УДК 517.946.8

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПРИ БОЛЬШОМ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

И.М.Петунин (Москва)

В работах В.Н.Масленниковой [1-6] для систем гидродинамики вращающейся жидкости вида

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}, \vec{\omega}] - \nu \Delta \vec{v} + \operatorname{grad} P = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\vec{v}\Big|_{t=0} = \vec{v}^{\,0}(x), \ \operatorname{div} \vec{v}^{\,0} = 0, \ x \in E_n, \ n = 1,2,3, \tag{2}$$

была полностью изучена зависимость между характером убывания решения при $t \to \infty$ и числом пространственных переменных, а также наличием или отсутствием вязкости.

Здесь $\vec{v}(x,t)$ - вектор скорости; $\vec{\omega}$ - постоянный вектор угловой скорости; $[\cdot,\cdot]$ - векторное произведение; $P(x,t)$- скалярная функция, $\nu = const > 0$ - коэффициент вязкости.

Как было показано в [1-3] , асимптотика решения задачи (1), (2) при наличии вязкости характеризуется равномерными по $x \in E_n$ оценками

$$|\vec{v}(x,t)| \le \frac{C_1}{(|\vec{\omega}| t)^{(n-1)/2} (\nu t)^{n/2}} \|\vec{v}^{\,0}\|_{L_1(E_n)},$$

$$|P(x,t)| \le \frac{C_2}{(|\vec{\omega}| t)^{(n-1)/2} (\nu t)^{(n-1)/2}} \|\vec{v}^{\,0}\|_{L_1(E_n)},$$

где C_i - абсолютные постоянные, $t \ge t_0 > 0$.

В дальнейшем без ограничения общности [7] будем считать вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ заданным в виде $\vec{\omega}=(0,0,\omega)$, $\omega>0$.

Целью настоящей работы является получение асимптотического разложения решения задачи (1), (2) на произвольном компакте $K\subset E_3$ для достаточно больших $t\geq t_0>0$ с использованием представления решения, полученного в [1].

В дальнейшем предполагается, что для вектора $\vec{v}^0(x)$ выполнено следующее

Условие А. *Для некоторого целого натурального числа p существуют положительные постоянные C_β такие, что для всех β, $3\leq\beta\leq 4p+4$, выполнены неравенства*

$$(1+|x|)^\beta|\vec{v}^0(x)|\leq C_\beta.$$

В статье будет доказана следующая

Теорема. *Пусть начальные данные* (2) *удовлетворяют условию А и естественному условию согласования* $\operatorname{div}\vec{v}^0=0$. *Тогда на любом компакте* $K\subset E_3$ $(x\in K)$ *асимптотическое разложение решения задачи* (1), (2) *при* $t\to\infty$ *имеет вид*

$$\vec{v}(x,t)=\frac{1}{t^{7/2}}\sum_{n=0}^{2p-4}\left\{\vec{A}_n(x)\sin\omega t+\vec{B}_n(x)\cos\omega t\right\}\frac{1}{t^{n/2}}+O\left(\frac{1}{t^{p+2}}\right),$$

$$P(x,t)=\frac{1}{t^{5/2}}\sum_{n=0}^{2p-3}\left\{a_n(x)\sin\omega t+b_n(x)\cos\omega t\right\}\frac{1}{t^{n/2}}+O\left(\frac{1}{t^{p+3/2}}\right),$$

причем функции $\vec{A}_n(x)$, $\vec{B}_n(x)$, $a_n(x)$ *и* $b_n(x)$ *выражаются только через начальные данные* (2).

Следует отметить, что наличие в системе (1) члена $[\vec{v},\vec{\omega}]$, так же, как и в системе С.Л.Соболева [8], обусловливает колебательный характер решения, причем, как видно из приведенной теоремы, колебания по t при достаточно большом t представляются тригонометрическими функциями, как и в случае системы С.Л.Соболева [5].

В § 1 настоящей статьи решение задачи Коши (1), (2), полученное в [1], преобразуется к удобному для наших целей виду, а также доказываются две вспомогательные леммы, используемые в § 2 при доказательстве сформулированной теоремы.

§1. Преобразование решения. Вспомогательные леммы

Решение задачи (1), (2), полученное в [1], представляется как

$$\vec{v}(x,t) = \int_{E_3} \{\vec{v}^{\,0}(x-y)K_1(y,t) + [\vec{v}^{\,0}(x-y), \vec{K}_2(y,t)]\} dy,$$

$$p(x,t) = \int_{E_3} \{v_1^0(x-y)K_{32}(y,t) - v_2^0(x-y)K_{31}(y,t) - v_3^0(x-y)K_4(y,t)\} dy,$$

где ядра $K(x,t)$ имеют вид:

$$K_1(x,t) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\nu t\lambda^2} \frac{J_{1/2}(\Omega)}{\Omega^{1/2}} d\lambda;$$

$$K_{2i}(x,t) = \frac{x_i}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^3 e^{-\nu t\lambda^2} \frac{J_{3/2}(\Omega)}{\Omega^{3/2}} d\lambda, \quad i=1,2;$$

$$K_{23}(x,t) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 (\lambda x_3 + \omega t) e^{-\nu t\lambda^2} \frac{J_{3/2}(\Omega)}{\Omega^{3/2}} d\lambda;$$

$$K_{3i}(x,t) = -\frac{\omega x_i}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\nu t\lambda^2} \frac{J_{3/2}(\Omega)}{\Omega^{3/2}} d\lambda, \quad i=1,2;$$

$$K_4(x,t) = \frac{\omega}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\nu t\lambda^2} \frac{J_{1/2}(\Omega)}{\Omega^{1/2}} d\lambda,$$

где $\Omega = \sqrt{\lambda^2 r^2 + 2\lambda x_3 \omega t + \omega^2 t^2}$, $r = |x|$. Здесь и всюду далее через J_ν обозначены функции Бесселя порядка ν. Вектор-функция $\vec{v}(x,t)$ может быть записана следующим образом:

$$\vec{v}(x,t) = \int_{E_3} \left\{ \begin{pmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ v_3^0 \end{pmatrix} (x-y) K_1(y,t) + \begin{pmatrix} 0 \\ v_3^0 \\ -v_2^0 \end{pmatrix} (x-y) K_{21}(y,t) + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} -v_3^0 \\ 0 \\ v_1^0 \end{pmatrix} (x-y) K_{22}(y,t) + \begin{pmatrix} v_2^0 \\ -v_1^0 \\ 0 \end{pmatrix} (x-y) K_{23}(y,t) \right\} dy. \qquad (3)$$

Переходя к сферическим координатам в (3), приведем представление (3) к удобному для наших дальнейших исследований виду.

Обозначим

$$\Omega_1 = \sqrt{\lambda^2 r^2 + 2\lambda r \omega t \cos\theta + \omega^2 t^2},$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\lambda^2 r^2 - 2\lambda r \omega t \cos\theta + \omega^2 t^2}.$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (3), обозначив его через $\vec{R}_1(x,t)$. Переходя в интеграле по E_3 к сферическим координатам и разбивая интеграл по λ на два интеграла с последующей заменой $\lambda = -\lambda_1$ во втором интеграле, представим $\vec{R}_1(x,t)$ в виде:

$$\vec{R}_1(x,t) = \int_{E_3} \vec{v}^{\,o}(x-y) K_1(y,t)\,dy = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \vec{v}^{\,o}(x_1 - r\cos\varphi\sin\theta,\ x_2 - r\sin\varphi\sin\theta,\ x_3 - r\cos\theta)\, r^2 dr \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\nu t\lambda^2} \left(\frac{J_{1/2}(\Omega_1)}{\Omega_1^{1/2}} + \frac{J_{1/2}(\Omega_2)}{\Omega_2^{1/2}} \right) d\lambda .$$

В первом слагаемом в представлении $\vec{R}_1(x,t)$ сделаем замену переменной $\theta = \pi - \alpha$. Затем, обозначив α опять через θ и положив

$$\vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi) = \vec{v}^{\,o}(x_1 - r\cos\varphi\sin\theta,\ x_2 - r\sin\varphi\sin\theta,\ x_3 - r\cos\theta) +$$

$$+ \vec{v}^{\,o}(x_1 - r\cos\varphi\sin\theta,\ x_2 - r\sin\varphi\sin\theta,\ x_3 + r\cos\theta), \tag{4}$$

слагаемое $\vec{R}_1(x,t)$ можем представить в виде

$$\vec{R}_1(x,t) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} r^2 \vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi)\, dr \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\nu t\lambda^2} \frac{J_{1/2}(\Omega_2)}{\Omega_2^{1/2}}\, d\lambda .$$

В последнем интеграле обозначим ядро через

$$\mathcal{F}_1(t,\theta,r) = \frac{\sin\theta}{2(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\nu t\lambda^2} \frac{J_{1/2}(\Omega_2)}{\Omega_2^{1/2}}\, d\lambda . \tag{5}$$

Тогда

$$\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}r^2\vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi)\,\Phi_1(t,\theta,r)dr. \qquad (6)$$

Аналогично преобразуем три последних слагаемых в (3). Вводя обозначения

$$\Phi_2(t,\theta,r)=\frac{\sin\theta}{2(2\pi)^{3/2}}\int_0^{\infty}\lambda^3 e^{-\nu t\lambda^2}\frac{J_{3/2}(\Omega_2)}{\Omega_2^{3/2}}d\lambda; \qquad (7)$$

$$\Phi_3(t,\theta,r)=\frac{\sin\theta}{2(2\pi)^{3/2}}\int_0^{\infty}\lambda^2 e^{-\nu t\lambda^2}\frac{J_{3/2}(\Omega_2)}{\Omega_2^{3/2}}d\lambda; \qquad (8)$$

$$\vec{F}_{21}(x,r,\theta,\varphi)=-\cos\varphi\begin{pmatrix}0\\ v_3^0\\ -v_2^0\end{pmatrix}(x_1-r\cos\varphi\sin\theta,\ x_2-$$

$$-r\sin\varphi\sin\theta,\ x_3-r\cos\theta)+\cos\varphi\begin{pmatrix}0\\ v_3^0\\ -v_2^0\end{pmatrix}(x_1-r\cos\varphi\sin\theta,\ x_2-r\sin\varphi\sin\theta;$$

$$x_3+r\cos\theta)-\sin\varphi\begin{pmatrix}-v_3^0\\ 0\\ v_1^0\end{pmatrix}(x_1-r\cos\varphi\sin\theta,\ x_2-r\sin\varphi\sin\theta,\ x_3-r\cos\theta)+$$

$$+\sin\varphi\begin{pmatrix}-v_3^0\\ 0\\ v_1^0\end{pmatrix}(x_1-r\cos\varphi\sin\theta,\ x_2-r\sin\varphi\sin\theta,\ x_3+r\cos\theta); \qquad (9)$$

$$\vec{F}_{22}(x,r,\theta,\varphi)=-\vec{F}_3(x,r,\theta,\varphi)=$$

$$=-\begin{pmatrix}v_2^0\\ -v_1^0\\ 0\end{pmatrix}(x_1-r\cos\varphi\sin\theta,\ x_2-r\sin\varphi\sin\theta,\ x_3-r\cos\theta)-$$

$$-\begin{pmatrix}v_2^0\\ -v_1^0\\ 0\end{pmatrix}(x_1-r\cos\varphi\sin\theta,\ x_2-r\sin\varphi\sin\theta,\ x_3+r\cos\theta), \qquad (10)$$

и группируя члены, содержащие $\Phi_2(t,\theta,r)$, имеем представление $\vec{v}(x,t)$ в виде

$$\vec{v}(x,t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}r^2\vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi)\,\Phi_1(t,\theta,r)dr+$$

$$+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}r^3\left(\sin\theta\,\vec{F}_{21}(x,r,\theta,\varphi)+\cos\theta\,\vec{F}_{22}(x,r,\theta,\varphi)\right)\Phi_2(t,\theta,r)dr+$$

$$+\omega t\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}r^2\vec{F}_3(x,r,\theta,\varphi)\,\Phi_3(t,\theta,r)dr\equiv$$

$$\equiv\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)+\vec{\mathcal{R}}_2(x,t)+\vec{\mathcal{R}}_3(x,t).\qquad(11)$$

Аналогично получаем представление для давления $P(x,t)$:

$$P(x,t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\infty}r^3F_4(x,r,\theta,\varphi)\,\Phi_3(t,\theta,r)dr+$$

$$+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}r^2F_5(x,r,\theta,\varphi)\,\Phi_4(t,\theta,r)dr\equiv\mathcal{P}_1(x,t)+\mathcal{P}_2(x,t),\qquad(12)$$

где

$$F_4(x,r,\theta,\varphi)=\omega\cos\varphi\, v_2^0(x_1-r\cos\varphi\sin\theta,x_2-r\sin\varphi\sin\theta,x_3-$$

$$-r\cos\theta)+\omega\cos\varphi\, v_2^0(x_1-r\cos\varphi\sin\theta,x_2-r\sin\varphi\sin\theta,x_3+r\cos\theta)-$$

$$-\omega\sin\varphi\, v_1^0(x_1-r\cos\varphi\sin\theta,x_2-r\sin\varphi\sin\theta,x_3-r\cos\theta)-$$

$$-\omega\sin\varphi\, v_1^0(x_1-r\cos\varphi\sin\theta,x_2-r\sin\varphi\sin\theta,x_3+r\cos\theta),\qquad(13)$$

$$F_5(x,r,\theta,\varphi)=\omega v_3^0(x_1-r\cos\varphi\sin\theta,x_2-r\sin\varphi\sin\theta,x_3-$$

$$-r\cos\theta)-\omega v_3^0(x_1-r\cos\varphi\sin\theta,x_2-r\sin\varphi\sin\theta,x_3+r\cos\theta),\qquad(14)$$

$$\Phi_4(t,\theta,r)=\frac{\sin\theta}{2(2\pi)^{3/2}}\int_0^{\infty}\lambda e^{-\nu t\lambda^2}\frac{J_{1/2}(\Omega_2)}{\Omega_2^{1/2}}\,d\lambda.\qquad(15)$$

Итак, мы записали решение задачи (1),(2) в более удобном виде (11),

(12). Получив асимптотическое разложение сверток $\vec{\mathcal{R}}_j(x,t)$ и $\mathcal{P}_j(x,t)$, мы найдем асимптотическое разложение решения задачи (1),(2).

Для построения асимптотического разложения сверток $\vec{\mathcal{R}}_j(x,t)$, $\mathcal{P}_j(x,t)$ будем раскладывать ядра этих сверток $\mathcal{F}_i(t,\theta,\tau)$ в сходящиеся ряды с последующим почленным интегрированием и оценкой остатков рядов, что позволит избавиться от сложных иррациональных аргументов в функциях Бесселя, входящих в ядра $\mathcal{F}_i$.

Для обоснования законности операции почленного интегрирования в бесконечных пределах рядов будем использовать следующее достаточное условие Дини (см. [9]): положим

$$\int_a^x f_n(x)\,dx = g_n(x)$$

и допустим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

равномерно сходится на любом конечном интервале (a,b), тогда как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

сходится равномерно в бесконечном интервале $x \geq a$. Тогда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_a^{\infty} f_n(x)\,dx\right]$ сходится,

2) $\int\limits_a^{\infty}\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]dx$ сходится,

3) значения 1) и 2) равны друг другу.

Докажем две вспомогательные леммы, которые используем при доказательстве указанной теоремы.

Лемма 1. *При любых конечных значениях τ, $0 \leq \theta \leq \pi$ и $t \geq t_0 > 0$ функции $\mathcal{F}_j(t,\theta,\tau)$ $(j=\overline{1,4})$ могут быть представлены в виде суммы равномерно сходящихся по τ и θ рядов вида*

$$\mathcal{F}_j(t,\theta,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}{}' u_j(k,\tau,\theta,t)\,h_j(k,t), \quad j=\overline{1,4}, \tag{16}$$

где функции u_j, h_j при $j=1$ имеют вид:

$$u_1(0,r,\theta,t) = \frac{\sin\theta}{2^4\pi^{3/2}}\, e^{-\frac{r^2}{4\nu t}},$$

$$h_1(0,t) = \frac{\sin\omega t}{\omega t(\nu t)^{3/2}},$$

$$u_1(\kappa,r,\theta,t) = \frac{\sin\theta}{2^{1/2}\pi}\cdot\frac{\kappa+1/2}{2^\kappa\Gamma\left(\frac{\kappa}{2}\right)}C_\kappa^{1/2}(\cos\theta)r^\kappa\int_0^1 e^{-\frac{r^2}{4\nu t\xi}}\times \tag{17}$$

$$\times\, \xi^{\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{2}}(1-\xi)^{\frac{\kappa}{2}-1}d\xi,$$

$$h_1(\kappa,t) = \frac{J_{\kappa+1/2}(\omega t)}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^{3/2}}\cdot\frac{1}{(\nu t)^{\kappa/2}},\quad \kappa=1,2,\ldots;$$

а при $j=\overline{2,4}$ определяются по формулам (26). *Здесь* $C_\kappa^\nu(\cos\theta)$ *– многочлены Гегенбауэра.*

Доказательство проведем для функции $\mathcal{F}_1(t,\theta,r)$. Для остальных ядер оно проводится аналогично. Известно [10, т.2], что

$$\varpi^{-\nu}J_\nu(\varpi) = \left(\frac{zZ}{2}\right)^{-\nu}\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)C_n^\nu(\cos\varphi)J_{\nu+n}(z)J_{\nu+n}(Z),$$

$$\nu\neq 0,-1,-2,-3\ldots;\quad \varpi=\sqrt{z^2+Z^2-2zZ\cos\varphi}.$$

Используя эту формулу, ядро $\mathcal{F}_1(t,\theta,r)$ можно представить в виде

$$\mathcal{F}_1(t,\theta,r) = \frac{\sin\theta}{2(2\pi)^{3/2}}\int_0^\infty \lambda^2 e^{-\nu t\lambda^2}\frac{J_{1/2}(\Omega_2)}{\Omega_2^{1/2}}d\lambda =$$

$$= \frac{\sin\theta}{4\pi(\omega t)^{1/2}r^{1/2}}\int_0^\infty \lambda^{3/2}e^{-\nu t\lambda^2}\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\kappa+1/2)C_\kappa^{1/2}(\cos\theta)J_{\kappa+1/2}(\omega t)J_{\kappa+1/2}(\lambda r)d\lambda =$$

$$= \frac{\sin\theta}{4\pi(\omega t)^{1/2}r^{1/2}}\int_0^\infty\sum_{\kappa=0}^{\infty}\lambda^{3/2}e^{-\nu t\lambda^2}(\kappa+1/2)C_\kappa^{1/2}(\cos\theta)J_{\kappa+1/2}(\omega t)J_{\kappa+1/2}(\lambda r)d\lambda. \tag{18}$$

Для получения (18) мы воспользовались также тем, что функция $\lambda^{3/2}e^{-\nu t\lambda^2}$

ограничена при $\lambda \in [0,\infty)$.

Докажем законность почленного интегрирования ряда в (18), для чего воспользуемся ранее приведенным достаточным условием Дини. Рассмотрим ряд, стоящий под знаком интеграла в (18) и докажем его равномерную сходимость для любых конечных $\lambda \leq \Lambda, r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi$ и $t \geq t_0 > 0$.

Известны [10, т.2, с.23, формула (14)] следующие оценки:

$$|J_\nu(z)| \leq \left|\frac{z}{2}\right|^\nu \cdot \frac{e^{|y|}}{\Gamma(\nu+1)}, \quad \nu > -\frac{1}{2}, \; z = x+iy,$$
$$(\sin\theta)^\alpha \left|C_n^\alpha(\cos\theta)\right| < \left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \; 0<\alpha<1, \; 0\leq\theta\leq\pi, \tag{19}$$

и, кроме того, верхняя оценка [9] для функции Бесселя действительного аргумента и положительного порядка ν :

$$|J_\nu(x)| \leq 1. \tag{20}$$

Учитывая, что λr действительное, из неравенств (19) и (20) получаем

$$\left|\sin\theta\, \lambda^{3/2} e^{-\nu t\lambda^2}(k+1/2)\, C_k^{1/2}(\cos\theta)\, J_{k+1/2}(\omega t)\, J_{k+1/2}(\lambda r)\right| <$$
$$< \lambda^{3/2} \frac{k+1/2}{k^{1/2}\,\Gamma(k+3/2)} \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{k+1/2},$$

откуда следует, что ряд, стоящий под знаком интеграла в (18), равномерно сходится для любых конечных $\lambda\leq\Lambda, r\leq R, 0\leq\theta\leq\pi, t\geq t_0>0$, так как в правой части полученного неравенства стоит общий член сходящегося числового ряда.

Теперь рассмотрим ряд вида

$$\sin\theta \sum_{k=0}^{\infty}(k+1/2)C_k^{1/2}(\cos\theta)\, J_{k+1/2}(\omega t)\int_0^\Lambda \lambda^{3/2} e^{-\nu t\lambda^2} J_{k+1/2}(\lambda r)\,d\lambda \tag{21}$$

и покажем, что он равномерно сходится в интервале $\Lambda \geq 0$ при конечных r, $0\leq\theta\leq\pi$ и $t\geq t_0>0$.

Используя интегральное представление функции Бесселя [10, т.2, с.22, формула (13)]

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\pi/2}\cos(z\sin\varphi)\cos^{2\nu}\varphi\, d\varphi, \; \mathrm{Re}\,\nu > -1/2$$

и значение интеграла [11] вида

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\mu x^{\rho}} dx = \frac{1}{|\rho|}\mu^{-\frac{\nu}{\rho}} \Gamma\left(\frac{\nu}{\rho}\right), \quad \mathrm{Re}\,\mu>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>0, \tag{22}$$

можно доказать, что

$$\left|\int_0^{\Lambda} \lambda^{3/2} e^{-\nu t\lambda^2} J_{\kappa+1/2}(\lambda r)d\lambda\right| \leqslant \frac{2\left(\frac{r}{2}\right)^{\kappa+1/2}}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\kappa+1)} \int_0^{\infty} \lambda^{\kappa+2} e^{-\nu t\lambda^2} \left|\int_0^{\pi/2} \cos^{2\kappa+1}\varphi \times \right.$$

$$\left. \times \cos(\lambda r \sin\varphi)d\varphi\right| d\lambda \leqslant \frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{r}{2}\right)^{\kappa+1}}{2(\nu t)^{\frac{\kappa}{2}+\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\kappa}{2}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\kappa+1)}. \tag{23}$$

Тогда из неравенств (19), (20) и (23) получаем оценку для общего члена ряда (21):

$$\left|\sin\theta(\kappa+1/2)\, C_\kappa^{1/2}(\cos\theta)\, J_{\kappa+1/2}(\omega t)\int_0^{\Lambda} \lambda^{3/2} e^{-\nu t\lambda^2} J_{\kappa+1/2}(\lambda r)d\lambda\right| <$$

$$< \frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{r}{2}\right)^{\kappa+1/2}}{2(\nu t)^{(\kappa+3)/2}} \cdot \frac{(\kappa+1/2)\Gamma\left(\frac{\kappa}{2}+\frac{3}{2}\right)}{\kappa^{1/2}\cdot\Gamma(\kappa+1)}. \tag{24}$$

В правой части неравенства (24) стоит общий член числового ряда, который сходится, что легко показать, используя свойства гамма-функции. Тогда ряд (21) равномерно сходится при $\Lambda \geqslant 0$ и, в силу признака Дини, законно почленное интегрирование ряда в (18).

Получим более удобное для наших целей представление интеграла по λ в (18). Известно [10, т.2], что

$$\Gamma(\mu+1)\int_0^{\infty} J_\mu(\alpha t)e^{-\gamma^2 t^2} t^{\rho-1} dt = \frac{1}{2}\gamma^{-\rho}\Gamma\left(\frac{\mu+\rho}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2\gamma}\right)^{\mu} \Phi\left(\frac{\mu+\rho}{2};\mu+1,\frac{-\alpha^2}{4\gamma^2}\right),$$

где $\Phi(a;c,x)$ - вырожденная гипергеометрическая функция, допускающая при $0<\mathrm{Re}\,a<\mathrm{Re}\,c$ следующее интегральное представление (см. [10, т.1, с.243, формула (1)]):

$$\Phi(a;c,x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{xu} u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}du.$$

Интеграл по λ в (18) при $K=0$ вычисляется в явном виде при помощи формулы [10,т.2, с.60, формула (24)] :

$$\int_0^\infty \mathcal{J}_\mu(\alpha t) e^{-\gamma^2 t^2} t^{\mu+1} dt = \frac{\alpha^\mu}{(2\gamma^2)^{\mu+1}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right), \ Re\mu > -1, \ Re\gamma^2 > 0 .$$

Окончательно, интегрируя почленно ряд в (18) и используя соотношения, приведенные ранее, функцию $\mathcal{P}_1(t,\theta,r)$ можно представить в виде:

$$\mathcal{P}_1(t,\theta,r) = \frac{\sin\theta}{2^4 \pi^{3/2}} \cdot \frac{\sin\omega t}{\omega t(\nu t)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} +$$

$$+ \frac{\sin\theta}{2^{7/2}\pi} \cdot \frac{1}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^{3/2}} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{K+1/2}{2^K \Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} C_K^{1/2}(\cos\theta) \mathcal{J}_{K+1/2}(\omega t) \left(\frac{r}{\sqrt{\nu t}}\right)^K \times$$

$$\times \int_0^1 e^{-\frac{r^2}{4\nu t}\xi} \xi^{(K+1)/2} (1-\xi)^{(K-2)/2} d\xi . \tag{25}$$

При получении первого члена в (25) мы воспользовались представлениями $C_0^{1/2}(\cos\theta)$ и $\mathcal{J}_{1/2}(\omega t)$ через тригонометрические функции.

Ряд в (25) сходится равномерно относительно конечных r, $0 \le \theta \le \pi$ и $t \ge t_0 > 0$ в силу оценки

$$\left| \sin\theta \cdot \frac{K+1/2}{2^K \Gamma(K/2)} C_K^{1/2}(\cos\theta) \mathcal{J}_{K+1/2}(\omega t) \left(\frac{r}{\sqrt{\nu t}}\right)^K \int_0^1 e^{-\frac{r^2}{4\nu t}\xi} \xi^{(K+1)/2} (1-\xi)^{(K-2)/2} d\xi \right| <$$

$$< \frac{r^K}{(\nu t)^{K/2}} \cdot \frac{K+1/2}{2^K \cdot K^{1/2} \Gamma(K/2)} ,$$

которую легко можно получить, используя неравенства (19), (20).

Итак, ядро $\mathcal{P}_1(t,\theta,r)$ может быть представлено в виде равномерно сходящегося по θ и r ряда (25). Вводя функции $U_1(K,r,\theta,t)$ и $h_1(K,t)$ согласно формулам (17), можем представить $\mathcal{P}_1(t,\theta,r)$ в виде равномерно сходящегося ряда (16). Таким образом, лемма 1 для ядра $\mathcal{P}_1(t,\theta,r)$ доказана.

Доказательство леммы 1 для ядер $\mathcal{P}_j(t,\theta,r)$ $(j=\overline{2,4})$ проводится аналогично, где вместо неравенства для $C_n^{1/2}(\cos\theta)$ надо использовать неравенство (см.[12]):

$$C_n^{3/2}(\cos\theta) = \begin{cases} \theta^{-3/2} O(n^{1/2}), & Cn^{-1} \le \theta \le \pi/2, \\ O(n^2), & 0 \le \theta \le Cn^{-1}. \end{cases}$$

Для дальнейшего нам необходимо ввести следующие обозначения:

$$u_2(\kappa,r,\theta,t) = \frac{\sin\theta}{2^{9/2}\pi} \cdot \frac{\kappa+3/2}{2^\kappa \cdot \Gamma\left(\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{2}\right)} C_\kappa^{3/2}(\cos\theta) r^\kappa \int_0^1 e^{-\frac{r^2}{4\nu t\xi}} \xi^{(\kappa+2)/2} (1-\xi)^{(\kappa-1)/2} d\xi,$$

$$h_2(\kappa,t) = \frac{J_{\kappa+3/2}(\omega t)}{(\omega t)^{3/2}(\nu t)^2} \cdot \frac{1}{(\nu t)^{\kappa/2}},$$

$$u_3(\kappa,r,\theta,t) = \frac{\sin\theta}{2^{9/2}\pi} \cdot \frac{\kappa+3/2}{2^\kappa \Gamma\left(\frac{\kappa}{2}+1\right)} C_\kappa^{3/2}(\cos\theta) r^\kappa \int_0^1 e^{-\frac{r^2}{4\nu t\xi}} \xi^{\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{2}} (1-\xi)^{\frac{\kappa}{2}} d\xi, \tag{26}$$

$$h_3(\kappa,t) = (\nu t)^{1/2} h_2(\kappa,t),$$

$$u_4(\kappa,r,\theta,t) = \frac{\sin\theta}{2^{9/2}\pi} \cdot \frac{\kappa+1/2}{2^\kappa \Gamma\left(\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{2}\right)} C_\kappa^{1/2}(\cos\theta) r^\kappa \int_0^1 e^{-\frac{r^2}{4\nu t\xi}} \xi^{\kappa/2} (1-\xi)^{(\kappa-1)/2} d\xi,$$

$$h_4(\kappa,t) = \frac{J_{\kappa+1/2}(\omega t)}{(\omega t)^{1/2}\nu t} \cdot \frac{1}{(\nu t)^{\kappa/2}}.$$

Переходим теперь к изучению сверток $\vec{\mathcal{R}}_j(x,t), \mathcal{P}_j(x,t)$, относительно которых справедлива следующая

Лемма 2. *При выполнении условия A и $t \ge t_0 > 0$ свертки $\vec{\mathcal{R}}_j(x,t)$ и $\mathcal{P}_i(x,t)$ могут быть представлены в виде:*

$$\vec{\mathcal{R}}_j(x,t) = (\omega t)^{\delta_j^3} \sum_{\kappa=0}^{2p} \vec{U}_j(\kappa,t,x) h_j(\kappa,t) + O\left(\frac{1}{t^{\nu_j}}\right), \quad j = 1,2,3,$$

$$\mathcal{P}_i(x,t) = \sum_{\kappa=0}^{2p} U_{3+i}(\kappa,t,x) h_{2+i}(\kappa,t) + O\left(\frac{1}{t^{\nu_{3+i}}}\right), \quad i = 1,2, \tag{27}$$

где δ_j^i - символ Кронекера, функции $h_j(\kappa,t)$ определены в лемме 1, функции $\vec{U}_j(\kappa,t,x)$, $U_i(\kappa,t,x)$ определяются формулами (32) и (33) и $\nu_1 = \nu_3 = p+2$; $\nu_2 = p+7/2$; $\nu_4 = p+3$; $\nu_5 = p+3/2$.

Доказательство. Поскольку все рассматриваемые свертки однотипны, доказательство леммы 2 мы проведем только для одной из них, например для $\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)$.

Представим $\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)$ в следующем виде:

$$\vec{\mathcal{R}}_1(x,t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} r^2 \vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi)\left(\sum_{\kappa=0}^{2p} + \sum_{\kappa=2p+1}^{\infty}\right) u_1(\kappa,r,\theta,t)\times$$

$$\times h_1(\kappa,t)\,dr \equiv \vec{\mathcal{R}}_{11}(x,t) + \vec{\mathcal{R}}_{12}(x,t). \tag{28}$$

В силу сходимости несобственных интегралов и конечности суммы по κ законность почленного интегрирования по r , θ и φ в члене $\vec{\mathcal{R}}_{11}(x,t)$ не вызывает сомнения. Рассмотрим член $\vec{\mathcal{R}}_{12}(x,t)$ и покажем законность почленного интегрирования по r в бесконечных пределах, а также по θ и φ . Одновременно мы получим оценку по t члена $\vec{\mathcal{R}}_{12}(x,t)$, равномерную по x на компакте $K \subset E_3$.

Из леммы 1 следует, что ряд вида (16) сходится равномерно при любых конечных значениях r , $0 \le \theta \le \pi$ и $t \ge t_0 > 0$. Остается доказать, что ряд

$$\sum_{\kappa=2p+1}^{\infty} h_1(\kappa,t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} r^2 \vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi) u_1(\kappa,r,\theta,t)\,dr \tag{29}$$

равномерно сходится в интервале $R \ge 0$. Для этого оценим общий член ряда (29). При получении оценки мы используем (19), (20), (22) и неравенство $r^{2p+3}|\vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi)| < C$, справедливое в силу выполнения условия А и рассмотрения решения на компакте. Имеем

$$\left| h_1(\kappa,t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} r^2 \vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi) u_1(\kappa,r,\theta,t)\,dr \right| <$$

$$< \frac{2\pi^2}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^{(\kappa+3)/2}} \cdot \frac{\kappa+1/2}{2^\kappa \Gamma(\frac{\kappa}{2})\kappa^{1/2}} \int_0^\infty r^{\kappa-2p-1} \cdot r^{2p+3} \left|\vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi)\right| \times$$

$$\times \left(\int_0^1 e^{-\frac{r^2}{4\nu t}\xi} \xi^{(\kappa+1)/2} (1-\xi)^{(\kappa-2)/2} d\xi \right) dr < \frac{2\pi^2 C}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^{(\kappa+3)/2}} \cdot \frac{\kappa+1/2}{2^\kappa \Gamma(\frac{\kappa}{2})\kappa^{1/2}} \times$$

$$\times \int_0^1 \xi^{(\kappa+1)/2} (1-\xi)^{(\kappa-2)/2} \left(\int_0^\infty r^{\kappa-2p-1} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}\xi} dr \right) d\xi =$$

$$= \frac{C\pi^2}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^{p+3/2}} \cdot \frac{\kappa+1/2}{2^p \kappa^{1/2}} \cdot \frac{\Gamma(\kappa/2-p)\Gamma(p+3/2)}{\Gamma(\kappa/2+p+3/2)} . \qquad (30)$$

Законность перемены порядка интегрирования при выводе оценки (30) не вызывает сомнения. При получении (30) мы также воспользовались представлением бета-функции (см. [10, т.1, с.23, формула (1)]):

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} , \quad Re\, x > 0, \; Re\, y > 0 .$$

Из оценки (30) следует равномерная сходимость ряда (29) в интервале $R \geq 0$. Тогда в $\vec{\mathcal{R}}_{12}(x,t)$ законно почленное интегрирование по r в бесконечных пределах, и, кроме того, из (30) следует, что

$$\vec{\mathcal{R}}_{12}(x,t) = O\left(\frac{1}{t^{p+2}}\right) \qquad (31)$$

при $t \to \infty$ равномерно для $x \in K \subset E_3$. Введя обозначение

$$\vec{U}_1(\kappa,t,x) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^\infty r^2 \vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi) u_1(r,\kappa,\theta,t) dr, \qquad (32)$$

из (28), (31) получаем утверждение леммы 2 для свертки $\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)$.

Доказательство леммы для оставшихся сверток проводится аналогично, причем функции $U_j(\kappa,t,x)$ будут иметь вид:

$$\vec{U}_2(\kappa,t,x) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^\infty r^3 \vec{F}_2(x,r,\theta,\varphi) u_2(\kappa,r,\theta,t) dr ,$$

$$\vec{U}_3(\kappa,t,x) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^\infty r^2 \vec{F}_3(x,r,\theta,\varphi) u_3(\kappa,r,\theta,t) dr, \qquad (33)$$

$$U_4(\kappa,t,x)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}r^3F_4(x,r,\theta,\varphi)u_3(\kappa,r,\theta,t)dr,$$

$$U_5(\kappa,t,x)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}r^2F_5(x,r,\theta,\varphi)u_4(\kappa,r,\theta,t)dr, \tag{33}$$

где функции $u_j(\kappa,r,\theta,t)$ определяются в лемме 1 формулами (17),(26). Лемма 2 доказана.

§2. Доказательство теоремы

Опираясь на леммы 1,2, перейдем к доказательству теоремы, сформулированной в начале статьи.

Доказательство. Исследуем свертку $\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)$, которая может быть представлена в виде:

$$\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)=\sum_{\kappa=0}^{2p}\vec{U}_1(\kappa,t,x)h_1(\kappa,t)+O\left(\frac{1}{t^{p+2}}\right)=$$

$$=\frac{\vec{U}_1(0,t,x)}{\omega t(\nu t)^{3/2}}\sin\omega t+\frac{1}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^2}\sum_{\kappa=0}^{2p-1}\frac{\vec{U}_1(\kappa+1,t,x)}{(\nu t)^{\kappa/2}}J_{\kappa+3/2}(\omega t)+$$

$$+O\left(\frac{1}{t^{p+2}}\right)\equiv\vec{\mathcal{R}}_{11}^{0}(x,t)+\frac{1}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^2}\vec{\mathcal{R}}_{11}^{(1)}(x,t)+O\left(\frac{1}{t^{p+2}}\right). \tag{34}$$

Рассмотрим функцию $\vec{\mathcal{R}}_{11}^{(1)}(x,t)$. В дальнейшем, для краткости, аргументы t и x у функции $\vec{U}_1(\kappa,t,x)$ опускаем:

$$\vec{\mathcal{R}}_{11}^{(1)}(x,t)=\sum_{\kappa=0}^{2p-1}\frac{\vec{U}_1(\kappa+1)}{(\nu t)^{\kappa/2}}J_{\kappa+3/2}(\omega t)=$$

$$=\sum_{\kappa=0}^{p-1}\frac{\vec{U}_1(2\kappa+2)}{(\nu t)^{\kappa+1/2}}J_{2\kappa+5/2}(\omega t)+\sum_{\kappa=0}^{p-1}\frac{\vec{U}_1(2\kappa+1)}{(\nu t)^{\kappa}}J_{2\kappa+3/2}(\omega t).$$

Заменим функции Бесселя полуцелого порядка их представлением через тригонометрические функции [10, т.2, с.89, формула (1)] вида:

$$J_{n+1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\Big[\sin\Big(z-\frac{n\pi}{2}\Big)\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^m(n+1/2,2m)(2z)^{-2m}+$$

$$+\cos\Big(z-\frac{n\pi}{2}\Big)\sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^m(n+1/2,2m+1)(2z)^{-2m-1}\Big],$$

где $n=0,1,2,\dots[q]$- целая часть числа q и

$$(\nu,m)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu+m)}{m!\,\Gamma(\frac{1}{2}+\nu-m)}\qquad \text{- символ Ганкеля.}$$

Тогда вектор-функция $\vec{\mathcal{R}}^{(1)}_{11}(x,t)$ может быть представлена в виде:

$$\vec{\mathcal{R}}^{(1)}_{11}(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi\omega t}}\cdot\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\sin\omega t}{(\nu t)^k}\sum_{n=0}^{k}\Big\{\frac{(-1)^{n+k+1}(2k+5/2,2n)}{(\nu t)^{1/2}(2\omega t)^{2n}}\vec{U}_1(2k+2)+$$

$$+\frac{(-1)^{n+k}(2k+3/2,2n+1)}{(2\omega t)^{2n+1}}\vec{U}_1(2k+1)\Big\}+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi\omega t}}\cdot\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\cos\omega t}{(\nu t)^k}\sum_{n=0}^{k}\Big\{\frac{(-1)^{n+k+1}(2k+5/2,2n+1)}{(\nu t)^{1/2}(2\omega t)^{2n+1}}\vec{U}_1(2k+2)+$$

$$+\frac{(-1)^{n+k+1}(2k+3/2,2n)}{(2\omega t)^{2n}}\vec{U}_1(2k+1)\Big\}+\sqrt{\frac{2}{\pi\omega t}}\cdot\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\vec{U}_1(2k+2)}{(\nu t)^{k+1/2}}\times$$

$$\times\frac{\sin\omega t\cdot(2k+5/2,2k+2)}{(2\omega t)^{2k+2}}.$$

Перегруппируем члены в двойных суммах. При этом в сумме появятся члены, имеющие оценку $O\Big(\frac{1}{t^\ell}\Big)$ при $\ell\geqslant p-1/2$; их включим в остаток. Тогда член $\vec{\mathcal{R}}^{(1)}_{11}(x,t)$ может быть представлен в виде:

$$\vec{\mathcal{R}}^{(1)}_{11}(x,t)=\frac{S_1(\vec{U}_1)}{t^{1/2}}\cos\omega t+\frac{S_2(\vec{U}_1)}{t}\sin\omega t+$$

$$+\frac{1}{t^{3/2}}\sum_{n=0}^{2p-5}\left\{M_n(\vec{U}_1)\sin\omega t+N_n(\vec{U}_1)\cos\omega t\right\}\frac{1}{t^{n/2}}+O\left(\frac{1}{t^{p-1/2}}\right), \tag{35}$$

где

$$S_1(\vec{U}_1)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{(3/2,0)\vec{U}_1(1)}{\omega^{1/2}},$$

$$S_2(\vec{U}_1)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{(5/2,0)\vec{U}_1(2)}{\omega^{1/2}\nu^{1/2}},$$

$$M_{2n}(\vec{U}_1)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2\omega^{3/2}}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{3}]}\frac{(-1)^{n-k}(2n-4k+3/2,2k+1)}{(2\omega)^{2k}\nu^{n-2k}}\vec{U}_1(2n-4k+1),$$

$$M_{2n+1}(\vec{U}_1)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}}\sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{3}]}\frac{(-1)^{n-k}(2n-4k+9/2,2k)}{(2\omega)^{2k}\nu^{n-2k}}\vec{U}_1(2n-4k+4)+ \tag{36}$$

$$+\delta_{n+1}^{2+3s}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\omega^{1/2}\nu^{1/2}}\cdot\frac{(2s+5/2,2s+2)}{(2\omega)^{k+2}\nu^{k}}\vec{U}_1(2s+2),\quad s=0,1,2,\ldots;$$

$$N_{2n}(\vec{U}_1)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\omega^{1/2}\nu}\cdot\sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{3}]}\frac{(-1)^{n-k}(2n-4k+7/2,2k)}{(2\omega)^{2k}\nu^{n-2k}}\vec{U}_1(2n-4k+3),$$

$$N_{2n+1}(\vec{U}_1)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2\omega^{3/2}\nu^{1/2}}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{3}]}\frac{(-1)^{n-k+1}(2n-4k+5/2,2k+1)}{(2\omega)^{2k}\nu^{n-2k}}\vec{U}_1(2n-4k+2).$$

Из (34) и (35) получаем представление свертки $\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)$ вида:

$$\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)=\frac{\vec{U}_1(0)}{\omega t(\nu t)^{3/2}}\sin\omega t+\frac{S_1(\vec{U}_1)}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^2 t^{1/2}}\cos\omega t+\frac{S_2(\vec{U}_1)}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^2 t}\sin\omega t+$$

$$+\frac{1}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^2 t^{3/2}}\sum_{n=0}^{2p-5}\left\{M_n(\vec{U}_1)\sin\omega t+N_n(\vec{U}_1)\cos\omega t\right\}\frac{1}{t^{n/2}}+O\left(\frac{1}{t^{p+2}}\right). \tag{37}$$

Аналогично предыдущему, свертки $\vec{\mathcal{R}}_2(x,t)$ и $\vec{\mathcal{R}}_3(x,t)$ могут быть представлены следующим образом:

$$\vec{\mathcal{R}}_2(x,t)=\frac{S_1(\vec{U}_2^*)}{(\omega t)^{3/2}(\nu t)^2 t^{1/2}}\cos\omega t+\frac{S_2(\vec{U}_2^*)}{(\omega t)^{3/2}(\nu t)^2 t}\sin\omega t+$$

$$+\frac{1}{(\omega t)^{3/2}(\nu t)^2 t^{3/2}}\sum_{n=0}^{2p-7}\left\{M_n(\vec{U}_2^*)\sin\omega t+N_n(\vec{U}_2^*)\cos\omega t\right\}\frac{1}{t^{n/2}}+O\left(\frac{1}{t^{p+2}}\right),$$

$$\vec{\mathcal{R}}_3(x,t)=\frac{S_1(\vec{U}_3^*)}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^{3/2}t^{1/2}}\cos\omega t+\frac{S_2(\vec{U}_3^*)}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^{3/2}t}\sin\omega t+ \tag{38}$$

$$+\frac{1}{(\omega t)^{1/2}(\nu t)^{3/2}t^{3/2}}\sum_{n=0}^{2p-4}\left\{M_n(\vec{U}_3^*)\sin\omega t+N_n(\vec{U}_3^*)\cos\omega t\right\}\frac{1}{t^{n/2}}+O\left(\frac{1}{t^{p+2}}\right),$$

где функции S_i , M_n и N_n определяются формулами (36), а

$$\vec{U}_j^*(\kappa,t,x)=\vec{U}_j(\kappa-1,t,x),\quad j=1,2,3.$$

В представлениях (37), (38) функции S_i , M_n и N_n зависят от t в силу зависимости от t их аргументов $\vec{U}_j^*=\vec{U}_j(\kappa,t,x)$. Разложим показательную функцию, входящую в функции $u_j(\kappa,r,\theta,t)(j=\overline{1,3})$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа до члена $p-1$. Тогда из явного вида функций $\vec{U}_j$ (32) и (33) следует их представление

$$\vec{U}_j(\kappa,t,x)=\sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{\vec{Q}_j(\kappa,\mu,x)}{t^\mu}+\frac{1}{t^p}R(\vec{U}_j(\kappa)),\quad j=1,2,3, \tag{39}$$

где $\vec{Q}_j(\kappa,\mu,x)$ имеют вид:

$$\vec{Q}_1(0,\mu,x)=\frac{(-1)^\mu}{2^4\pi^{3/2}\mu!(4\nu)^\mu}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^\infty r^{2+2\mu}\vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi)dr,$$

$$\vec{Q}_1(\kappa,\mu,x)=\frac{(-1)^\mu\cdot\Gamma(\mu+\frac{\kappa}{2}+\frac{3}{2})\cdot(\kappa+1/2)}{2^{\kappa+7/2}\cdot\pi\cdot\Gamma(\mu+\kappa+3/2)\mu!(4\nu)^\mu}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\times$$

$$\times C_\kappa^{1/2}(\cos\theta)d\theta\int_0^\infty r^{2+\kappa+2\mu}\vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi)dr,\quad \kappa=1,2,\dots;$$

$$\vec{Q}_2(\kappa,\mu,x) = \frac{(-1)^{\mu}(\kappa+3/2)\Gamma(\mu+\frac{\kappa}{2}+2)}{2^{\kappa+9/2}\cdot\pi\Gamma(\mu+\kappa+5/2)\mu!(4\nu)^{\mu}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\times \tag{40}$$

$$\times C_\kappa^{3/2}(\cos\theta)d\theta\int_0^\infty r^{3+\kappa+2\mu}\vec{F}_2(x,r,\theta,\varphi)dr,$$

$$\vec{Q}_3(\kappa,\mu,x) = \frac{(-1)^{\mu}(\kappa+3/2)\Gamma(\mu+\frac{\kappa}{2}+\frac{3}{2})}{2^{\kappa+9/2}\cdot\pi\Gamma(\mu+\kappa+5/2)\mu!(4\nu)^{\mu}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\times$$

$$\times C_\kappa^{3/2}(\cos\theta)d\theta\int_0^\infty r^{2+\kappa+2\mu}\vec{F}_3(x,r,\theta,\varphi)dr.$$

При нахождении $\vec{Q}_j(\kappa,\mu,x)$ интегралы по ξ мы получали в явном виде при помощи представления бета-функции, приведенного ранее. Остаточные члены $R(\vec{U}_j(\kappa))$ также выписываются в явном виде, например, при $j=1$:

$$R(\vec{U}_1(0)) = \frac{(-1)^p}{2^4\pi^{3/2}p!(4\nu)^p}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^\infty r^{2+2p}e^{-\frac{r^2}{4\nu t}\psi}\vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi)dr,$$

$$R(\vec{U}_1(\kappa)) = \frac{(-1)^p(\kappa+1/2)}{2^{\kappa+7/2}\cdot\pi\cdot p!\Gamma(\frac{\kappa}{2})(4\nu)^p}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta C_\kappa^{1/2}(\cos\theta)d\theta\times$$

$$\times\int_0^\infty r^{2+\kappa+2p}\vec{F}_1(x,r,\theta,\varphi)dr\int_0^1 e^{-\frac{r^2}{4\nu t}\xi\psi}\xi^{\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{2}+p}(1-\xi)^{\frac{\kappa}{2}-1}d\xi,\ 0<\psi<1.$$

Далее, для краткости записи аргументы κ и x у $\vec{Q}_j(\kappa,\mu,x)$ опускаем. Из (36) и (39) в силу линейности функций S_i , M_n и N_n следует, что

$$S_i(\vec{U}_j) = \sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{S_i(\vec{Q}_j(\mu))}{t^\mu} + \frac{1}{t^p}S_i(R(\vec{U}_j)),\quad i=1,2;$$

$$M_n(\vec{U}_j) = \sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{M_n(\vec{Q}_j(\mu))}{t^\mu} + \frac{1}{t^p}M_n(R(\vec{U}_j)), \tag{41}$$

$$N_n(\vec{U}_j) = \sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{N_n(\vec{Q}_j(\mu))}{t^\mu} + \frac{1}{t^p}N_n(R(\vec{U}_j)).$$

Из явного вида функций $S_i(R(\vec{U}_j))$, $M_n(R(\vec{U}_j))$, $N_n(R(\vec{U}_j))$ и выполнения условия А следует, что на компакте $K \subset E_3$ эти функции будут ограничены.

Подставляя (41) в (37) и (38), группируя члены по степеням $\frac{1}{t^{1/2}}$ и включая члены, имеющие оценку $O(1/t^{\ell})$ при $\ell \geq p+2$, в остаток, получаем асимптотическое разложение сверток $\vec{\mathcal{R}}_j(x,t)$ $(j=1,2,3)$. Тогда из (11) следует асимптотическое разложение вектора $\vec{v}(x,t)$:

$$\vec{v}(x,t) = \frac{1}{t^{5/2}} \sum_{n=0}^{2p-2} \left\{ \vec{A}_n(x) \sin\omega t + \vec{B}_n(x) \cos\omega t \right\} \frac{1}{t^{n/2}} + O\left(\frac{1}{t^{p+2}}\right), \tag{42}$$

где

$$\vec{A}_n(x) = \sum_{\mu=0}^{[\frac{n}{2}]} \vec{M}^{(1)}_{n-2\mu}(x,\mu), \quad \vec{B}_n(x) = \sum_{\mu=0}^{[\frac{n}{2}]} \vec{N}^{(1)}_{n-2\mu}(x,\mu),$$

а функции $\vec{M}_n^{(1)}(x,\mu)$ и $\vec{N}_n^{(1)}(x,\mu)$ определяются следующим образом (здесь $\vec{Q}_j^*(K,\mu,x) = \vec{Q}_j(K-1,\mu,x)$):

$$\begin{aligned}
&\vec{M}_0^{(1)}(x,\mu) = \frac{\vec{Q}_1(0,\mu,x)}{\omega\nu^{3/2}}; \quad \vec{N}_0^{(1)}(x,\mu) = \frac{S_1(\vec{Q}_3^*(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}};\\
&\vec{M}_1^{(1)}(x,\mu) = \frac{S_2(\vec{Q}_3^*(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}}; \quad \vec{N}_1^{(1)}(x,\mu) = \frac{S_1(\vec{Q}_1(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{2}};\\
&\vec{M}_2^{(1)}(x,\mu) = \frac{S_2(\vec{Q}_1(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{2}} + \frac{M_0(\vec{Q}_3^*(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}}; \quad \vec{N}_2^{(1)}(x,\mu) = \frac{N_0(\vec{Q}_3^*(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}};\\
&\vec{M}_3^{(1)}(x,\mu) = \frac{M_1(\vec{Q}_3^*(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}} + \frac{M_0(\vec{Q}_1(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{2}};\\
&\vec{N}_3^{(1)}(x,\mu) = \frac{S_1(\vec{Q}_2^*(\mu))}{\omega^{3/2}\nu^{2}} + \frac{N_1(\vec{Q}_3^*(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}} + \frac{N_0(\vec{Q}_1(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{2}};\\
&\vec{M}_4^{(1)}(x,\mu) = \frac{S_2(\vec{Q}_2^*(\mu))}{\omega^{3/2}\nu^{2}} + \frac{M_2(\vec{Q}_3^*(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}} + \frac{M_1(\vec{Q}_1(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{2}};\\
&\vec{N}_4^{(1)}(x,\mu) = \frac{N_2(\vec{Q}_3^*(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}} + \frac{N_0(\vec{Q}_1(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{2}};
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\vec{M}_n^{(1)}(x,\mu) = \frac{M_{n-2}(\vec{Q}_3^*(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}} + \frac{M_{n-3}(\vec{Q}_1(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^2} + \frac{M_{n-5}(\vec{Q}_2^*(\mu))}{\omega^{3/2}\nu^2};$$

$$\vec{N}_n^{(1)}(x,\mu) = \frac{N_{n-2}(\vec{Q}_3^*(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}} + \frac{N_{n-3}(\vec{Q}_1(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^2} + \frac{N_{n-5}(\vec{Q}_2^*(\mu))}{\omega^{3/2}\nu^2};$$

$$n=\overline{5,\,2p-2}\,;\quad \mu=\overline{0,p-1}.$$

Аналогично получается асимптотическое разложение давления $P(x,t)$, которое имеет вид:

$$P(x,t) = \frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{2p-2}\left\{\alpha_n(x)\sin\omega t + \beta_n(x)\cos\omega t\right\}\frac{1}{t^{n/2}} + O\left(\frac{1}{t^{p+3/2}}\right), \tag{44}$$

где

$$\alpha_n(x) = \sum_{\mu=0}^{[\frac{n}{2}]} M_{n-2\mu}^{(2)}(x,\mu);\quad \beta_n(x) = \sum_{\mu=0}^{[\frac{n}{2}]} N_{n-2\mu}^{(2)}(x,\mu),$$

а функции $M_n^{(2)}(x,\mu)$ и $N_n^{(2)}(x,\mu)$ определяются следующим образом (здесь, как и раньше, $Q_i^*(\kappa,\mu,x) = Q_i(\kappa-1,\mu,x)$; $i=4,5$):

$$M_0^{(2)}(x,\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{Q_5(0,\mu,x)}{\omega\nu};\quad N_0^{(2)}(x,\mu) = 0;$$

$$M_1^{(2)}(x,\mu) = 0\,;\qquad N_1^{(2)}(x,\mu) = \frac{S_1(Q_5(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}};$$

$$M_2^{(2)}(x,\mu) = \frac{S_2(Q_5(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}};\qquad N_2^{(2)}(x,\mu) = 0;$$

$$M_3^{(2)}(x,\mu) = \frac{M_0(Q_5(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}};\qquad N_3^{(2)}(x,\mu) = \frac{S_1(Q_4^*(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}} + \frac{N_0(Q_5(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}};$$

$$M_4^{(2)}(x,\mu) = \frac{S_2(Q_4^*(\mu))}{\omega^{3/2}\nu^{3/2}} + \frac{M_1(Q_5(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}};\quad N_4^{(2)}(x,\mu) = \frac{N_1(Q_5(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}}; \tag{45}$$

$$M_n^{(2)}(x,\mu) = \frac{M_{n-3}(Q_5(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}} + \frac{M_{n-5}(Q_4^*(\mu))}{\omega^{3/2}\nu^{3/2}};$$

$$N_n^{(2)}(x,\mu) = \frac{N_{n-3}(Q_5(\mu))}{\omega^{1/2}\nu^{3/2}} + \frac{N_{n-5}(Q_4^*(\mu))}{\omega^{3/2}\nu^{3/2}};$$

$$n=\overline{5,2p-2}\ ; \quad \mu=\overline{0,p-1}.$$

Здесь функции $Q_i(\kappa,\mu,x)$ (i = 4,5) имеют вид:

$$Q_4(\kappa,\mu,x) = \frac{(-1)^{\mu}(\kappa+3/2)\Gamma(\mu+\frac{\kappa}{2}+\frac{3}{2})}{2^{\kappa+9/2}\cdot\pi\cdot\Gamma(\mu+\kappa+5/2)\mu!(4\nu)^{\mu}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\times$$

$$\times C_\kappa^{3/2}(\cos\theta)d\theta\int_0^{\infty}r^{3+\kappa+2\mu}F_4(x,r,\theta,\varphi)dr, \tag{46}$$

$$Q_5(\kappa,\mu,x) = \frac{(-1)^{\mu}\cdot(\kappa+1/2)\Gamma(\mu+\frac{\kappa}{2}+1)}{2^{\kappa+7/2}\cdot\pi\cdot\Gamma(\mu+\kappa+3/2)\mu!(4\nu)^{\mu}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\times$$

$$\times C_\kappa^{1/2}(\cos\theta)d\theta\int_0^{\infty}r^{2+\kappa+2\mu}F_5(x,r,\theta,\varphi)dr.$$

Итак, нами получено асимптотическое разложение решения задачи (1),(2). Переходя к декартовым координатам, вычислим первые коэффициенты разложения. Они будут иметь вид (здесь $x^*=(x_1,x_2,-x_3)$):

$$\vec{A}_0(x) = \frac{1}{2^4\pi^{3/2}\omega\nu^{3/2}}\int_{E_3}\left\{\vec{v}^{\,0}(x-y)+\vec{v}^{\,0}(x-y^*)\right\}dy,$$

$$\vec{B}_0(x) = -\frac{3(3/2,0)\Gamma(3/2)}{2^5\cdot\pi^{3/2}\cdot\omega\nu^{3/2}\cdot\Gamma(5/2)}\int_{E_3}\left\{\begin{pmatrix} v_2^0\\ -v_1^0\\ 0\end{pmatrix}(x-y)+\begin{pmatrix} v_2^0\\ -v_1^0\\ 0\end{pmatrix}(x-y^*)\right\}dy,$$

$$\alpha_0(x) = \frac{1}{2^4\pi^{3/2}\nu\Gamma(3/2)}\int_{E_3}\left\{v_3^0(x-y)-v_3^0(x-y^*)\right\}dy,$$

$$\beta_0(x) = 0,$$

$$\vec{A}_1(x) = -\frac{15(5/2,0)\Gamma(2)}{2^7\cdot\pi\omega\nu^2\Gamma(7/2)}\int_{E_3} y_3\left\{\begin{pmatrix} v_2^0 \\ -v_1^0 \\ 0\end{pmatrix}(x-y)+\begin{pmatrix} v_2^0 \\ -v_1^0 \\ 0\end{pmatrix}(x-y^*)\right\}dy,$$

$$\vec{B}_1(x) = -\frac{3(3/2,0)\Gamma(2)}{2^5\pi^{3/2}\omega\nu^2\Gamma(5/2)}\int_{E_3} y_3\{\vec{v}^0(x-y)+\vec{v}^0(x-y^*)\}dy.$$

Известно [13], что любой вектор $\vec{u}(x)\in \mathcal{J}_\ell^*(E_n)$, где $\mathcal{J}_\ell^*(E_n)$ есть подпространство соленоидальных векторов пространства $W_1^\ell(E_n)$, удовлетворяет условию $\int_{E_n}\vec{u}(x)dx=0$, $n\geq 2$. Из этого условия вытекает, что коэффициенты $\vec{A}_0(x), \vec{B}_0(x)$ и $\alpha_0(x)$ будут равны нулю. Коэффициенты $\vec{A}_1(x)$ и $\vec{B}_1(x)$ будут равны нулю в силу нечетности по y_3 функции, стоящей под знаком интеграла. Тогда в (42) суммирование фактически начинается с $n=2$, а в (44) - $n=1$.

Переобозначим коэффициенты $\vec{A}_n(x)$, $\vec{B}_n(x)$, $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$ следующим образом:

$$\vec{\mathcal{A}}_n(x) = \vec{A}_{n+2}(x),\quad \vec{\mathcal{B}}_n(x) = \vec{B}_{n+2}(x),\qquad n=\overline{0,2p-4},$$

$$a_n(x) = \alpha_{n+1}(x),\quad b_n(x) = \beta_{n+1}(x).\qquad n=\overline{0,2p-3},$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф.В.Н.Масленниковой за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Масленникова В.Н. О скорости затухания вихря в вязкой жидкости.-Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1973, т.126, с.46-72.

2. Масленникова В.Н. О скорости затухания вихря в вязкой жидкости в случае двух пространственных переменных.- Докл.АН СССР, 1973, т.212, № 4, с.834-837.

3. Масленникова В.Н. О скорости убывания при большом времени решения системы Соболева с учетом вязкости.- Мат.сб., 1973, т.92, № 4, с.589-610.

4. Масленникова В.Н. Оценки в L_p и асимптотика при $t\to\infty$ решения задачи Коши для системы С.Л.Соболева.- Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1968, т.103, с.117-141.

5. Масленникова В.Н., Боговский М.Е. О системах Соболева с время пространственными переменными.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л.Соболева).- Новосибирск; 1976, т.2, с.49-68.

6. Масленникова В.Н., Боговский М.Е. О системах Соболева в случае двух пространственных переменных.- Сиб.мат.журн., 1977, т.18, № 5, с. 1088-1110.

7. Масленникова В.Н. Явные представления и априорные оценки решений граничных задач для систем Соболева.- Сиб.мат.журн., 1968, т.9, № 5, с.1182-1198.

8. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики.- Изв.АН СССР. Серия мат., 1954, т.18, № 1, с.3-50.

9. Ватсон Г. Теория бесселевых функций.- М.: ИЛ., 1949, т.1.- 798 с.

10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.- М.: Наука, 1973, т.2.-296 с.

11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.- М.: Физматгиз., 1963.-1100 с.

12. Сегё Г. Ортогональные многочлены.-М.: Физматгиз., 1962.-500 с.

13. Масленникова В.Н., Боговский М.Е. Асимптотическое поведение решений краевых задач для системы Соболева в полупространстве и явление погранслоя.- В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики (Труды Ин-та мат.СО АН СССР).- Новосибирск: 1978, с.109-152.