УДК 513.88

О ПЛОТНОСТИ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ В КЛАССЕ $L^{0(1)}_{p,a}(E_n)$

Е.Б. Шалбаев (Алма-Ата)

Пусть E_n $(n \geq 2)$ – n-мерное евклидово пространство.

Функцию $b(x)$ назовем весом на E_n, если для любого компакта $K \subset E_n$ имеет место

$$0 < \inf_{x \in K} b(x) \leq \sup_{x \in K} b(x) < +\infty,$$

и полувесом, если $b(x) \geq 0$ для любого $x \in E_n$.

Введем класс функций $L^{0(1)}_{p,a}(E_n)$.

Обозначим через $a = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$ вектор, компоненты которого весовые функции;

$$b_{min}(x) = \min_{1 \leq i \leq n} r^{n-1} a_i(x),$$

и через Γ - множество $\gamma \in 6$, для которых

$$\int_1^\infty b_{min}^{\frac{1}{1-p}}(r, \gamma)\, dr < +\infty .$$

Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу $L^{0(1)}_{p,a}(E_n)$, если она имеет все обобщенные в смысле С.Л. Соболева производные первого порядка и выполнены следующие условия:

1. $\sum_{i=1}^n \left\| a_i^{\frac{1}{p}}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_p(E_n)} < +\infty$;
2. $\lim_{r \to +\infty} u(r, \gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma.$

В работе [1] установлена плотность финитных бесконечно дифференцируемых функций в $L^{0(1)}_{p,a}(E_n)$ при $a = (1, \ldots, 1)$.

В данной работе устанавливается плотность финитных бесконечно дифференцируемых функций в случае, когда $a_i(x)$ могут быть различными и могут зависеть от y при любых τ.

Исследование проводится по методике, разработанной в работе [1].

Основным аппаратом в наших построениях является одно неравенство, содержащее параметр. Оно усиливает известное неравенство Харди и его обобщения.

Рассмотрим на промежутке $(d,c)\subset\overline{R},\ d<c$, набор весовых функций

$$\{b_\alpha(\tau)\}_{\alpha\in A},$$

где A - непустое множество индексов.

Полагаем, по определению,

$$b_{min}(\tau)=\inf_{\alpha\in A}\{b_\alpha(\tau)\},\quad b_{max}(\tau)=\sup_{\alpha\in A}\{b_\alpha(\tau)\}.$$

Пусть $b_d(\tau)$ и $b_c(\tau)$ - весовые функции, удовлетворяющие условиям:

$$b_d(\tau)\leq b_{min}(\tau),\quad b_c(\tau)\leq b_{max}(\tau)\qquad \forall\tau\in(d,c).$$

Введем обозначения:

$$B_d(\tau)=b_d^{\frac{1}{1-p}}(\tau);\quad B_d^*(\tau)=\int_d^\tau B_d(t)dt;$$

$$B_c(\tau)=b_c^{\frac{1}{1-p}}(\tau);\quad B_c^*(\tau)=\int_\tau^c B_c(t)dt.$$

Предположим, что $\theta(\tau)$ - полувес на (d,c) и выполнены следующие условия:

1) $\displaystyle\int_d^\tau \theta(t)dt<+\infty \qquad \forall\tau\in(d,c),$

2) $\displaystyle\int_d^c \theta(\tau)d\tau>0;$

3) $B_d^*(\tau)<+\infty \qquad \forall\tau\in(d,c).$

Полагаем, по определению,

$$g_d=2^{1-p}\sup_{\tau\in(d,c)}\frac{\int_d^\tau\theta(t)dt}{max\left(1;\int_d^c\theta(t)(B_d^*(t))^{p-1}dt\right)},\quad B_d^{\circledast}=\int_d^c B_d(\tau)d\tau.$$

Обозначим через $H_{p,b,\theta}$ совокупность локально абсолютно непрерывных на (d,c) вещественных функций $u(\tau)$, имеющих конечную норму

$$h^p_{p,b,\theta}(u)=\int_d^c \theta(\tau)|u(\tau)|^p d\tau+\int_d^c b_{min}(\tau)|u'(\tau)|^p d\tau$$

и в случае, когда $\int_d^c b_{min}^{\frac{1}{1-p}}(\tau)d\tau<+\infty$, удовлетворяющих условию $u(c)=0$.

Для любой $u\in H_{p,b,\theta}$ имеет место неравенство (см.[2])

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\int_d^c b_c(\tau)\left(\frac{B_c(\tau)}{B_c^*(\tau)}\right)^p|u(\tau)|^p d\tau\le\int_d^c b_c(\tau)|u'(\tau)|^p d\tau. \tag{1}$$

Используя неравенство (1) и неравенство Гёльдера, получаем

$$g_d^{\frac{1}{p}}|u(a)|\le h_{p,b,\theta}(u). \tag{2}$$

Пусть $\mu(\tau)$ - полувес на (d,c), удовлетворяющий неравенствам:

$$2^p\mu(\tau)\le\left(\frac{p-1}{p}\right)^p b_d(\tau)\left(\frac{B_d(\tau)}{B_d^*(\tau)}\right)^p\qquad\forall\tau\in(d,c);$$

$$2^p\int_d^c\mu(\tau)d\tau\le g_d.$$

В силу неравенств (2) и (1) с заменой d на c, получаем следующее неравенство:

$$\int_d^c\mu(\tau)|u(\tau)|^p d\tau\le h^p_{p,b,\theta}(u). \tag{3}$$

В качестве $\mu(\tau)$ выберем функцию

$$\mu(\tau)=2^{-p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\min\left(1;\ \frac{p^p g_d}{(p-1)^{p-1}\left(1-\frac{1}{(1+B_d^{\circledast})^{p-1}}\right)}\right)\cdot\frac{B_d(\tau)}{(1+B_d^*(\tau))^p}.$$

Положим также, по определению,

$$\tau(\tau)=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p}\left(\frac{b_d(\tau)}{b_{max}(\tau)}\right)\left(\frac{B_d(\tau)}{B^*(\tau)}\right)^{p}+\right.$$

$$\left.+2^{-p}\frac{b_d(\tau)}{b_{max}(\tau)}\left(\frac{B_d(\tau)}{1+B_d^*(\tau)}\right)^{p}\cdot\min\left(1;\ \frac{p^p q_d}{(p-1)^{p-1}\left(1-\frac{1}{(1+B_d^{\circledast})^{p-1}}\right)}\right)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда,используя неравенства (1), (3), получаем неравенство, нужное нам в дальнейшем

$$\int_d^c b_{max}(\tau)\,\tau^p(\tau)|u(\tau)|^p d\tau\leqslant h^p_{p,b,\theta}(u). \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда $d>-\infty$, а весовые функции зависят от параметра λ, пробегающего непустое множество Λ.

Пусть $\delta\in(d,c)$ и $\theta(\tau)$ - характеристическая функция интервала (d,δ),

$$\inf_{\substack{\tau\in(d,\delta)\\ \lambda\in\Lambda}} b_d(\tau,\lambda)>0. \tag{5}$$

Введем число

$$\varepsilon^*=2^{\frac{1-p}{p}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p}\min\left(1;2^{-p}\min\left(1;\ \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}\right.\right.\right.\times$$

$$\left.\left.\left.\times\inf_{\lambda\in\Lambda}\frac{q_d(\lambda)}{\left(1-\frac{1}{(1+B_d^*(\tau,\lambda))^{p-1}}\right)}\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Учитывая (5), можно показать, что $\varepsilon^*>0$.

Полагаем, по определению,

$$\tau_0(\tau,\lambda)=\frac{b_d^{\frac{1}{p}}(\tau,\lambda)B_d(\tau,\lambda)}{b_{max}^{\frac{1}{p}}(\tau,\lambda)B^*(\tau,\lambda)}+\frac{b_d^{\frac{1}{p}}(\tau,\lambda)B_d(\tau,\lambda)}{b_{max}^{\frac{1}{p}}(\tau,\lambda)\left(1+B_d^*(\tau,\lambda)\right)}. \tag{6}$$

Тогда из неравенства (4) следует неравенство:

$$\left(\int\limits_{d}^{0} b_{max}(\tau,\lambda)\,\tau_0^{p}(\tau,\lambda)\,|u(\tau)|^{p}d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\varepsilon^{*}}h_{p,b,\theta}(u), \tag{7}$$

где ε^{*} не зависит от λ .

Итак, требуемое неравенство установлено.

Пусть $u(x)\in \overset{o(1)}{L}_{p,\alpha}(E_n)$, $d=1$,

$$c=+\infty\ ;\quad \mathcal{J}=\{1,2,\ldots,n\}\ ;$$

$$b_i(x)=\tau^{n-1}a_i(x),\quad i=1,2,\ldots,n,$$

$\tau_0(x)$ построена исходя из совокупности $\{b_i(x)\}$ по формуле (6). Тогда имеет место

Теорема. *Пусть для почти всех $\gamma\in\sigma$ и достаточно больших τ выполнена оценка*

$$\tau_0(\tau,\gamma)\geq\frac{c}{\tau\ln e\tau},\quad c=const,\ c>0. \tag{8}$$

Тогда финитные бесконечно дифференцируемые функции образуют плотное множество в $\overset{o(1)}{L}_{p,\alpha}(E_n)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно ограничиться бесконечно дифференцируемыми функциями, которые тождественно равны нулю при $\tau<3$ (см [1]). Так как $u(x)\in\overset{o(1)}{L}_{p,\alpha}(E_n)$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\sigma}\int\limits_{0}^{\infty} b_i(\tau,\gamma)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p}d\tau d\sigma<\infty$$

и выполнена оценка (7) с $b_d=b_{min}(\tau,\gamma)$.

Пусть

$$\psi_\eta(\tau)=\psi\left(\frac{\ln e\tau}{\eta}\right),\quad \psi(t)=\begin{cases}1\ ,\ t<\frac{1}{2}\,,\\ 0\ ,\ t>1\ .\end{cases}$$

Нетрудно видеть (см.[1]), что

$$\left|\frac{d\psi_\eta(\tau)}{d\tau}\right|\leq\frac{K}{\tau\ln e\tau}\ .$$

Для доказательства теоремы достаточно установить, что для любого $i=1,2,\dots,n$ выполняется

$$\lim_{\eta\to\infty}\int_{\sigma}\int_{0}^{\infty} b_i(r,y)\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u-u\psi_\eta\right)\right|^p dr\,d\sigma = 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u-u\psi_\eta\right)=\left(1-\psi_\eta\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial\psi_\eta}{\partial x_i};$$

$$\lim_{\eta\to\infty}\int_{\sigma}\int_{0}^{\infty} b_i(r,y)\left|1-\psi_\eta\right|^p\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p d\sigma\,dr\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\eta\to\infty}\max\left|1-\psi_\eta\right|^p\int_{\sigma}\int_{0}^{\infty} b_i(r,y)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p d\sigma\,dr=0;$$

$$\lim_{\eta\to\infty}\int_{\sigma}\int_{0}^{\infty} b_i(r,y)\left|\frac{\partial\psi_\eta}{\partial x_i}\right|^p|u|^p d\sigma\,dr\leqslant$$

(учитывая последовательно оценки (7) и (8), получаем)

$$\leqslant\lim_{\eta\to\infty}\int_{\sigma}\int_{e^{\frac{1}{2}\eta}}^{\infty} b_{max}(r,y)|u|^p\cdot\frac{1}{r^p\ln^p er}\,d\sigma\,dr\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\eta\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{\sigma}\int_{e^{\frac{1}{2}\eta}}^{\infty} b_{min}(r,y)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p d\sigma\,dr=0.$$

Теорема доказана.

Приведем примеры совокупностей $\{b_i(x)\}$, для которых условие (8) выполнено.

Пример 1. Пусть $d=1$, $c=+\infty$, $b_i(r,y)=r^{\varkappa(y)}$, $i=1,\dots,n$, где $\varkappa:\sigma\to R$ - произвольная функция. Можно показать, что

$$r_0(r,y)\geqslant\frac{1}{r\ln er}.$$

Пример 2. Пусть $d=1$, $c=+\infty$,

$$b_i(r,y)=r^{\varkappa(y)}\varphi_i(r,y),$$

где

$$\inf_{\substack{r\in(1,\delta)\\ y\in\sigma}} \varphi_i(r,y) > 0\,, \quad \sup_{\substack{r\in(1,\delta)\\ y\in\sigma}} \varphi_i(r,y) < +\infty \quad \forall\delta\in(1,\infty),$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\; r\ln er \sup_{y\in\sigma} \frac{|\varphi_i'(r,y)|}{\varphi_i(r,y)} < \rho - 1,$$

$$\sup_{y\in\sigma} |x(y)| < +\infty, \qquad i=1,2,\dots,n.$$

Можно показать, что

$$\inf_{\substack{r\in(1,\infty)\\ y\in\sigma}} \tau_0(r,y)\cdot r\ln er > 0.$$

Пример 3. Пусть $d=1$, $c=+\infty$,

$$b_i(r,y) = r^{x(y)}(\ln er)^{x_i}\,, \quad i=1,2,\dots,n;$$

$x:\sigma\longrightarrow R$ - произвольная функция, удовлетворяющая условию $\sup\limits_{y\in\sigma}|x(y)|<+\infty$, а χ_i - вещественные числа.

Пусть $\chi_0=\min\limits_i \chi_i$, $\overline{\chi}_0=\max \chi_i$.

Тогда если $\frac{x(y)}{1-\rho}\neq -1$ и $\overline{\chi}_0-\chi_0<\rho$ или $x(y)=1-\rho$ и $\overline{\chi}_0=\chi_0$, то

$$\tau_0(r,y)\geq \frac{1}{r\ln er}.$$

Пример 4. Пусть $d=1$; $c=+\infty$;

$$b_i(r,y)=e^{x(y)r}\varphi_i(r,y)\,, \quad i=1,2,\dots,n, \quad \sup_{y\in\sigma}|x(y)|<+\infty;$$

$$\inf_{r\in(1,\delta),\,y\in\sigma} \varphi_i(r,y)>0\,, \quad \sup_{r\in(1,\delta),\,y\in\sigma} \varphi_i(r,y)<+\infty \qquad \forall\delta\in(1,\infty);$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r \ln r \sup_{y\in\sigma}\left[\varkappa(y)+\frac{\varphi_i'(r,y)}{\varphi_i(r,y)}-\frac{\varkappa(y)}{r}\right]<p-1 .$$

Можно показать, что $\inf\limits_{r\in(1,\infty),y\in\sigma} \tau_0(r,y)\, r \ln e r > 0.$

Литература

1. Соболев С.Л. Плотность финитных функций в пространстве $L_p^m(E_n)$.- Сиб. мат.журн., 1963, 4, № 3, с.673-682.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.-М.: Наука, 1974.- 808 с.