УДК 517.95

НОВЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОБЛАДАЮЩИЕ (L, A)-ПАРОЙ

В.Г. Дринфельд, В.В.Соколов (Уфа)

В работе авторов [1] была предложена схема построения класса гамильтоновых эволюционных уравнений типа уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ), изучена связь между этими уравнениями и простыми алгебрами Ли. В настоящей заметке приводятся наиболее интересные примеры уравнений, неявным образом содержащиеся в работе [1]. Как и все гамильтоновы уравнения типа КдФ, рассматриваемые уравнения обладают бесконечной алгеброй Ли-Бэклунда (см. [2]) и бесконечным набором законов сохранения.

1. В этом пункте мы напомним определение и некоторые свойства уравнений Лакса. Подробное изложение можно найти, например, в обзоре [3].

Рассмотрим кольцо H формальных рядов вида $\sum_{-\infty}^{K} a_i D^i$, где a_i - гладкие функции от x и t со значениями в $\mathbb{C}$, $D = d/dx$. Формула $D^{-1}a = aD^{-1} - a_x D^{-2} + a_{xx} D^{-3} - \ldots$ определяет умножение рядов. Будем обозначать через $\left(\sum_{-\infty}^{K} a_i D^i\right)_+$ дифференциальный оператор $\sum_{0}^{K} a_i D^i$. Оказывается, что для любого ряда $M = D^n + \sum_{-\infty}^{n-1} a_i D^i$ существует единственный ряд $M^{1/n}$ вида $D + \sum_{-\infty}^{0} \alpha_i D^i$ такой, что $(M^{1/n})^n = M$. Его коэффициенты вычисляются рекуррентно и являются дифференциальными полиномами от коэффициентов ряда M. Пусть L - дифференциальный оператор из H вида $D^n + \sum_{0}^{n-2} u_i D^i$. Определим дифференциальный оператор A формулой

$$A = \sum_{0}^{m} c_i L_+^{i/n}, \quad c_i \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Соотношение

$$\frac{\partial L}{\partial t} = AL - LA \tag{2}$$

называется уравнением Лакса. Известно, что оно эквивалентно системе из $(n-1)$-го эволюционного уравнения относительно u_i. Если $L = D^2 + u$,

$A = L_+^{3/2}$, то уравнение Лакса есть уравнение КдФ.

2. В этом пункте мы сформулируем один из результатов работы [1]. Рассмотрим соотнсшения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial t} = AM - MB, \\ \dfrac{\partial N}{\partial t} = BN - NA, \end{cases} \tag{3}$$

где $M=D^{r}+wD^{r-1}+\sum_0^{r-2} u_i D^i$, $N=D^s-wD^{s-1}+\sum_0^{s-2} v_i D^i$, $A=\sum_0^m c_i (MN)_+^{i/r+s}$, $B=(M^{-1}AM)_+$.
Нетрудно проверить, что равенства (3) эквивалентны системе из $r+s-1$ уравнений относительно u_i, v_i, w. Эта система связана с уравнением Лакса следующим образом: произведение $L=MN$ операторов, удовлетворяющих (3), удовлетворяет соотношению (2).

Положим $Q_1(n)=D^{2n+1}+\sum_0^{n-1}(u_i D^{2i+1}+D^{2i+1}u_i)$, $Q_2(n)=D^{2n}+\sum_0^{n-1}(u_i D^{2i}+D^{2i}u_i)$, $Q_3(n)=D^{2n-1}+\sum^{n-1}(u_i D^{2i-1}+D^{2i-1}u_i)+u_0 D^{-1}u_0$. По определению, будем считать, что $Q_1(0)=D$, $Q_2(0)=1$, $Q_3(0)=D^{-1}$. Назовем $u_0,\dots,u_{n-1}$ функциональными параметрами $Q_i(n)$, $i=1,2,3$.

Теорема. *Пусть* $M=Q_i(r)$ *и* $N=Q_j(s)$, $i,j\in\{1,2,3\}$ *, имеют функциональными параметрами* $u_0,\dots,u_{r-1}$ *и* $v_0,\dots,v_{s-1}$ *соответственно. Обозначим через* L *произведение* MN *. Тогда если дифференциальный оператор* A *определен формулой*

$$A=\sum_0^m c_i L_+^{\frac{2i+1}{n}}, \tag{4}$$

где $n=\operatorname{ord} L$, $B=(M^{-1}AM)_+$ *, то соотношения* (3) *эквивалентны системе из* $r+s$ *эволюционных уравнений относительно* $u_0,\dots,u_{r-1},v_0,\dots,v_{s-1}$ *.*

3. Примеры. Ниже мы выписываем все системы, соответствующие случаю $r+s\leqslant 2$, а оператор A имеет наименьший возможный порядок. В некоторых системах для приведения их к наиболее простому виду сделаны растяжения неизвестных функций и независимых переменных. В случаях, когда делаются другие замены, указывается их тип.

1) В случаях а) $L=D^2+u$, $A=L_+^{3/2}$, б) $L=(D^2+u)D^{-1}$, $A=L_+^3$, в) $L=(D^3+2uD+u_x)D^{-1}$, $A=L_+^{3/2}$, г) $L=(D^3+2uD+u_x)D$, $A=L_+^{3/4}$ получается уравнение КдФ $u_t=u_{xxx}+6uu_x$.

2) В случаях а) $L=D+uD^{-1}u$, $A=L_+^3$, б) $L=(D+uD^{-1}u)D$, $A=L_+^{3/2}$ получается модифицированное уравнение КдФ $u_t=u_{xxx}+6u^2u_x$.

3) $L=(D^2+u)D$, $A=L_+^{5/3}$ приводят к уравнению $u_t=u_{xxxxx}+$ $+5uu_{xxx}+5u_xu_{xx}+5u^2u_x$.

4) $L = D^3 + 2uD + u_x$, $A = L_+^{5/3}$ приводят к уравнению

$$u_t = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 25u_x u_{xx} + 20u^2 u_x .$$

5) Система

$$\begin{cases} u_t = vv_x, \\ v_t = v_{xxx} + 2uv_x + vu_x \end{cases}$$

получается в случае а) $L = D^3 + 2uD + u_x + vD^{-1}v$, $A = L_+$ и в случае б) $L = (D^3 + 2uD + u_x)(D^3 + 2vD + v_x)$, $A = L_+^{1/2}$ после замены $u + v \to u$, $u - v \to v$.

6) Система

$$\begin{cases} u_t = w_x, \\ w_t = w_{xxx} + wu_x + uw_x \end{cases}$$

получается в случае а) $L = (D^4 + uD^2 + D^2u + v)D^{-1}$, $A = L_+$, после замены вида $w = v + \alpha v_{xx}$ и в случае б) $L = (D^5 + uD^3 + D^3u + vD + Dv)D$, $A = L_+^{1/2}$ после замены $w = v + \beta u^2$, где α и β - должным образом выбранные постоянные.

7) Система

$$\begin{cases} u_t = -u_{xxx} + w_x - uu_x , \\ w_t = 2w_{xxx} + uw_x \end{cases}$$

получается в случае а) $L = (D^5 + uD^3 + D^3u + vD + Dv)D^{-1}$, $A = L_+^{3/4}$ после замены вида $w = v + \alpha u_{xx}$ и в случае б) $L = D^4 + uD^2 + D^2u + v$, $A = L_+^{3/4}$ после замены $w = v + \beta u^2$. Отметим, что эта система после замены вида $w + \gamma u_{xx} + \delta u^2 \to w$ может быть записана так:

$$\begin{cases} u_t = -2u_{xxx} + 3w_x - uu_x , \\ w_t = w_{xxx} + u_x u_{xx} + uw_x . \end{cases}$$

8) $L = (D^2 + u)(D + vD^{-1}v)$, $A = L_+$; после замены $w = u + \alpha v^2$ получаем систему

$$\begin{cases} w_t = 3v_x v_{xx} + 3wvv_x + 3/2\, v^3 v_x , \\ v_t = v_{xxx} + wv_x + vw_x + 3/2\, v^2 v_x . \end{cases}$$

9) Система

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + uu_x - vv_x , \\ v_t = -2v_{xxx} - uv_x \end{cases}$$

получается в случае а) $L = (D^3 + 2uD + u_x + vD^{-1}v)D$, $A = L_+^{3/4}$ и в случае б) $L = (D^2+u)(D^2+v)$, $A = L_+^{3/4}$ после замены $u+v \to u$, $u-v \to v$.

10) В случае $L = (D^3 + 2uD + u_x + vD^{-1}v)D^{-1}$, $A = L_+^{3/2}$ после замены $u + v \to u$, $u - v \to v$ система распадается на два независимых уравнения КдФ. В случае $L = (D + uD^{-1}u)(D + vD^{-1}v)$, $A = L_+^{3/2}$ после той же замены система распадается на два модифицированных уравнения КдФ.

11) $L = (D^3 + 2uD + u_x)(D + vD^{-1}v)$, $A = L_+^{3/4}$; после замены вида $w = u + \alpha v^2$ получается система

$$\begin{cases} w_t = -w_{xxx} + 6v_x v_{xx} - ww_x - v^2 w_x , \\ v_t = 2v_{xxx} + w_x v^2 + wvv_x + v^3 v_x . \end{cases}$$

12) В случаях а) $L = D^5 + uD^3 + D^3u + vD + Dv$, $A = L_+^{3/5}$, б) $L = (D^4 + uD^2 + D^2u + v)D$, $A = L_+^{3/5}$ системы после замен типа $w = v + \alpha u_{xx} + \beta u^2$ могут быть приведены к виду

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + w_x + uu_x , \\ w_t = A w_{xxx} + B u_x u_{xx} + C u^2 u_x + D(uw_x - wu_x), \end{cases}$$

где постоянные A, B, C, D (для каждой системы свои) имеют вид $p + q\sqrt{5}$, $p, q \in \mathbb{Q}$.

13) $L = (D^3 + 2uD + u_x)(D^2 + v)$, $A = L_+^{3/5}$. После растяжений систему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} u_t = (D^3 + 4uD + 2u_x)(3v - 8u), \\ v_t = (D^3 + 4vD + 2v_x)(12u - 2v). \end{cases}$$

4. В этом пункте мы приведем еще несколько систем, аналогичных системе из примера 13. Все эти системы являются векторными аналогами КдФ в следующем смысле. Обозначим через R_u дифференциальный оператор $D^3 + 4uD + 2u_x$. Уравнение КдФ можно записать в виде $u_t = R_u(u)$. Наши системы имеют вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = R_{u_i}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j\Big), \quad i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

14) Системы из примеров 5 и 9 после замены $u+v \to u$, $u-v \to v$ и

растяжений могут быть записаны в виде (5). Матрицы $B = \{b_{ij}\}$ равны $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ соответственно.

15) $L = (D^3 + 2(u+v)D + (u_x + v_x) + (u-v)D^{-1}(u-v))(D^3 + 4wD + 2w_x),\ A = L_+^{1/2},$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

16) $L = (D^3 + 2(u+v)D + (u_x + v_x) + (u-v)D^{-1}(u-v))(D^2 + w),\ A = L_+^{3/5},$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 3 \\ -9 & 1 & 3 \\ 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

17) $L = (D^3 + 2(u+v)D + (u_x + v_x) + (u-v)D^{-1}(u-v))(D^3 + 2(w+z)D + (w_x + z_x) +$

$+ (w-z)D^{-1}(w-z)),\quad A = L_+^{1/2},$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что система из примера 13 является редукцией системы из примера 16, а системы из примеров 15 и 5 - редукциями системы из примера 17.

Литература

1. Дринфельд В.Г., Соколов В.В. Уравнения типа Кортевега-де Фриза и простые алгебры Ли.- Докл.АН СССР, 1981, т.258, №1, с.11-16.
2. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли-Беклунда.- Функцион. анализ и его прил., 1980, т.14, вып.1, с.25-36.
2. Манин Ю.М. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений.- В кн.: Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. М., 1978, т.11, с.5-152.