УДК 517.947

О СВЕДЕНИИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕ ТИПА КОШИ - КОВАЛЕВСКОЙ К УРАВНЕНИЯМ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

С.И.Янов (Новосибирск)

Рассматриваются общие смешанные краевые задачи в цилиндрической области $Q = G\,x\,(0 < t < \infty)$ для систем уравнений, определитель матриц которых не разрешен относительно старшей производной,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(x, \mathcal{D}_t, \mathcal{D}_x)\vec{u} = \vec{f}, \quad t > 0, \quad x \in G, \\ &B(x, \mathcal{D}_t, \mathcal{D}_x)\vec{u}\big|_{\partial G} = \vec{\varphi}, \quad t > 0, \qquad (1) \\ &\qquad u = 0 \quad \text{при } t < 0. \end{aligned}$$

Исследуется вопрос о существовании решения общих смешанных задач (1), рассмотрены условия однозначной разрешимости, дана оценка решения через правые части в пространствах типа Соболева.

В рассматриваемый класс задач входит, в частности, первая краевая задача для системы гидродинамики идеальной вращающейся жидкости - системы С.Л.Соболева [1]. Близкие вопросы рассмотрены в работах В.Н.Масленниковой (см. например, [2]).

Данная статья является обобщением на системы соответствующих результатов, полученных С.В. Успенским и Г.В.Демиденко [3] для уравнений. Исследование проводится на основании методики работы [3], а также результатов для общих эллиптических и параболических задач [4, 5].

Вначале рассматриваются общие системы, затем в качестве примера приводится первая краевая задача для системы Соболева.

Введем некоторые обозначения.

Пусть $G \subset E_n$ - ограниченная область с $(n-1)$ -мерной гладкой границей $\partial G = \Gamma$; Z - множество целых чисел;

$$\mathcal{D}_{x_k}^{\beta_k} = \frac{\partial^{\beta_k}}{\partial x_k^{\beta_k}}, \quad \mathcal{D}_x^{\beta} = \mathcal{D}_{x_1}^{\beta_1} \ldots \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n};$$

$\deg_\tau b(\tau)$ - степень полинома $b(\tau)$ по τ ; $\mathcal{L}_\tau u(t,x)=\int\limits_0^\infty e^{-\tau t}u(t,x)dt$.

Будем считать, что $Re\,\tau=\sigma>\gamma>0$. Определим условия, которым должны удовлетворять операторы $\mathcal{L}(x,\mathcal{D}_t,\mathcal{D}_x)$, $B(x,\mathcal{D}_t,\mathcal{D}_x)$. Для этого проведем некоторые дополнительные построения. Пусть $\mathcal{L}(x,\tau,i\xi)$ и $B(x,\tau,i\xi)$ - матрицы, полученные формальной заменой $\mathcal{D}_t$ на τ, $\mathcal{D}_x$ на $i\xi$. Обозначим

$$\nu_j=\max_{1\le k\le\theta}\deg_\tau \ell_{kj}(x,\tau,i\xi),\ j=1\ldots\theta.$$

Здесь θ - порядок матрицы $\mathcal{L}$, а $\ell_{kj}(x,\tau,i\xi)$ - ее элементы. Пусть $n_k=\min\{p:p\in Z,\ p\le 0$ и $\forall j,\ 1\le j\le\theta,\ \deg_\tau \tau^{-\nu_j-p}\ell_{kj}(x,\tau,i\xi)\le$ $\le 0\}$, $k=1\ldots\theta$.

Обозначим

$$N(\tau)=\{\delta_{kj}\tau^{n_k}\}_{\substack{k=1\ldots\theta\\ j=1\ldots\theta}},$$

δ_{kj} - символ Кронекера.

Предположим, что 1) $\deg_\tau b_{kj}(x,\tau,i\xi)\le\nu_j$, $j=1\ldots\theta$, $k=1\ldots\mu$.

Пусть $p_k=\min\{p:p\in Z,\ p\le 0$ и $\forall j,\ 1\le j\le\theta,\ \deg_\tau\tau^{-\nu_j-p}\times$ $\times b_{kj}(x,\tau,i\xi)\le 0\}$, $k=1\ldots\mu$.

Обозначим $P^*(\tau)=\{\delta_{ki}\tau^{-p_k}\}_{\substack{k=1\ldots\mu\\ i=1\ldots\mu}}$.

Рассмотрим матрицы:

$$\bar{\mathcal{L}}(x,\tau,i\xi)=\{\tau^{-\nu_j-n_k}\ell_{kj}(x,\tau,i\xi)\}_{\substack{j=1\ldots\theta\\ k=1\ldots\theta}},$$

$$\bar{B}(x,\tau,i\xi)=\{\tau^{-\nu_j-p_q}b_{qj}(x,\tau,i\xi)\}_{\substack{j=1\ldots\theta\\ q=1\ldots\mu}}.$$

2) Матрицу $\bar{\mathcal{L}}(x,\tau,\mathcal{D}_x)$ можно представить в виде суммы двух матриц:

$$\bar{\mathcal{L}}(x,\tau,\mathcal{D}_x)=\mathcal{L}_0(x,\mathcal{D}_x)+\mathcal{L}'(x,\tau,\mathcal{D}_x),$$

где $\mathcal{L}_0(x,\mathcal{D}_x)$ - эллиптическая с некоторыми $t_1,\ldots,t_\theta,s_1,\ldots,s_\theta$ система [4] , не зависящая от τ , а матрица $\mathcal{L}'(x,\tau,i\xi)$ имеет элементы $\ell'_{kj}(x,\tau,i\xi)$ такие, что

а) $\deg_\tau \ell'_{kj}(x,\tau,i\xi)\le -1$,

б) порядок по ξ элементов матрицы $\mathcal{L}'$ удовлетворяет неравенствам

$$\deg_\xi \ell'_{kj}(x,\tau,i\xi)\le s_k+t_j,\quad \substack{k=1\ldots\theta\\ j=1\ldots\theta}.$$

3) Матрицу $\bar{B}$ можно представить в виде суммы двух матриц:

$$\bar{B}(x,\tau,\mathcal{D}_x) = B_0(x,\mathcal{D}_x) + B'(x,\tau,\mathcal{D}_x),$$

где $B_0(x,\mathcal{D}_x)$ и $\mathcal{L}_0(x,\mathcal{D}_x)$ образуют с некоторыми m_j, $j=1\dots\mu$, эллиптическую задачу на G (см. [4]). Для простоты считаем, что $m_j \leq -1$, $j=1\dots\mu$, а $B'(x,\tau,\mathcal{D}_x)$ имеет элементы $b'_{kj}(x,\tau,\mathcal{D}_x)$ такие, что

а) $\deg_\tau b'_{kj}(x,\tau,\mathcal{D}_x) \leq -1$,

б) порядок по ξ элементов матрицы B' удовлетворяет неравенствам: $\deg_\xi b_{kj}(x,\tau,i\xi) < t_j + m_k$, $k=1\dots\mu$, $j=1\dots\theta$.

Определим некоторые классы функций.

Класс $W_\gamma^{p,q}(Q)$, p,q - целые, $\gamma>0$. Будем говорить, что функция $f(t,x)$ принадлежит этому классу, если она имеет обобщенные производные до порядка p по x и до порядка q по t,

$$\mathcal{D}_t^k f(t,x)\big|_{t=0} = 0, \quad k=0\dots q-1,$$

и норма

$$\| f, W_\gamma^{p,q}(Q)\| = \| e^{-\gamma t} f, L_2((0,\infty), W_2^p(G))\| + \|\mathcal{D}_t^q e^{-\gamma t} f, L_2(Q)\| < \infty.$$

Класс $H_\gamma^{\ell,k}(Q)$ определяется как

$$H_\gamma^{\ell,k}(Q) = W_\gamma^{\ell_1,k_1}(Q) \times \dots \times W_\gamma^{\ell_\theta,k_\theta}(Q)$$

с нормой

$$\|\vec{v}, H_\gamma^{\ell,k}(Q)\| = \Big(\sum_{i=1}^{\theta} \| v_i, W_\gamma^{\ell_i,k_i}(Q)\|^2\Big)^{1/2}.$$

Класс $W_\gamma^{p,q}(G\times C_\gamma)$, где C_γ - область $(\tau\in C,\ Re\,\tau>\gamma)$. Будем говорить, что функция $g(\tau,x)$ принадлежит классу $W_\gamma^{p,q}(G\times C_\gamma)$, если она имеет обобщенные производные до порядка p по x, для почти всех x функция $g(\tau,x)$ - голоморфная по τ при $Re\,\tau>\gamma$ и имеет конечную норму

$$\|g, W_\gamma^{p,q}(G\times C_\gamma)\|^2 = \sup_{Re\,\tau>\gamma}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\|g(i\eta+\sigma,x), W_2^p(G)\|^2 d\eta + \int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^{2q}\|g(i\eta+\sigma,x), L_2(G)\|^2 d\eta\Big) < \infty.$$

Заметим, что, по обобщенной теореме Пэли-Винера [6], преобразование Лапласа взимно-однозначно переводит класс $W_\gamma^{p,q}(Q)$ в класс $W_\gamma^{p,q}(G\times C_\gamma)$. Это преобразование является ограниченным оператором в рассматриваемых пространствах.

Определим класс вектор-функций:

$$H_\gamma^{\ell,\kappa}(G\times C_\gamma)=W_\gamma^{\ell_1,\kappa_1}(G\times C_\gamma)\ldots\times W_\gamma^{\ell_\theta,\kappa_\theta}(G\times C_\gamma)$$

с нормой

$$\|\vec{v}, H_\gamma^{\ell,\kappa}(G\times C_\gamma)\|=\left(\sum_{i=1}^{\theta}\|v_i, W_\gamma^{\ell_i,\kappa_i}(G\times C_\gamma)\|^2\right)^{1/2}.$$

Положим

$$W_\gamma^{p}(G\times C_\gamma)\equiv W_\gamma^{p,0}(G\times C_\gamma)$$

и, по определению,

$$H_{\gamma,\ell}(G\times C_\gamma)\equiv H_\gamma^{\ell,0}(G\times C_\gamma).$$

Определим класс функций $W_\gamma^p(\partial G\times C_\gamma)$. Функция $\varphi(\tau,x')$ принадлежит классу $W_\gamma^p(\partial G\times C_\gamma)$, если для любого τ, $Re\tau\geqslant\gamma$, $\varphi(\tau,x')\in\in W_2^p(\partial G)$, для почти всех $x'\in\partial G$ голоморфна по τ при $Re\tau>\gamma$, причем

$$\|\varphi, W_\gamma^p(\partial G\times C_\gamma)\|^2=\sup_{Re\tau\geqslant\gamma}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(i\eta+\sigma,x'), W_2^p(\partial G)\|^2 d\eta\right)<\infty.$$

Положим $H_{\gamma,\ell}(\partial G\times C_\gamma)=W_\gamma^{\ell_1}(\partial G\times C_\gamma)\times\ldots\times W_\gamma^{\ell_\mu}(\partial G\times C_\gamma)$

с нормой

$$\|\vec{v}, H_{\gamma,\ell}(\partial G\times C_\gamma)\|=\left(\sum_{i=1}^{\mu}\|v_i, W_\gamma^{\ell_i}(\partial G\times C_\gamma)\|^2\right)^{1/2}.$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия 1) - 3) на операторы* $\mathcal{L}(x,\mathcal{D}_t,\mathcal{D}_x)$ *и*

$$B(x,\mathcal{D}_t,\mathcal{D}_x),\quad N^{-1}(\tau)\mathcal{L}_\tau\vec{f}\tau^{\kappa_0}\in H_{\gamma,\ell_0-s}(G\times C_\gamma),$$

$$P^*(\tau)\tau^{\kappa_0}\mathcal{L}_\tau\vec{\varphi}\in H_{\gamma,\ell_0-m-\frac{1}{2}}(\partial G\times C_\gamma).$$

Тогда существует число $\gamma_0>0$ *такое, что при* $\gamma\geqslant\gamma_0$ *вопрос о разрешимости задачи (1) в классе* $H_\gamma^{2t,2\nu}(Q)$ *сводится к решению уравнения Фред-*

гольма второго рода. Здесь $K_0 = \max\limits_{1\le i\le\theta} \nu_i$, $\ell_0 = \max\limits_{1\le i\le\theta} t_i$.

Следствие. *Если эллиптическая задача*

$$\mathcal{L}_0(x,\mathcal{D}_x)\vec{V} = \vec{F}(x), \quad x\in G,$$

$$B_0(x,\mathcal{D}_x)\vec{V}\big|_{\partial G} = \vec{\Phi}(x')$$

однозначно разрешима при любых правых частях $\vec{F}(x)\in H_{\ell_0-s}(G)$, $\vec{\Phi}(x')\in H_{\ell_0-m-\frac{1}{2}}(\partial G)$, *то смешанная задача* (1) *при достаточно большом* $\gamma>0$,

$$N^{-1}(\tau)\tau^{K_0}\mathcal{L}_\tau\vec{f}\in H_{\gamma,\ell_0-s}(G\times C_\gamma),$$

$$P^*(\tau)\tau^{K_0}\mathcal{L}_\tau\vec{\varphi}\in H_{\gamma,\ell_0-m-\frac{1}{2}}(\partial G\times C_\gamma),$$

имеет единственное решение $\vec{u}\in H_\gamma^{2t,2\nu}(Q)$, *и выполнена оценка*

$$\|\vec{u},H_\gamma^{2t,2\nu}(Q)\|\le C(\gamma)\Big(\|N^{-1}(\tau)\mathcal{L}_\tau\vec{f}\tau^{K_0},\ H_{\gamma,\ell_0-s}(G\times C_\gamma)\|+$$

$$+\|P^*(\tau)\mathcal{L}_\tau\vec{\varphi}\tau^{K_0},H_{\gamma,\ell_0-m-\frac{1}{2}}(\partial G\times C_\gamma)\|\Big). \tag{2}$$

Здесь $\nu=(\nu_1\ldots\nu_\theta)$, $t=(t_1\ldots t_\theta)$, $m=(m_1\ldots m_\mu)$, определенные в условиях 1) - 3).

Индексы в записях пространств понимаются следующим образом:

$$\ell_0-s=\ell_0\vec{1}-s,\quad \ell_0-m-\frac{1}{2}=\vec{1}\ell_0-m-\frac{1}{2}\vec{1}.$$

Вопрос о разрешимости смешанной краевой задачи (1) в классе $H_\gamma^{2t,2\nu}(Q)$, в силу обобщенной теоремы Пэли-Винера, сводится к изучению краевой задачи с параметром τ для стационарной системы:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(x,\tau,\mathcal{D}_x)\vec{\omega}=\vec{f}_*(\tau,x)=\mathcal{L}_{t\to\tau}\vec{f}(t,x),\\ &B(x,\tau,\mathcal{D}_x)\vec{\omega}\big|_{\partial G}=\vec{\varphi}_*(\tau,x')=\mathcal{L}_{t\to\tau}\vec{\varphi}(t,x').\end{aligned} \tag{1'}$$

Будем предполагать, что $Re\,\tau>\gamma>0$. В силу определения n_K, ν_j, P_K , система (1') эквивалентна системе:

$$N(\tau)\overline{\mathcal{L}}(x,\tau,\mathcal{D}_x)\nu(\tau)\vec{\omega}=\vec{f}_*(\tau,x),$$

$$\overline{B}(x,\tau,\mathcal{D}_x)\nu(\tau)\vec{\omega}\big|_{\partial G}=\vec{\Phi}(\tau,x')=P^*(\tau)\vec{\varphi}_*(\tau).$$

Здесь

$$\nu(\tau)=\left\{\tau^{\nu_j}\delta_{kj}\right\}_{\substack{k=1\ldots\theta\\ j=1\ldots\theta}};\quad N(\tau)=\left\{\tau^{n_k}\delta_{kj}\right\}_{\substack{k=1\ldots\theta\\ j=1\ldots\theta}};\quad P^*(\tau)=\left\{\tau^{-\rho_i}\delta_{k_i}\right\}_{\substack{k=1\ldots\mu\\ i=1\ldots\mu}}.$$

И, далее, эквивалентна системе:

$$\bar{\mathcal{L}}(x,\tau,\mathcal{D}_x)\vec{V}=\vec{F}(\tau,x),$$

$$\bar{B}(x,\tau,\mathcal{D}_x)\vec{V}\Big|_{\partial G}=\vec{\Phi}(\tau,x'),$$

здесь $\vec{V}=\nu(\tau)\vec{\omega}$, $N^{-1}(\tau)\vec{f}_*=\vec{F}(\tau,x)$.

В силу предположений 2), 3) имеем

$$\mathcal{L}_0(x,\mathcal{D}_x)\vec{V}+\mathcal{L}'(x,\tau,\mathcal{D}_x)\vec{V}=\vec{F}(\tau,x),$$
$$B_0(x,\mathcal{D}_x)\vec{V}+B'(x,\tau,\mathcal{D}_x)\vec{V}\Big|_{\partial G}=\vec{\Phi}(\tau,x'). \tag{3}$$

Доказано [4], что задача будет эллиптической тогда и только тогда, когда существуют правый и левый регуляризаторы. Пусть R_n - правый регуляризатор для оператора $\mathcal{U}=(\mathcal{L}_0(x,\mathcal{D}_x),\,B_0(x,\mathcal{D}_x))$. Дальше мы будем пользоваться некоторыми обозначениями и теоремами из [4]. Оператор

$$R_n: H_{\ell-s}(G)\times H_{\ell-m-\frac{1}{2}}(\Gamma)\longrightarrow H_{\ell+t}(G),$$

$$\ell\geqslant 1+\max_{1\leqslant j\leqslant\mu} m_j,$$

линейный и непрерывный, причем

$$\mathcal{U}R_n<\vec{f},\vec{\varphi}>=(E+T_n)<\vec{f},\vec{\varphi}>,$$

где $T_n: H_{\ell-s}(G)\times H_{\ell-m-\frac{1}{2}}(\Gamma)\longrightarrow H_{\ell-s}(G)\times H_{\ell-m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

вполне непрерывный.

Обозначим $H_{\ell-s}(G)\times H_{\ell-m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ через $H_\ell(G,\Gamma)$ и положим

$$\|<\vec{f},\vec{\varphi}>,H_\ell(G,\Gamma)\|=\|\vec{f},H_{\ell-s}(G)\|+\|\vec{\varphi},H_{\ell-m-\frac{1}{2}}(\Gamma)\|.$$

Будем искать решение задачи (2) в виде $V=R_n<\vec{f},\vec{\varphi}>$. Используя определение R_n, получаем

$$\vec{f}+T_1<\vec{f},\vec{\varphi}>+\mathcal{L}'(x,\tau,\mathcal{D}_x)R_n<\vec{f},\vec{\varphi}>=\vec{F}(\tau,x),$$

$$\vec{\varphi}+T_2<\vec{f},\vec{\varphi}>+B'(x,\tau,\mathcal{D}_x)R_n<\vec{f},\vec{\varphi}>=\vec{\Phi}(\tau,x'),$$

или в векторной записи

$$(I+T_n+M(\tau))<\vec{f},\vec{\varphi}> = <\vec{F},\vec{\Phi}>. \tag{4}$$

Покажем, что существует достаточно большое $\gamma>0$ такое, что для любого фиксированного $\tau, Re\,\tau>\gamma$, норма оператора $M(\tau)$ будет меньше 1.

Обозначим $\mathcal{U}'=(\mathcal{L}'(x,\tau,\mathcal{D}_x), B'(x,\tau,\mathcal{D}_x))$. Имеем

$$\|\mathcal{U}'R_n<\vec{f},\vec{\varphi}>, H_\ell(G,\Gamma)\| = \|\mathcal{L}'R_n<\vec{f},\vec{\varphi}>, H_{\ell-s}(G)\| +$$
$$+\|B'(x,\tau,\mathcal{D}_x)R_n<\vec{f},\vec{\varphi}>, H_{\ell-m-\frac{1}{2}}(\Gamma)\| \leq$$

$\leq\frac{C}{\tau}\|R_n<\vec{f},\vec{\varphi}>, H_{\ell+t}(G)\| \leq$ (в силу ограниченности R_n) $\leq\frac{C}{\tau}\|<\vec{f},\vec{\varphi}>, H_\ell(G,\Gamma)\|$, причем C не зависит от τ. Для достаточно большого $\gamma>I$ имеем

$$\|M<\vec{f},\vec{\varphi}>, H_\ell(G,\Gamma)\| \leq \frac{1}{2}\|<\vec{f},\vec{\varphi}>, H_\ell(G,\Gamma)\|.$$

Отсюда при любом фиксированном $\tau, Re\,\tau>\gamma$, операторное уравнение (4) можно записать в виде

$$\left[I+T_n(I+M(\tau))^{-1}\right]<\tilde{\vec{f}},\tilde{\vec{\varphi}}> = <\vec{F},\vec{\Phi}>, \tag{5}$$

где $<\tilde{\vec{f}},\tilde{\vec{\varphi}}> = (I+M(\tau))<\vec{f},\vec{\varphi}>$.

Так как оператор $(I+M(\tau))$ ограниченный в $H_\ell(G,\Gamma)$ при любом фиксированном $\tau, Re\,\tau>\gamma$, причем норма $\|(I+M)^{-1}\| \leq C(\gamma)$, где $C(\gamma)$ не зависит от τ, а оператор T_n вполне непрерывный в $H_\ell(G,\Gamma)$ и не зависит от τ, то оператор $T_n(I+M)^{-1}$ также вполне непрерывен в $H_\ell(G,\Gamma)$, причем

$$\sup_{\tau/Re\,\tau>\gamma}\|T_n\circ(I+M(\tau))^{-1}\| \leq d(\gamma).$$

Поэтому при любом фиксированном $\tau, Re\,\tau>\gamma$, операторное уравнение (5) является уравнением Фредгольма второго рода.

Вопрос о существовании решения краевой задачи (3) свелся к нахождению решения $<\tilde{\vec{f}},\tilde{\vec{\varphi}}>$ уравнения (5). По теоремам Фредгольма, либо уравнение (5) разрешимо единственным образом для любых $<\vec{F},\vec{\Phi}>$, либо для существования решения $<\vec{F},\vec{\Phi}>$ должен удовлетворять некоторому конечному числу условий ортогональности.

Пусть эти условия ортогональности выполнены $\forall\tau, Re\tau > \gamma$. Тогда существует решение уравнения (5) при каждом $\tau, Re\tau > \gamma$. Обозначим через $T = [I + T_{\Pi}(I + M(\tau))^{-1}]$. Решение будет единственным, если оно ортогонально $N(T)$ - всем решениям однородного уравнения $TU = 0$ при том же $\tau, Re\tau > \gamma$, и для этого решения, в силу оценки (6), имеет место:

$$\| < \tilde{\vec{f}}, \tilde{\vec{\varphi}} >, H_{\ell}(G, \Gamma) \| \leq d'(\gamma) \| < \vec{F}, \vec{\Phi} >, H_{\ell}(G, \Gamma) \| .$$

В силу ограниченности оператора $(I + M(\tau))^{-1}$, получаем

$$\| < \vec{f}, \vec{\varphi} >, H_{\ell}(G, \Gamma) \| \leq d_1(\gamma) \| < \vec{F}, \vec{\Phi} >, H_{\ell}(G, \Gamma) \| .$$

Так как решение краевой задачи (3) находится в виде $\vec{V} = R_{\Pi} < \vec{f}, \vec{\varphi} >$, то

$$\| \vec{V}, H_{\ell+t}(G) \| \leq d_2(\gamma) \| < \vec{F}, \vec{\Phi} >, H_{\ell}(G, \Gamma) \| .$$

Но $\nu^{-1}(\tau)\vec{V} = \vec{\omega}$ - решение задачи (1'), следовательно, решение задачи (1') существует, и имеет место оценка:

$$\| \nu(\tau)\vec{\omega}, H_{\ell+t}(G) \| \leq d_2(\gamma) \Big(\| N^{-1}(\tau)\vec{f}_*, H_{\ell-s}(G) \| +$$

$$+ \| P^*(\tau)\vec{\varphi}_*, H_{\ell-m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \| \Big) = d_2(\gamma) \Big(\| (f_{1*}\tau^{-n_1}, f_{2*}\tau^{-n}, \dots, f_{0*}\tau^{-n_0})\uparrow,$$

$$H_{\ell-s}(G) \| + \| (\varphi_{1*}\tau^{-p_1}, \varphi_{2*}\tau^{-p_2}, \dots, \varphi_{\mu*}\tau^{-p_\mu})\uparrow H_{\ell-m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \| \Big) . \qquad (7)$$

Отсюда

$$\| \vec{\omega}, H_{\gamma}^{\ell+t, \nu+\kappa}(G \times C_{\gamma}) \| \leq c(\gamma) \Big(\| N^{-1}(\tau)\vec{f}_* \tau^{\kappa}, H_{\gamma, \ell-s}(G \times C_{\gamma}) \| + \| P^*(\tau)\vec{\varphi}_* \tau^{\kappa}, H_{\gamma, \ell-m-\frac{1}{2}}(\partial G \times C_{\gamma}) \| \Big).$$

Выбирая $\kappa = \max\limits_{1 \leq i \leq \theta} \nu_i$, $\ell = \max\limits_{1 \leq i \leq \theta} t_i$, получаем, что $\mathcal{L}^{-1}_{\tau \to t}\vec{\omega}$, в силу обобщенной теоремы Пэли-Винера, есть решение смешанной задачи (1), причем имеет место оценка (2).

Замечание. При решении задач, в которых операторы $\ell_{\kappa j}(x, \mathcal{D}_t, \mathcal{D}_x)$, $b_{\kappa i}(x, \mathcal{D}_t, \mathcal{D}_x)$, $j, \kappa = 1 \dots \theta$, $i = 1 \dots \mu$, не содержат смешанных призводных по x и t, можно положить $\kappa = 0$, $\ell = 0$.

Исследование вопроса единственности сводится к исследованию уравнения Фредгольма второго рода, получающегося в результате использования левого регуляризатора R_{Π} векторного оператора $\mathcal{U} = (\mathcal{L}_0(x, \mathcal{D}_x), B_0(x, \mathcal{D}_x))$.

Доказательство следствия. В случае существования и единственности решения эллиптической задачи правым регуляризатором R_n будет обратный оператор к оператору $\mathcal{U}$. Уравнение (4) запишется в виде
$(I+M(\tau))<\vec{f},\vec{\varphi}> = <\vec{F},\vec{\Phi}>$.

При достаточно большом $\gamma > 0$ норма оператора $M(\tau)$ мала, и отсюда $<\vec{f},\vec{\varphi}> = (I+M(\tau))^{-1}<\vec{F},\vec{\Phi}>$. В силу оценки (7) функция $\vec{u}=\mathcal{L}^{-1}_{\tau\to t}(R_n<\vec{f},\vec{\varphi}>)$ будет решением задачи 1.

Единственность доказывается аналогично. Исследуем на основании предыдущих результатов первую краевую задачу для системы С.Л.Соболева

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} - [\vec{V},\vec{\omega}] + \operatorname{grad}\mathcal{P} = f_0,$$
$$\operatorname{div}\vec{V} = 0,$$

или в матричной форме

$$\mathcal{L}(\mathcal{D})\vec{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -\omega & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \omega & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ P \end{pmatrix} = \vec{f}.$$

Для нее $\nu_1=I,\ \nu_2=I,\ \nu_3=I,\ \nu_4=0,\ n_1=0,\ n_2=0,\ n_3=0,\ n_4=-1$. Имеем

$$\mathcal{L}(\tau,\mathcal{D}_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\omega}{\tau} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\omega}{\tau} & 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N(\tau)\bar{\mathcal{L}}(\tau,\mathcal{D}_x)\nu(\tau),$$

где

$$\bar{\mathcal{L}}(\tau,\mathcal{D}_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\omega}{\tau} & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}_0(\mathcal{D}_x) + \mathcal{L}'(\tau,\mathcal{D}_x).$$

Рассмотрим систему $\mathcal{L}_0(\mathcal{D}_x)$. Для нее $\det\mathcal{L}_0(i\xi) = \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 \neq 0$ при $|\xi| \neq 0$, $t_1=1,\ t_2=1,\ t_3=1,\ t_4=2,\ s_1=-1,\ s_2=-1,\ s_3=-1,\ s_4=0$.
Эта система невырожденная и правильно эллиптическая [4]. Обозначим

$$\widetilde{\mathcal{L}}_0=\begin{pmatrix}(\xi_2^2+\xi_3^2) & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 & -i\xi_1\\ -\xi_1\xi_2 & (\xi_1^2+\xi_3^2) & -\xi_2\xi_3 & -i\xi_2\\ -\xi_1\xi_3 & -\xi_2\xi_3 & (\xi_2^2+\xi_1^2) & -i\xi_3\\ -i\xi_1 & -i\xi_2 & -i\xi_3 & 1\end{pmatrix}$$ - матрица,

взаимная с $\mathcal{L}_0(i\xi)$, т.е. составленная из алгебраических дополнений и транспонированная.

Если $B=(0,0,0,1)$, то нетрудно проверить, что условие Лопатинского будет выполнено: строки матрицы $A(i(\zeta+\lambda n))=B(i(\zeta+\lambda n))\times$ $\times\widetilde{\mathcal{L}}_0(i(\zeta+\lambda n))$ будут линейно-независимы по модулю полинома $M^+=\lambda-\lambda^+(\zeta,n)$. Здесь n - внутренняя нормаль к ∂G в точке x ; ζ - вектор, лежащий в плоскости, касательной к ∂G в точке x . Следовательно, задача

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_0(\mathcal{D})\vec{u}=\vec{f},\\ &B\vec{u}\big|_{\partial G}=\vec{\varphi}\end{aligned}\tag{8}$$

эллиптическая (см. [4]), и мы можем применить к первой краевой задаче для системы Соболева нашу теорему.

Покажем, что решение задачи (8) существует и единственно.

Рассмотрим задачу

$$\left.\begin{aligned}&\Delta P=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=\tilde{f},\\ &P\big|_{\partial G}=\varphi\,.\end{aligned}\right\}$$

Из теории эллиптических задач хорошо известно, что эта задача имеет единственное решение $\tilde{P}$ при некоторых ограничениях на гладкость $\varphi,\tilde{f},\partial G$. Если теперь положить

$$V_x=f_1-\frac{\partial\tilde{P}}{\partial x},\quad V_y=f_2-\frac{\partial\tilde{P}}{\partial y},\quad V_z=f_3-\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z},\quad P=\tilde{P},$$

то нетрудно проверить, что $U=(V_x,V_y,V_z,P)$ будет решением задачи (8).

Единственность решения задачи (8) очевидна.

На основании следствия получаем существование и единственность решения первой краевой задачи для системы Соболева.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю С.В.Успенскому и Г.В.Демиденко за беседы и возможность ознакомиться с их работой до опубликования.

Литература

1. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики.- Изв.АН СССР, сер. матем., 1954, т.18, №1, с.3-50.
2. Масленникова В.Н. Явные представления и априорные оценки решений граничных задач для системы Соболева.- Сиб.мат.журн., 1968, т.9, №5, с.1182-1198.
3. Успенский С.В.,Демиденко Г.В. О смешанных краевых задачах для одного класса уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными.(Труды семинара С.Л. Соболева), 1980, № 2, с.92-115.
4. Волевич Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем.- Мат. сб., 1965, т.68, №3, с.373-416.
5. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида.- Тр.мат. ин-та АН СССР, 1965, т. 83, с.3-32.
6. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.- Успехи мат. наук, 1964, т.19, в.3, с.53-161.