УДК 517+539.3

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ КОНТАКТА ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ

Хлуднев А.М. (Новосибирск)

В работе в точной постановке исследуется задача о контакте пологой оболочки с жестким телом (штампом). Одним из центральных вопросов в такого рода задачах является анализ сил взаимодействия между контактирующими телами и, в частности, выяснение условий, при которых возможны концентрации напряжений. Появление последних связано с негладкостью решения и зависит от характера наклона штампа к поверхности оболочки. Основной результат работы состоит в доказательстве того, что если оболочка не параллельна штампу, то концентрации напряжений быть не может. Точная постановка задачи состоит в минимизации функционала энергии на выпуклом множестве, определяемом из условия контакта. При этом не делается никаких априорных предположений о характере контактного множества. Решение находится из вариационного неравенства.

Из большого числа работ, близких к рассматриваемой теме, отметим [1-5]. Методы приближенного решения задач о контакте пластин и оболочек с жесткими телами изложены в [6-8].

Уравнения равновесия тонких пологих оболочек имеют следующий вид [9] :

$$a_1 \Delta^2 w + k_1 N_{11} + k_2 N_{22} = f, \tag{1}$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} = -f_1, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} = -f_2, \tag{2}$$

$$N_{11} = \alpha(\varepsilon_{11} + \sigma\varepsilon_{22}), \quad N_{22} = \alpha(\varepsilon_{22} + \sigma\varepsilon_{11}), \quad N_{12} = \frac{\alpha}{2}(1-\sigma)\varepsilon_{12}, \tag{3}$$

$$\varepsilon_{11} = u_{x_1} + k_1 w, \quad \varepsilon_{22} = v_{x_2} + k_2 w, \quad \varepsilon_{12} = u_{x_2} + v_{x_1}. \tag{4}$$

Здесь x_1, x_2 - ортогональные координаты на поверхности оболочки; $(x_1, x_2) \in \Omega$; u, v, w - перемещения оболочки вдоль линий Ox_1 и Ox_2

и вдоль нормали соответственно; N_{11}, N_{22}, N_{12} - усилия в срединной поверхности; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ - деформации; $a_1 = \alpha a$, α, σ, a - положительные постоянные, $0 < \sigma < \frac{1}{2}$; f, f_1, f_2 - внешние нагрузки вдоль осей z, x_1, x_2.

Считаем, что ось z направлена вдоль нормали к поверхности оболочки, K_1, K_2 - кривизны оболочки (заданные функции). Далее для простоты полагаем $\alpha = 1$.

Предположим, что оболочка на границе закреплена:

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = u = v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

n - внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Функционал энергии имеет вид:

$$\Pi(\omega) = a\int_\Omega (\Delta w)^2 dx + \int_\Omega \Big[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\sigma\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} +$$

$$+ \frac{1}{2}(1-\sigma)\varepsilon_{12}^2\Big] dx - 2\int_\Omega \big(fw + f_1 u + f_2 v\big)\, dx, \quad \omega = (w, u, v). \tag{5}$$

Пусть $z = \Phi(x_1, x_2)$ есть форма поверхности штампа. Тогда смещения точек срединной поверхности w, u, v в линейном приближении удовлетворяют ограничению

$$w - U\cdot\nabla\Phi \geqslant \Phi, \quad U = (u, v), \quad \nabla\Phi = \left(\Phi_{x_1}, \Phi_{x_2}\right). \tag{6}$$

Обозначим через $H_0^s(\Omega) \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^s(\Omega)$ пространство С.Л.Соболева, $H(\Omega) = H_0^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$. Пусть K - множество функций из $H(\Omega)$, удовлетворяющих неравенству (6) почти всюду в Ω. Предполагаем далее, что $f, f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$, $\Phi \in C^\infty(\bar\Omega)$.

Можно доказать, что существует решение задачи минимизации функционала Π на K. Это решение удовлетворяет неравенству

$$\omega \in K: \quad \left(\Pi'(\omega), \tilde\omega - \omega\right) \geqslant 0 \qquad \forall \tilde\omega \in K, \tag{7}$$

$\Pi'(\omega)$ - градиент функционала $\Pi(\omega)$ в $H(\Omega)$.

Заметим, что если для некоторого зектора $\omega_0 = (w_0, u_0, v_0) \in H(\Omega)$ справедливо неравенство $w_0 - U_0\cdot\nabla\Phi \geqslant 0$, $U_0 = (u_0, v_0)$, то

$$\left(\Pi'(w), \omega_0\right) \geqslant 0. \tag{8}$$

Действительно, так как в точке ω достигается минимум, а $\omega + \varepsilon\omega_0 \in K$, $\varepsilon > 0$, то $\Pi(\omega + \varepsilon\omega_0) \geqslant \Pi(\omega)$. Сокращая на ε

и устремляя ε к нулю, получаем (8).

Теорема 1. *В области Ω можно задать меру μ, определенную на σ-кольце борелевских подмножеств такую, что для любого вектора $\tilde{\omega}=(\tilde{w},\tilde{U})\in H(\Omega)\cap C_0^0(\Omega)$ имеет место представление*

$$(\Pi'(\omega),\tilde{\omega})=\int_\Omega \frac{\tilde{w}-\tilde{U}\cdot\nabla\Phi}{\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}}\,d\mu. \tag{9}$$

Доказательство. Выберем вектор $\tilde{\omega}=(\tilde{w},\tilde{U})\in H(\Omega)\cap C_0^0(\Omega)$ и образуем функцию

$$\tilde{\omega}_*=\frac{\tilde{w}-\tilde{U}\cdot\nabla\Phi}{\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}}\quad. \tag{10}$$

Линейное пространство всех таких функций обозначим через V. Определим на V функционал $\psi(\tilde{\omega}_*)=(\Pi'(\omega),\tilde{\omega})$. Значение этого функционала определяется такой формулой однозначно. В самом деле, пусть вектор $\tilde{\tilde{\omega}}\in H(\Omega)\cap C_0^0(\Omega)$ таков, что функция $\tilde{\tilde{\omega}}_*$, построенная аналогично $\tilde{\omega}_*$ с помощью (10), совпадает с $\tilde{\omega}_*$. Тогда $\tilde{\omega}_*-\tilde{\tilde{\omega}}_*\geqslant 0$ и $\tilde{\tilde{\omega}}_*-\tilde{\omega}_*\geqslant 0$, и, следовательно, в силу (8), $(\Pi'(\omega),\tilde{\omega})=(\Pi'(\omega),\tilde{\tilde{\omega}})$, т.е. $\psi(\tilde{\omega}_*)=\psi(\tilde{\tilde{\omega}}_*)$. Таким образом, ψ - линейный и положительный функционал на V. Его можно расширить на пространство финитных непрерывных функций. Действительно, выберем $h\in C_0^0(\Omega)$, и пусть $\varphi_n\in C_0^\infty(\Omega)$ - такие функции, что $\varphi_n\to h$ в $C_0^0(\Omega)$. Докажем, что последовательность $\psi(\varphi_n)$ будет сходиться. Для этого обозначим через $S(\varphi_n)$ носители φ_n, считая, что они принадлежат компакту $B\subset\Omega$. Пусть $g\in C_0^\infty(\Omega)$ - такая функция, что $g\equiv 1$ на B и $0\leqslant g\leqslant 1$ всюду. Тогда

$$|\varphi_m(x)-\varphi_n(x)|\leqslant\delta(m,n)g(x),\quad \delta(m,n)=\max_\Omega|\varphi_m(x)-\varphi_n(x)|.$$

В силу положительности функционала ψ, отсюда следует

$$|\psi(\varphi_m)-\psi(\varphi_n)|\leqslant\delta(m,n)\psi(g).$$

Так как $\delta(m,n)\to 0$ при $m,n\to\infty$, то получаем существование предела последовательности $\psi(\varphi_n)$. Обозначим этот предел $\psi(h)$. Ясно, что он не зависит от выбора φ_n, а ψ будет линейным и положительным функционалом. Для построения аппроксимирующей последовательности векторов в Ω достаточно положить $\tilde{w}_n=\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}\varphi_n$, $U_n=0$. Однако произвольный линейный положительный функционал на пространстве непрерывных финит-

ных функций определяется мерой μ :

$$\psi(h) = \int\limits_{\dot{\Omega}} h\,d\mu .$$

Для функции $\tilde{\omega}_*$, построенной по вектору $\tilde{\omega} \in H(\Omega) \cap C_0^{\circ}(\Omega)$ с помощью (10), это представление совпадает с (9). Теорема доказана.

Регулярность решения в значительной степени определяет характер силы взаимодействия между оболочкой и штампом. Ниже доказывается, что локальная гладкость решения на единицу выше по сравнению с вариационной. Этот результат используется при доказательстве теоремы 3 об отсутствии концентрации напряжений.

Теорема 2. *Пусть область* $\Omega_0 \subset \Omega$ *такова, что в* Ω_0 *справедливы неравенства* $|\Phi_{x_1}| > 0$, $|\Phi_{x_2}| > 0$. *Тогда*

$$(w, u, v) \in H^3_{loc}(\Omega_0) \times H^2_{loc}(\Omega_0) \times H^2_{loc}(\Omega_0).$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$\Delta_{i\tau} h(x) = \left[h(x+\tau e_i) - 2h(x) + h(x-\tau e_i)\right]\tau^{-2}, \quad d_{i\tau} h(x) = \left[h(x+\tau e_i) - h(x)\right]\tau^{-1};$$

e_i - единичные орты. Возьмем области $\Omega_3 \subset \Omega_2 \subset \Omega_1 \subset \Omega_0$ так, чтобы расстояние от $\partial\Omega_2$ до $\partial\Omega_1$ было не меньше $q > 0$, $q - const$, $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_0$, $\bar{\Omega}_3 \subset \Omega_2$. Предположим, что $\Phi_{x_1x_1} \geq 0$, $\Phi_{x_2x_2} \geq 0$ в Ω_0 . Это предположение не является принципиальным и вводится для простоты. Выбирая функцию $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega_2)$, $\varphi \equiv 1$, на Ω_3 , $\varphi \geq 0$ всюду, $|\varphi| \leq 1$, можно показать, что при $0 < \lambda < \frac{1}{2}\tau^2$, $0 < \tau < q$, вектор $(w_\lambda, u_\lambda, v_\lambda)$ с компонентами

$$\begin{aligned} w_\lambda &= w + \lambda\varphi^2 \Delta_{i\tau} w, \\ u_\lambda &= u + \lambda\varphi^2 \Phi_{x_1}^{-1} \Delta_{i\tau}(u\Phi_{x_1}), \\ v_\lambda &= v + \lambda\varphi^2 \Phi_{x_2}^{-1} \Delta_{i\tau}(v\Phi_{x_2}) \end{aligned} \tag{11}$$

принадлежит множеству K . После подстановки $\tilde{\omega} = (w_\lambda, u_\lambda, v_\lambda)$ в (7) и выделения "главных" членов получим неравенство

$$\|d_{i\tau}(\varphi w)\|_2^2 + \|d_{i\tau}(\varphi U)\|_1^2 \leq c\Big\{\|f\|_0^2 + \|f_1\|_0^2 + \|f_2\|_0^2 + \|u\|_1^2 +$$

$$+ \|v\|_1^2 + \left(\|u\|_1 + \|v\|_1\right)\left(\|d_{i\tau}(\varphi u)\|_1 + \|d_{i\tau}(\varphi v)\|_1\right)\Big\}, \quad U = (u, v),$$

с постоянной C , не зависящей от τ . Отсюда получаем ограниченность ве-

личины $|d_{i\bar{x}}(\varphi w)|_2 + |d_{i\bar{t}}(\varphi U)|_1$, что сразу доказывает теорему.

Мера γ называется сингулярной, если она сосредоточена на множестве нулевой лебеговой меры. Для любой меры, заданной на σ-кольце борелевских подмножеств области Ω, и, в частности, для μ существует однозначное представление

$$\mu(B) = \gamma(B) + \int_B q(x)dx, \tag{12}$$

где γ - сингулярная мера; $B \subset \Omega$ - произвольное борелевское множество, $q \in L^1_{loc}(\Omega)$ называется производной Лебега (плотностью) меры μ. Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть область $\Omega_0 \subset \Omega$ такова, что $|\Phi_{x_1}| > 0$ (или $|\Phi_{x_2}| > 0$ в Ω_0), и, кроме того, $u, w \in H^2_{loc}(\Omega_0)$. Тогда в представлении (12) сингулярная составляющая γ меры μ равна нулю на Ω_0.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$, $\varepsilon > 0$ - произвольное фиксированное число. Тогда из условия (6) следует, что вектор $\omega_\varepsilon = (w+\varepsilon\varphi,\ u+\varepsilon\varphi\Phi^{-1}_{x_1},\ v)$ принадлежит множеству K. Так как в точке $\omega = (w, u, v)$ функционал Π принимает минимальное значение, то $\Pi(\omega_\varepsilon) \geq \Pi(\omega)$. Пользуясь произвольностью φ, после сокращения на ε и перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим в Ω_0:

$$a\Delta^2 w + k_1 N_{11} + k_2 N_{22} - f = \left(\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} - f_1 \right) \Phi^{-1}_{x_1}.$$

Учитывая условие теоремы, заключаем, что правая часть этого уравнения принадлежит $L^2_{loc}(\Omega_0)$, и, следовательно, $w \in H^4_{loc}(\Omega_0)$. Выберем вектор $\tilde{\omega} = (\tilde{w}, 0, 0)$, $\tilde{w} \in H^2_0(\Omega) \cap C^0_0(\Omega_0)$. Тогда из (9) следует

$$(\Pi'(\omega), \tilde{\omega}) = \int_\Omega \frac{\tilde{w}}{\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}}\, d\mu.$$

Интегрируя по частям в левой части этого соотношения, получаем равенство

$$\int_\Omega (a\Delta^2 w + k_1 N_{11} + k_2 N_{22} - f)\,\tilde{w}\,dx = \int_\Omega \frac{\tilde{w}}{\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}}\, d\mu.$$

Отсюда следует утверждение теоремы, причем доказано [10], что производная Лебега меры μ на множестве Ω_0 равна

$$(a\Delta^2 w + \kappa_1 N_{11} + \kappa_2 N_{22} - f)\sqrt{1+|\nabla\phi|^2} \ .$$

Литература

1. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости.- М.: Мир, 1974.- 159 с.
2. Cimatti G. The constrained elastic beam.- Meccanica,1973,v.8,p.119-129.
3. Frehse J. On the regularity of the solution of the biharmonic variational inequality. - Manuscripta Math., 1973, v.9, p.91-103.
4. Caffarelli L.A., Friedman A. The obstacle problem for the biharmonic operator. - Ann.Scuola Norm.Sup., Pisa,1979,v.6,№ 1,serie IV,p.151-184.
5. Кравчук А.С. К задаче Герца для линейно и нелинейно упругих тел конечных размеров.- Докл.АН СССР, 1976, т.230. №2, с.308-310.
6. Григолюк Э.И., Толкачёв В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек.- М.: Машиностроение, 1980.- 416 с.
7. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек.- Киев: Наукова думка, 1980.- 214 с.
8. Попов Г.Я., Толкачёв В.М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами.- Изв.АН СССР, 1980, №4, с.192-206.
9. Власов В.З. Избранные труды. Т.1.-М.:Изд-во АН СССР, 1962.- 528 с.
10. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная.- М.: Наука, 1964.-212 с.