alpha_j}}, \frac{x_n}{v^{\alpha_n}}\right)\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j}\varphi(x'+y', x_j+y_j) +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\hat{G}_j\left(\frac{y'}{v^{\alpha}}; \frac{-y_j}{v^{\alpha_j}}, \frac{x_n}{v^{\alpha_n}}\right)\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j}\varphi(x'+y', x_j-y_j)\right]dy', L_p(E_n)\right\| =$$

(учитывая четность $G_j(\xi)$ и (18))

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left\|\int_\varepsilon^N v^{-2-|\alpha|+\bar{\varphi}_j\alpha_j}dv \int_{E_{n-1}} \hat{G}_j\left(\frac{y'}{v^{\alpha}}, \frac{y_j}{v^{\alpha_j}}, \frac{x_n}{v^{\alpha_n}}\right)\left[\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j}\varphi(x'+y', x_j+y_j)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathcal{D}^{\bar{\varphi}_j}\varphi(x'+y', x_j-y_j)\right]dy', L_p(E_n)\right\| = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left\|\int_\varepsilon^N v^{-2-|\alpha|+\bar{\varphi}_j\alpha_j}dv \times\right.$$

$$\times \int\limits_{E_{n-1}} \hat{G}_j\left(\frac{y'}{\upsilon^{\alpha}}, \frac{y_j}{\upsilon^{\alpha_j}}, \frac{x_n}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\Big[\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j}\varphi(x'+y', x_j+y_j) - 2\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j}\varphi(x'+y', x_j) +$$

$$+ \mathcal{D}^{\bar{\psi}_j}\varphi(x'+y', x_j-y_j)\Big]dy', L_p(E_n)\Big\| \leqslant$$

(используя неравенство Гёльдера)

$$\leqslant C\sum_{j=1}^{n-1}\Big\|\int\limits_{\varepsilon}^{N}\upsilon^{-2-|\alpha|+\bar{\psi}_j\alpha_j}d\upsilon\left(\int\limits_{E_{n-1}}\left|\hat{G}_j\left(\frac{y'}{\upsilon^{\alpha}}, \frac{y_j}{\upsilon^{\alpha_j}}, \frac{x_n}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\right|dy'\right)^{\frac{1}{p'}} \times$$

$$\times\left[\int\limits_{E_{n-1}}\left|\hat{G}_j\left(\frac{y'}{\upsilon^{\alpha}}, \frac{y_j}{\upsilon^{\alpha_j}}, \frac{x_n}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\right|\cdot\left|\Delta^2_{y_j}\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j}\varphi(x_j, y'-x')\right|^p dy'\right]^{\frac{1}{p}}, L_p(E_n)\Big\| \leqslant$$

(обозначая $\left(\int\limits_{E_{n-1}}\left|\hat{G}_j\left(y', \frac{x_n}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\right|dy'\right)^{\frac{1}{p'}} = \theta\left(\frac{x_n}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)$)

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n-1}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_n\left[\int\limits_{\varepsilon}^{N}\upsilon^{-2-|\alpha|+\bar{\psi}_j\alpha_j}\theta\left(\frac{x_n}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\cdot\upsilon^{\frac{|\alpha|}{p'}}d\upsilon \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\int\limits_{E_{n-1}}dx_j\int\limits_{E_{n-1}}\left|\Delta^2_{y_j}\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j}\varphi(x_j, y'-x')\right|^p\cdot\left|\hat{G}\left(\frac{y'}{\upsilon^{\alpha}}, \frac{y_j}{\upsilon^{\alpha_j}}, \frac{x_n}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\right|dy'\right]^{\frac{1}{p}}\right]^p\right]^{\frac{1}{p}} =$$

(обозначая $G_1 = \int\limits_{E_{n-2}}\hat{G}\left(y', \frac{y_j}{\upsilon^{\alpha_j}}, \frac{x_n}{\upsilon^{2n}}\right)dy'$)

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_n\left[\int\limits_{\varepsilon}^{N}\upsilon^{-2+\bar{\psi}_j\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}}\theta\left(\frac{x_n}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)d\upsilon\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}dy_j\left|G_1\left(\frac{y_j}{\upsilon^{\alpha_j}}\right)\right|\cdot\|\Delta^2_{y_j}\mathcal{D}^{\bar{\psi}_j}\varphi, L_p(E_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p\right]^{\frac{1}{p}} =$$

(используя подстановку $\upsilon\cdot x_n^{-\frac{1}{\alpha_n}} = h$)

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_n\left[\int_0^{\infty} h^{-2+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}}\cdot|x_n|^{\alpha_n^{-1}\left(-2+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}\right)+\alpha_n^{-1}}\cdot\theta\left(\frac{1}{h^{\alpha_n}}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}dy_j\left|\hat{G}\left(\frac{y_j}{x_n^{\alpha_j\alpha_n^{-1}}\cdot h^{\alpha_j}},\frac{1}{h^{\alpha_n}}\right)\right|\cdot\|\Delta_{y_j}^2\mathcal{D}^{\bar{q}_j}\varphi,L_p(E_{n-1})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}dh\right]^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\left[\int_0^{\infty}x_n^{\left(-1+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}\right)\frac{p}{\alpha_n}}\left[\int_0^{\infty}h^{-2+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}}\theta\left(\frac{1}{h^{\alpha_n}}\right)\cdot\left(\int_0^{x_n^{j}}\|\Delta_{y_j}^2\mathcal{D}^{\bar{q}_j}\varphi L_p\|^p dy_j\right)^{\frac{1}{p}}dh\right]^p dx_n\right]^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^{\infty}x_n^{(1+\varepsilon)\alpha_j\alpha_n^{-1}+\left(-1+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}\right)\frac{p}{\alpha_n}}\left[\int_0^{\infty}h^{-2+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}+\frac{(1+\varepsilon)\alpha_j}{p}}\cdot\theta\left(\frac{1}{h^{\alpha_n}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int_{x_n^j}^{\infty}\frac{1}{y_j^{1+\varepsilon}}\cdot\|\Delta_{y_j}^2\mathcal{D}^{\bar{q}_j}\varphi,L_p(E_{n-1})\|^p dy_j\right)^{\frac{1}{p}}dh\right]^p dx_n=\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2.$$

Считая, что ε - достаточно малое положительное число, оценим $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$.

Так как $\alpha_j\bar{q}_j<1$, то $\int_0^{\infty}h^{-2+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}}\cdot\theta\left(\frac{1}{h^{\alpha_n}}\right)dh<\infty$, и, в силу определения функции φ, имеем

$$\mathcal{I}_1\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\left[\int_0^{\infty}x_n^{\left(-1+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}\right)\cdot\frac{p}{\alpha_n}}\left[\int_0^{x_n^{j}}\|\Delta_{y_j}^2\mathcal{D}^{\bar{q}_j}\varphi,L_p(E_{n-1})\|^p dy_j\right]dx_n\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

(применяя подстановку $x_n^{j}=v$)

$$\leqslant c\sum_{j=1}^{n-1}\left(\int_0^{\infty}v^{\frac{1}{j}-1}\cdot v^{\frac{1}{j}\left(-1+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}\right)\frac{p}{\alpha_n}}\int_0^{v}\|\Delta_{y_j}^2\mathcal{D}^{\bar{q}_j}\varphi,L_p(E_{n-1})\|^p dy_j dv\right)^{\frac{1}{p}}.$$

При целом q_j получим

$$\left(-1+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}\right)\frac{p}{\alpha_n}=\left(-1+(q_j-1)\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}\right)\frac{p}{\alpha_n}=$$

$$=\left(-1-\alpha_j+1-\frac{\alpha_n}{p}-\frac{\alpha_j}{p}\right)\frac{p}{\alpha_n}=\left(-\alpha_j\frac{p}{\alpha_n}-\frac{\alpha_j}{\alpha_n}-1\right)=-1-\frac{\alpha_j}{\alpha_n}(p+1)<-1.$$

При нецелом q_j имеем

$$\left(-1-\bar{q}_j\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}\right)\frac{p}{\alpha_n}=\left(-1+(q_j-1)\alpha_j-\frac{\alpha_j}{p}\right)\frac{p}{\alpha_n}+\frac{\beta_j\alpha_j p}{\alpha_n}=(\beta_j<1)=$$

$$= -1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_n} - \frac{\alpha_j}{\alpha_n} p + \frac{\alpha_j p}{\alpha_n} = -1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_n} < -1.$$

Тогда

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\left(-1 + \bar{q}_j \alpha_j - \frac{\alpha_j}{p}\right)\frac{p}{\alpha_n} < 0. \tag{19}$$

Интегрируя по частям, имеем

$$J_1 \leqslant \left(\int_0^\infty v^{\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\left(\bar{q}_j \alpha_j - \frac{\alpha_j}{p}\right)\frac{p}{\alpha_n}} \| \Delta_v^2 \mathcal{D}^{\bar{q}_j} \varphi, L_p(E_{n-1}) \|^p dv \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Полагая $\gamma = \frac{\alpha_j}{\alpha_n}$, получаем

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\left(-1 + \bar{q}_j \alpha_j - \frac{\alpha_j}{p}\right)\frac{p}{\alpha_n} = -1 - p\beta_j,$$

откуда и следует, что

$$J_1 \leqslant c_1 \| u, \tilde{B}_p^q (E_{n-1}) \|^p. \tag{20}$$

Аналогично оценим J_2 :

$$J_2 \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \left(\int_0^\infty x_n^{\kappa\alpha_j\alpha_n^{-1} + (1 - \bar{q}_j\alpha_j - \frac{1}{p}\alpha_j)\cdot\frac{p}{\alpha_n}} \left[\int_0^\infty h^{-2-\bar{q}_j\alpha_j - \frac{1}{p}\alpha_j + \frac{\kappa\alpha_j}{p}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, \theta\left(\frac{1}{h^{\alpha_n}}\right) \cdot \left(\int_{x_n^j}^\infty y_j^{-\kappa} \| \Delta_{y_j}^2 \mathcal{D}^{\bar{q}_j} \varphi, L_p(E_{n-1}) \|^p dy_j \right)^{\frac{1}{p}} dh \right]^p dx_n \right),$$

где $\kappa = 1 + \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и удовлетворяет оценке $\varepsilon > p\beta_j + \delta$, где $\delta > 0$ - достаточно малое число. Имеем $\int_0^\infty h^{-2+\bar{q}_j\alpha_j + \frac{\varepsilon}{p}\alpha_j} \theta\left(\frac{1}{h^{\alpha_n}}\right) dh < \infty$, так как

$$-1 + \bar{q}_j \alpha_j + \frac{\varepsilon}{p}\alpha_j = -\frac{\alpha_n}{p} - \beta_j \alpha_j + \frac{\varepsilon}{p}\alpha_j = -\frac{\alpha_n}{p} + \frac{\alpha_j}{p}(\varepsilon - p\beta_j) < 0.$$

Далее,

$$J_2 \leq \sum_{j=1}^{n-1}\left[\int_0^\infty x_n^{\kappa\alpha_j\alpha_n^{-1}+\left(-1+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{1}{p}\alpha_j\right)\frac{p}{\alpha_n}}\left(\int_{x_n^\gamma}^\infty y_j^{-\kappa}\left|\Delta^2_{y_j}\mathcal{D}^{\bar{q}_j}\varphi, L_p(E_{n-1})\right|^p dy_j\right)dx_n\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

(используя подстановку $x_n^\gamma = v$)

$$\leq C\sum_{j=1}^{n-1}\left[\int_0^\infty v^{\frac{1}{\gamma}-1+\left[\frac{\kappa\alpha_j}{\gamma\alpha_n}+\left(-1+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{1}{p}\alpha_j\right)\frac{p}{\alpha_n\gamma}\right]}\int_v^\infty y_j^{-\kappa}\left|\Delta^2_{y_j}\mathcal{D}^{\bar{q}_j}\varphi, L_p(E_{n-1})\right|^p dy_j\,dv\right]^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times\ \kappa\alpha_j\alpha_n^{-1}+1+\left(-1+(q_j-\beta_j)\alpha_j-\frac{1}{p}\alpha_j\right)\frac{p}{\alpha_n} = \kappa\alpha_j\alpha_n^{-1}+1-\frac{p}{\alpha_n}+$$

$$+\left(1-\frac{\alpha_n}{p}\right)\frac{p}{\alpha_n}-\frac{\beta_j\alpha_j p}{\alpha_n}-\frac{\alpha_j}{\alpha_n} = (1+\varepsilon)\frac{\alpha_j}{\alpha_n}+1-\frac{p}{\alpha_n}+\frac{p}{\alpha_n}-1-\frac{\alpha_j\beta_j p}{\alpha_n}-\frac{\alpha_j}{\alpha_n} =$$

$$= \frac{\varepsilon\alpha_j}{\alpha_n}-p\beta_j\frac{\alpha_j}{\alpha_n} = \frac{\alpha_j}{\alpha_n}(\varepsilon-p\beta_j) > 0 \qquad \text{(поскольку } \varepsilon = p\beta_j+\delta \text{).}$$

Интегрируя последнее выражение по частям, имеем:

$$J_2 \leq C_2\sum_{j=1}^{n-1}\left[\int_0^\infty v^{-\kappa+\frac{1}{\gamma}+\frac{\kappa\alpha_j}{\gamma\alpha_n}+\left(-1+\bar{q}_j\alpha_j-\frac{1}{p}\alpha_j\right)\frac{p}{\alpha_n\gamma}}\left|\Delta^2_v\mathcal{D}^{\bar{q}_j}\varphi, L_p(E_{n-1})\right|^p dv\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

(учитывая условие $\gamma = \frac{\alpha_j}{\alpha_n}$)

$$\leq C_2\sum_{j=1}^{n-1}\left[\int_0^\infty v^{-1-p\beta_j}\left|\Delta^2_v\mathcal{D}^{\bar{q}_j}\varphi, L_p(E_{n-1})\right|^p dv\right]^{\frac{1}{p}} \leq C\left|\varphi, \tilde{B}^q_p(E_{n-1})\right|,$$

откуда $\left|U_{N\varepsilon}, L^\mu_p(E_n)\right| \leq C\left|\varphi, \tilde{B}^q_p(E_{n-1})\right|$. Теорема доказана.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974.- 808 с.
2. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.-М.: Наука, 1969.-455 с.
3. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.-М.: Наука, 1975.-480 с.
4. Кудрявцев Л.Д. О следах функции многих переменных и полях направлений,

регулярных в бесконечности для оператора Лапласа.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1972, т.112, с.256-270.

5. Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^{\ell}(E_n)$.-Мат.сб., 1963, т.60, № 3, с.325-353.

6. Лизоркин П.И. Поведение функций из лиувиллевских классов на бесконечности.- Тр.Мат.ин-та СССР, 1979, т.150, с.3-318.

7. Успенский С.В. О дифференциальных свойствах решений одного класса псевдодифференциальных уравнений на бесконечности.- Сиб.мат.журн., 1972, т.13, № 3, с.665-678.

8. Успенский С.В. О представлении функций, определяемых общим классом гипоэллиптических операторов.- Тр.Мат.ин-та СССР, 1972, т.117, с.292-299.

9. Успенский С.В., Чистяков Б.Н. О выходе на полином решений одного класса псевдодифференциальных уравнений при стремлении $|x| \to \infty$.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. (Труды семинара С.Л. Соболева), 1979, № 1, с .119-135.

10. Хамаев Е.А. О дифференциальных свойствах функций, принадлежащих пространству $L_p^{\mu}(E_n)$.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. (Труды семинара С.Л. Соболева), 1979, № 1, с.136-153.

11. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье.- М.: Огиз, 1948.-480 с.