УДК 517.54+517.514

О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ КЛАССА W_p^1 ЧЕРЕЗ ГЁЛЬДЕРОВЫ ГРАНИЦЫ

В.М.Гольдштейн, В.Н.Ситников (Новосибирск)

Изучается вопрос о продолжении функций из пространств Соболева $W_p^1(G)$ через границу области $G \subset R^n$ с сохранением гладкости, т.е. продолженная функция должна иметь первые обобщенные производные. Пространства $W_p^1(G)$ рассматриваются с нормой $\|u\|_{W_p^1(G)} = \|u\|_{L_p(G)} + \|\nabla u\|_{L_p(G)}$, здесь ∇u - градиент функции u.

Существование ограниченного линейного оператора продолжения $\mathcal{T}: W_p^1(G) \to W_{p_1}^1(R^n)$ зависит от строения границы области G. Рассмотрим ситуацию, когда граница локально является графиком непрерывной функции, т.е. у каждой точки $x \in \partial G$ существует окрестность $U(x)$ такая, что в подходящей ортонормированной системе координат в R^n множество $\partial G \cap U(x)$ задается уравнением $z = g_x(y)$, где $g_x: R^{n-1} \to R$ - непрерывная функция. Если функция g_x удовлетворяет условию Липшица, то мы будем говорить, что граница ∂G липшицева в точке x. Если граница ∂G липшицева в каждой своей точке, то мы будем говорить, что область G принадлежит классу $Lip\, 1$.

Аналогично, если функция g_x удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $0<\gamma<1$, то мы будем говорить, что граница ∂G гёльдерова (γ - гёльдерова) в точке x. Если граница ∂G гёльдерова в каждой своей точке, то мы будем говорить, что область принадлежит классу $Lip\,\gamma$.

В дальнейшем нас будут интересовать только ограниченные области в R^n. Для области G класса $Lip\, 1$ известно существование ограниченного линейного оператора продолжения $\mathcal{T}: W_p^l(G) \to W_p^l(R^n)$, сохраняющего принадлежность функции классу W_p^l (см., например,[1]). В случае области G класса $Lip\,\gamma$ простые примеры (см., например,[1]) показывают, что продолжение с сохранением класса невозможно. В связи с этим возникает вопрос: с каким ухудшением класса возможно продолжение функции из $W_p^l(G)$ через границу области G класса $Lip\,\gamma$. В.И. Буренков [2] показал, что функции класса $W_p^l(G)$, $G \in Lip\,\gamma$, могут быть продолжены до функций класса $W_p^{[\gamma l]}$

($[\gamma l]$ - целая часть γl). Ухудшение класса заключается в понижении степени дифференцируемости с l до $[\gamma l]$. Отметим, что сходные вопросы рассматривал С.В.Успенский [5] для классов Никольского $H_p^{r_1,\dots,r_n}$.

На примере областей, граница которых липшицева всюду, исключая конечное число точек, в которых есть гёльдеровы особенности, мы покажем, что, по крайней мере для классов $W_p^1(G)$, существует альтернативная возможность продолжения, при которой мы теряем не в степени гладкости функций, а в показателе суммируемости производной.

Ситуация, возникающая при исследовании вопроса о продолжении для областей, границы которых локально не обязаны быть графиками, будет рассмотрена в конце статьи.

§1. Предварительные сведения

Гомеоморфизм $\varphi : G \to G'$ областей $G, G' \subset R^n$ называется квазиизометрическим (или квазиизометрией), если для любых точек $x \in G$, $x' \in G'$ справедливы неравенства

$$\overline{\lim_{y\to x}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|} \leqslant M, \quad \overline{\lim_{y'\to x'}} \frac{|\varphi^{-1}(x') - \varphi^{-1}(y')|}{|x' - y'|} < M,$$

где постоянная M не зависит от выбора пар точек (x,y), (x',y').

Теорема 1 [3]. Квазиизометрический гомеоморфизм $\varphi : G \to G'$ области $G \subset R^n$ на область $G' \subset R^n$ индуцирует ограниченный линейный изоморфизм $\varphi^* : W_p^1(G') \to W_p^1(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ по правилу $\varphi^* u = u \circ \varphi$ для всех функций $u \in W_p^1(G)$.

Теорема 2. (О дифференцировании суперпозиции.) *Пусть $\varphi : G \to G'$ - квазиизометрический гомеоморфизм области $G \subset R^n$ на область $G' \subset R^n$. Тогда для всякой функции $u \in W_p^1(G')$ $(p \geqslant 1)$ справедлива формула дифференцирования суперпозиции*

$$\frac{\partial(u \circ \varphi)}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x).$$

(*Равенство понимается в смысле почти всюду.*)

Функция $\pi_j : R^n \to R^{n-1}$, $\pi_j(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n) = \overline{x}_j = (x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$

называется j-й проекцией R^n на R^{n-1}. Точку $x \in R^n$ условимся записывать в виде $x = (\overline{x}_j, x_j)$. Локально-суммируемая в области $G \subset R^n$ функция $u : G \to R$ принадлежит классу $ACL(G)$, если для любого $j = 1, 2, \dots, n$ функция $\overline{x}_j \to u(\overline{x}_j, x_j)$ при почти всех x_j абсолютно непрерывна на любом

замкнутом отрезке $\sigma \subset G$, представимом в виде $\{\bar{x}_j\} \times [a, \bar{b}]$. Если $u \in ACL(G)$, то u имеет почти всюду в G обычные частные производные $\partial u / \partial x_j$. В дальнейшем нам потребуется классическая

Теорема 3. *Пусть G - область в R^n. Локально-суммируемая функция $u : G \to R$ имеет первые обобщенные производные тогда и только тогда, когда $u \in ACL(G)$.*

Замечание. В ходе изложения нам будет удобно использовать следующую вспомогательную терминологию: функция u удовлетворяет свойству ACL по направлению x_j. Смысл этого термина легко понятен из определения класса ACL. Далее, символом $B(x, r)$ обозначается круг (в размерности 2) или шар (в размерности больше двух) радиуса r с центром в точке x. Соответственно $S(x, r)$ - окружность или сфера. Иногда будем использовать сокращенные обозначения: $B_r = B(0, r)$, $S_r = S(0, r)$. Символом $mes\,A$ обозначается мера Лебега измеримого множества A.

Как обычно, $L_p(G)$ - пространство функций, суммируемых в степени p.

§2. Области с нулевыми углами на границе

Рассмотрим в плоскости полярную систему координат (r, φ) $0 \leq r < \infty$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Основным объектом изучения в этом параграфе будет область $U_\gamma = \{x = (r, \varphi) \mid |\varphi| < r^\gamma, r < 1\}$ $(\gamma > 0)$, граница которой имеет единственную особенность гёльдерова типа в точке 0. Функция $\varphi(r) = r^\gamma$, задающая часть границы области U_γ, лежащую внутри единичного круга, удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\gamma' = \gamma/(1+\gamma)$. Значит, область U_γ принадлежит классу $Lip\,\gamma'$.

Теорема 4. *Для любого $p > (2+\gamma)/2$ существует линейный ограниченный оператор продолжения $\mathcal{T} : W_p^1(U_p) \to W_{\alpha p}^1(R^2)$, где α - любое положительное число, меньшее, чем $2/(2+\gamma)$.*

Доказательство. Построим гомеоморфизм $\omega(r, \rho)$ множества $U_\gamma^* = B_1 \setminus U_\gamma$ на множество $\overline{U}_\gamma$, положив

$$\omega(r, \varphi) = (\rho(r, \varphi), \theta(r, \varphi)) = \left(r, r^\gamma \frac{\pi - |\varphi|}{\pi - r^\gamma} \operatorname{sgn} \varphi\right)$$

((ρ, θ) - полярные координаты в образе).

Этот гомеоморфизм тождествен на $\partial U_\gamma \cap B_1$, сохраняет расстояние от точки до начала координат и на каждой окружности является инверсией. В любом круговом кольце $Q_{\rho_1, \rho_2} = B_{\rho_1} \setminus \overline{B}_{\rho_2}$, $0 < \rho_2 < \rho_1 \leq 1$, гомеоморфизм ω является квазиизометрией; ω не является даже липшицевым в области U_γ, так как, приближаясь к началу координат, степень растяжения вдоль окружности S_ρ стремится к бесконечности при $\rho \to 0$.

Выберем произвольно функцию $u \in W^1_p(U_\gamma) \cap C(U_\gamma)$. Построим оператор продолжения T, положив

$$(Tu)(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \overline{U}_\gamma ; \\ u(\omega(x)), & x \in \overline{U}^*_\gamma . \end{cases}$$

Так как $u(\omega(x)) = u(x)$ для всех $x \in \partial U_\gamma \cap B_1$, то функция $(Tu)(x)$ непрерывна в круге B_1.

Докажем, что функция Tu принадлежит классу ACL. Так как ограничение гомеоморфизма ω на пересечение любого кругового слоя $Q_{\rho_1,\rho_2} = B_{\rho_1} \setminus \overline{B}_{\rho_2}$ с областью U_γ является квазиизометрией, то $(Tu)|_{Q_{\rho_1,\rho_2} \cap U_\gamma} \in W^1_p(Q_{\rho_1,\rho_2} \cap U_\gamma)$ по теореме 1 и, следовательно, по теореме 3, $(Tu)|_{U_\gamma \cup U^*_\gamma} \in ACL(U_\gamma \cup U^*_\gamma)$. Так как $B_1 = U_\gamma \cup U^*_\gamma \cup \cup(\partial U_\gamma \setminus \partial B_1)$, то осталось проверить свойство ACL вблизи точек множества $\partial U_\gamma \cap B_1$.

Рассмотрим проекцию $\pi_1 : R^2 \to R$. Так как $u \in ACL(U_\gamma)$, то существует множество $A \subset (0,1) = \pi_1(U_\gamma)$, имеющее меру нуль и такое, что функция u абсолютно непрерывна на любом замкнутом отрезке $\sigma \subset U_\gamma$, представимом в виде $\{t\} \times [a,b]$, где $t \in (0,1) \setminus A$. Аналогично существует множество $B \subset \pi_1(U^*_\gamma)$, имеющее меру нуль и такое, что функция Tu абсолютно непрерывна на любом замкнутом отрезке $\sigma \subset U^*_\gamma$, представимом в виде $\{t\} \times [a,b]$, где $t \in \pi_1(u^*_\gamma) \setminus B$. Выберем произвольно замкнутый отрезок $\sigma_0 \subset B_1$, представимый в виде $\{t_0\} \times [a_0, b_0]$, где $t_0 \in (-1,1) \setminus (A \cup B \cup \{0\})$. По-предыдущему, если $\sigma_0 \cap \partial U_\gamma = \emptyset$, то функция Tu абсолютно непрерывна на σ_0. Пусть $\sigma_0 \cap \partial U_\gamma \neq \emptyset$. Тогда существует единственная точка $(x_0, c_0) \in \partial U_\gamma$, разбивающая отрезок $\sigma_0 = \{t_0\} \times [a_0, b_0]$ на два: $\sigma_1 = \{t_0\} \times [a_0, c_0]$, $\sigma_\gamma = \{t_0\} \times \times [c_0, b_0]$. Отрезок $\sigma_1 \subset \overline{U}_\gamma$, а $\sigma_2 \subset \overline{U}^*_\gamma$. Так как функция $Tu|U_\gamma \in ACL(U_\gamma)$, непрерывна в $\overline{U}_\gamma$ и $t_0 \notin A$, то функция u абсолютно непрерывна на отрезке σ_1. Из аналогичных соображений функция $Tu \mid \overline{U}^*_\gamma$ абсолютно непрерывна на отрезке σ_2. Так как функция Tu непрерывна, то отсюда следует абсолютная непрерывность функции Tu на отрезке σ.

Мы доказали, что функция Tu удовлетворяет свойству ACL по горизонтальному направлению. Аналогично доказывается, что функция Tu удовлетворяет свойству ACL по вертикальному направлению. Следовательно, $Tu \in ACL(B_1)$ и имеет первые обобщенные производные.

Докажем теперь, что функция $Tu \in W^1_{\alpha p}(B_1)$ для любого $0 < \alpha < 2/(2+\gamma)$ и оператор $T : W^1_p(U_\gamma) \to W^1_{\alpha p}(B_1)$ ограничен. Так как функция Tu имеет первые обобщенные производные, то нам осталось

доказать неравенство

$$\|Tu\|_{W^1_{\alpha p}(B_1)} \leqslant C\|u\|_{W^1_p(U_\gamma)}$$

с какой-нибудь постоянной C, не зависящей от выбора функции $u \in W^1_p(U_\gamma)$.

Поскольку $mes\, \partial U_\gamma = 0$, то имеем очевидное неравенство

$$\|Tu\|_{W^1_{\alpha p}(B_1)} = \|Tu\|_{W^1_{\alpha p}(U_\gamma)} + \|Tu\|_{W^1_{\alpha p}(U^*_\gamma)} =$$

$$= \|u\|_{W^1_{\alpha p}(U_\gamma)} + \|Tu\|_{W^1_{\alpha p}(U^*_\gamma)} .$$

Из неравенства Гёльдера следует, что

$$\|u\|_{W^1_{\alpha p}(U_\gamma)} \leq c_0 \|u\|_{W^1_p(U_\gamma)} ,$$

так как $\alpha < 1$.

Из двух предыдущих неравенств получаем

$$\|Tu\|_{W^1_{\alpha p}(B_1)} \leqslant C_1\|u\|_{W^1_p(U_\gamma)} + \|Tu\|_{W^1_{\alpha p}(U^*_\gamma)} .$$

Перейдем к оценке нормы

$$\|Tu\|_{W^1_{\alpha p}(U^*_\gamma)} = \|Tu\|_{L_{\alpha p}(U^*_\gamma)} + \|\nabla(Tu)\|_{L_{\alpha p}(U^*_\gamma)} .$$

Для первого слагаемого из неравенства Гёльдера и теоремы о замене переменной в интеграле получаем, что

$$\|Tu\|^{\alpha p}_{L_{\alpha p}(U^*_\gamma)} = \int\limits_{U^*_\gamma} |u(\omega(x))|^{\alpha p}\, dx =$$

$$= \int\limits_{U^*_\gamma} |u(\omega(x))|^{\alpha p} (\mathcal{J}(\omega, x))^{\alpha} (\mathcal{J}(\omega, x))^{-\alpha}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{U^*_\gamma} |u(\omega(x))|^{p}\, \mathcal{J}(\omega, x)\, dx \right)^{\alpha} \left(\int\limits_{U^*_\gamma} |\mathcal{J}(\omega, x)|^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} dx \right)^{1-\alpha} =$$

$$= \|u\|^{\alpha p}_{L_p(U_\gamma)} \left(\int\limits_{U^*_\gamma} |\mathcal{J}(\omega, x)|^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} dx \right)^{1-\alpha}. \qquad (1)$$

Для оценки $\|\nabla(Tu)\|_{L_{\alpha p}(U^*_\gamma)}$ воспользуемся неравенством

$$|\nabla(Tu)(x)|^2 \leq |\nabla u(\omega(x))|^2 \lambda^2(\omega, x),$$

где $\lambda^2(\omega, x) = \sum\limits_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\right)^2.$

Применяя неравенство Гёльдера и теорему о замене переменной в интеграле, получаем

$$\|\nabla(Tu)\|^{\alpha p}_{L_{\alpha p}(U^*_\gamma)} = \int\limits_{U^*_\gamma} |\nabla(Tu)|^{\alpha p} dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{U^*_\gamma} |\nabla u(\omega(x))|^{\alpha p} \lambda^{\alpha p}(\omega, x) dx =$$

$$= \int\limits_{U^*_\gamma} |\nabla u(\omega(x))|^{\alpha p} \mathcal{J}^{\alpha}(\omega, x) \mathcal{J}^{-\alpha}(\omega, x) \lambda^{\alpha p}(\omega, x) dx \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{U^*_\gamma} |\nabla u(\omega(x))|^{p} \mathcal{J}(\omega, x) dx \right)^{\alpha} \left(\int\limits_{U^*_\gamma} \left| \frac{\lambda^p(\omega, x)}{\mathcal{J}(\omega, x)} \right|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dx \right)^{1-\alpha} =$$

$$= \|\nabla u\|^{\alpha p}_{L_p(U_\gamma)} \left(\int\limits_{U^*_\gamma} \left| \frac{\lambda^p(\omega, x)}{\mathcal{J}(\omega, x)} \right|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dx \right)^{1-\alpha}. \qquad (2)$$

Для оценки второго сомножителя в правой части полученного неравенства вычислим $\mathcal{J}(\omega, x)$ и $\lambda^2(\omega, x)$. В полярных координатах для гомеоморфизма $\omega(r, \varphi)$ имеем

$$\mathcal{J}(\omega, x(r, \varphi)) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \frac{1}{r},$$

$$\lambda^2 = \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)^2\right]\frac{1}{r^2} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2 .$$

Вспоминая, что $\rho(r,\varphi) = r$, $\theta(r,\varphi) = r^\gamma \dfrac{\pi - |\varphi|}{\pi - r^\gamma}\,\mathrm{sgn}\,\varphi$, после несложных вычислений получаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = -\frac{r^\gamma}{\pi - r^\gamma}\,\mathrm{sgn}\,\varphi,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} = \pi\gamma r^{\gamma-1}\,\frac{\pi - |\varphi|}{(\pi - r^\gamma)^2}\,\mathrm{sgn}\,\varphi,$$

$$|J(\omega,x)| = \frac{r^\gamma}{\pi - r^\gamma} \geqslant \frac{r^\gamma}{\pi},$$

$$\lambda^2(\omega,x) = 1 + \left(\frac{r^\gamma}{\pi - r^\gamma}\right)^2 + \pi^2\gamma^2 r^{2\gamma}\,\frac{(\pi - |\varphi|)^2}{(\pi - r^\gamma)^4} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{(\pi-1)^2} + \frac{1}{(\pi-1)^4}\gamma^2. \qquad (3)$$

Обозначим постоянную в правой части последнего неравенства через C_2. Применим полученные в (3) оценки в неравенстве (2)

$$\int\limits_{U_j^*}\left|\frac{\lambda^p(\omega,x)}{J(\omega,x)}\right|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dx \leqslant \int\limits_{U_j^*}\left(\frac{C_2^{p/2}}{J(\omega,x)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dx \leqslant$$

$$\leqslant C_3\int\limits_{U_j^*}\left(\frac{\pi}{r^\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dx = C_4\int\limits_0^r\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}-1} dr. \qquad (4)$$

Последний интеграл сходится только в том случае, когда $\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha} - 1 < 1$, т.е. $\alpha < \frac{2}{2+\gamma}$. Сравнивая неравенства (1),(2),(4), окончательно получаем, что

для любой функции $u \in W_p^1(U_j) \cap C(U_j)$ функция $Tu \in W_{\alpha p}^1(B_1)$ и справедливо неравенство

$$\|Tu\|_{W_{\alpha p}^1(B_1)} \leqslant C_4\,\|u\|_{W_p^1(U_j)},$$

т.е. $\|T\| \leqslant C_4$. Остается заметить, что множество $W_p^1(U_j) \cap C(U_j)$ плотно в $W_p^1(U_j)$ и поэтому оператор T имеет [4] единственное продолже-

ние на $W_p^1(\mathcal{U})$, являющееся ограниченным линейным оператором, который мы будем обозначать тем же символом T. Очевидно, что для любой функции $u \in W_p^1(\mathcal{U})$ оператор $(Tu)(x) = u(x)$ почти всюду в $\mathcal{U}_\gamma$ и $(Tu)(x) = u(\omega(x))$ почти всюду в $\mathcal{U}_\gamma^*$. Значит, оператор $T: W_p^1(\mathcal{U}_p) \to W_{\alpha p}^1(B_1)$ является оператором продолжения.

Пусть $T_1: W_{\alpha p}^1(B_1) \to W_{\alpha p}^1(R^2)$ - любой линейный ограниченный оператор продолжения. Тогда суперпозиция $\tau = T_1 \circ T$ является линейным ограниченным оператором продолжения, действующим из $W_p^1(\mathcal{U}_\gamma)$ в $W_{\alpha p}^1(R^2)$.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть* $\gamma > 0$, $\mathcal{U}_\gamma^* = \{x = (r,\varphi) : x \in B_1,\ r^\gamma < |\varphi| \le \pi\}$. *Тогда для любого положительного* $\alpha < \dfrac{2+\gamma}{2+\gamma p}$ *существует линейный ограниченный оператор продолжения*

$$\tau : W_p^1(\mathcal{U}_\gamma^*) \longrightarrow W_{\alpha p}^1(R^2).$$

Доказательство. Рассмотрим гомеоморфизм $\omega^* : \mathcal{U}_\gamma \to \mathcal{U}_\gamma^*$,

$$\omega^*(r,\varphi) = (\rho(r,\varphi), \theta(r,\varphi)) = (r, [\pi - (\pi - r^\gamma)|\varphi|/r^\gamma]\, \mathrm{sgn}\,\varphi).$$

Так же, как и в предыдущей теореме, построим оператор T

$$(Tu)(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \mathcal{U}_\gamma^*; \\ u(\omega(x)), & x \in \mathcal{U}_\gamma. \end{cases}$$

В точности повторяя начало доказательства теоремы 4, можно показать,

что для всякой функции $u \in W_p^1(\mathcal{U}_\gamma^*) \cap C(\mathcal{U}_\gamma^*)$ функция Tu непрерывна, имеет первые обобщенные производные в круге B_1 и выполнены неравенства:

$$\|Tu\|_{W_{\alpha p}^1(B_1)} \le C_5 \|u\|_{W_p^1(\mathcal{U}_\gamma^*)} + \|Tu\|_{W_{\alpha p}^1(\mathcal{U}_\gamma)},$$

$$\|Tu\|_{L_{\alpha p}(\mathcal{U}_\gamma)}^{\alpha p} \le \|u\|_{L_p(\mathcal{U}_\gamma^*)}^{\alpha p} \left(\int_{\mathcal{U}_\gamma} |J(\omega^*, x)|^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} dx \right)^{1-\alpha}, \tag{5}$$

$$\|\nabla Tu\|_{L_{\alpha p}(\mathcal{U}_\gamma)}^{\alpha p} \le \|\nabla u\|_{L_p(\mathcal{U}_\gamma^*)}^{\alpha p} \left(\int_{\mathcal{U}_\gamma} \left| \frac{\lambda^p(\omega^*, x)}{J(\omega^*, x)} \right|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dx \right)^{1-\alpha}.$$

Постоянная C_5 не зависит от выбора функции u.

Оценим второй сомножитель в двух последних неравенствах. После несложных вычислений получаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=1,\quad \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial\theta}{\partial\varphi}=\frac{r^{\gamma}-\pi}{r^{\gamma}}\,\mathrm{sgn}\,\varphi,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}=\gamma\pi\varphi r^{-(1+\gamma)},\quad |\mathcal{J}(\omega^*,x)|>\frac{\pi}{r^{\gamma}},$$

$$\lambda^2(\omega^*,x)\leq C_6\left(\frac{1}{r}\right)^{2\gamma},$$

$$\int\limits_{U_\gamma}|\mathcal{J}(\omega^*,x)|^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\leq\pi^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\int\limits_{U_\gamma}r^{\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}}\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1 r^{\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}+1}\left(\int\limits_0^{r^\gamma}d\varphi\right)dr=\int\limits_0^1 r^{\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}+1+\gamma}\,dr=C_7, \tag{6}$$

$$\int\limits_{U_\gamma}\left|\frac{\lambda^p(\omega^*,x)}{\mathcal{J}(\omega^*,x)}\right|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}dx\leq\int\limits_{U_\gamma}\left(C_6^{p/2}\,\frac{r^{\gamma}}{r^{p\gamma}\pi}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}dx\leq$$

$$\leq C_8\int\limits_{U_\gamma}\left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma(p-1)\frac{\alpha}{1-\alpha}}dx=C_8\int\limits_0^1\left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma(p-1)\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\left(\int\limits_0^{r^\gamma}d\varphi\right)dr=$$

$$=C_8\int\limits_0^1\left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma(p-1)\frac{\alpha}{1-\alpha}-1-\gamma}dr. \tag{7}$$

Последний интеграл сходится при $\alpha<\dfrac{2+\gamma}{2+\gamma+\gamma(p-1)}$. Доказательство этой теоремы заканчивается точно так же, как и доказательство теоремы 4.

§3. Области с "гребнями"

В этом параграфе мы покажем, что эффект продолжения с сохранением первых обобщенных производных для областей с гёльдеровой особенностью наблюдается не только в плоских областях. Мы рассмотрим в R^3 область с одной из простейших гёльдеровых особенностей - "гребнем". Рассуждения будем вести в R^3 только из соображений простоты и наглядности.

Заметим, что области с "гребнями" использовались при изучении квазиконформных отображений в пространстве в качестве примеров областей, не являющихся

квазиконформно эквивалентными шару B_1.

Пусть $U_\gamma = \{x=(r,\varphi): |\varphi| < r^\gamma, |r| \le 1\}$ $(\gamma > 0)$ - область с нулевым углом, которая изучалась в предыдущем параграфе. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ область $V_\gamma = U_\gamma \times (0,1)$. Будем называть ее стандартной областью с гребнем.

Теорема 6. *Для любого $p > (2+\gamma)/2$ существует линейный ограниченный оператор продолжения $\tau: W_p^1(V_\gamma) \to W_{\alpha p}^1(\mathbb{R}^3)$, где α - любое положительное число, меньшее, чем $2/(2+\gamma)$.*

Теорема 7. *Пусть $\gamma > 0$, $V_\gamma^* = U_\gamma^* \times (0,1)$, $U_\gamma^* = B_1 \setminus \bar{U}_\gamma$. Тогда для любого α, удовлетворяющего неравенствам*

$$0 < \alpha < \frac{2+\gamma}{2+\gamma p},$$

существует линейный ограниченный оператор продолжения

$$\tau: W_p^1(V_\gamma^*) \to W_{\alpha p}^1(\mathbb{R}^3).$$

Доказательства теорем 6 и 7 аналогичны доказательствам теорем 4,5. Поэтому мы приведем только доказательство теоремы 6.

Нам будет удобно использовать в $\mathbb{R}^3$ цилиндрические координаты (r,φ,z). Рассмотрим гомеоморфизм $\Omega: V_\gamma^* \to V_\gamma$, $\Omega(r,\varphi,z) = (r, r^\gamma(\pi - |\varphi|)\operatorname{sign}\varphi(\pi - r^\gamma), z)$. Напомним, что его ограничение на любую плоскость P_h, заданную уравнением $z = h$, совпадает с гомеоморфизмом $\omega(r,\varphi)$, использованным в теореме 4 при построении оператора продолжения T.

Построим оператор продолжения, положив

$$(Tu)(\bar{x}) = \begin{cases} u(\bar{x}), & \bar{x} \in V_\gamma; \\ (u \circ \Omega)(\bar{x}), & \bar{x} \in V_\gamma^*. \end{cases}$$

Так как в каждом из множеств $V_{\rho_1,\rho_2} = \{(r,\varphi,z): 0 < \rho_1 < r < \rho_2 < 1\}$ гомеоморфизм Ω является квазиизометрическим, то

$$(Tu)\big/_{V_\gamma^* \cap V_{\rho_1,\rho_2}} \subset W_p^1(V_\gamma^* \cap V_{\rho_1,\rho_2})$$

при всех $0 < \rho_1 < \rho_2 \le 1$. Гомеоморфизм Ω переводит вертикальные отрезки в вертикальные. Следовательно, по теореме 3, функция Tu принадлежит классу $ACL(Q)$, где $Q = \bar{V}_\gamma \cup V_\gamma^*$.

При почти всех h имеет место $u|_{P_h} \subset W_p^1(U_\gamma)$. Обозначим через $T_h u$ функцию $Tu|_{P_h}$. Так как $\Omega|_{P_h} = \omega$, то оператор T_h тот же, что рассматривался в теореме 4. Следовательно, при почти всех h имеем

$T_h u \subset W^1_{\alpha p}(Q \cap P_h)$. Так как $W^1_{\alpha p} \subset ACL$, то почти в каждой плоскости P_h функция $T_h u$ принадлежит классу $ACL(Q \cap P_h)$. Значит, функция Tu удовлетворяет свойству ACL по любому из горизонтальных направлений. Мы доказали, что $Tu \in ACL(Q)$, т.е. Tu имеет в области Q первые обобщенные производные.

Рассмотрим отображение $\Omega|_{P_h}$ для тех h, при которых $u|_{P_h} \in$ $\in W^1_p(U_\gamma)$. Фиксируем любое $\alpha < 2/(2+\gamma)$. Напомним, что при почти всех h имеет место $(Tu)|_{P_h} \in W^1_{\alpha p}(B_1)$. Проверим теперь принадлежность функции Tu классу $W^1_{\alpha p}(Q)$. Для этого оценим норму $\|Tu\|_{W^1_{\alpha p}(Q)}$.

По определению нормы в классе $W^1_{\alpha p}(Q)$, имеем

$$\|Tu\|^{\alpha p}_{W^1_{\alpha p}(Q)} = \int_Q |Tu|^{\alpha p} dx + \int_Q |\nabla Tu|^{\alpha p} dx.$$

По построению отображения Ω, из (4) следует, что

$$\mathcal{J}(\Omega, (x,y,z)) = \mathcal{J}(\omega, (x,y)),$$

$$\lambda^2(\Omega, (x,y,z)) = \lambda^2(\omega, (x,y)) + 1.$$

Поэтому (ср. с (1),(2))

$$\|Tu\|^{\alpha p}_{L_{\alpha p}(V^*_\gamma)} \leq \|u\|^{\alpha p}_{L_p(V_\gamma)} \left(\int_{V^*_\gamma} |\mathcal{J}(\Omega,(x,y,z))|^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} dxdydz \right)^{1-\alpha}, \tag{9}$$

$$\|\nabla Tu\|^{\alpha p}_{L_{\alpha p}(V^*_\gamma)} \leq \|\nabla u\|^{\alpha p}_{L_p(V_\gamma)} \left(\int_{V^*_\gamma} \left| \frac{\lambda^p(\Omega,(x,y,z))}{\mathcal{J}(\Omega,(x,y,z))} \right|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dxdydz \right)^{1-\alpha}. \tag{10}$$

Из неравенств (3), в которых подсчитывались $\mathcal{J}(\omega,(x,y))$ и $\lambda^2(\omega,(x,y))$, следует, что

$$|\mathcal{J}(\Omega,(x,y,z))| \geq \frac{r^\gamma}{\pi},$$

$$\lambda^2(\Omega,(x,y,z)) \le \lambda^2(\omega,(x,y)) + 1 \le C_9 ,$$

где C_9 - постоянная, зависящая только от отображения ω .

Из (9),(10) следует (ср. с (4))

$$\int\limits_{V_\gamma^*} \left| \frac{\lambda^p(\Omega,(x,y,z))}{J(\Omega,(x,y,z))} \right|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dxdydz \le c_{10} \int\limits_0^{\tau} \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}-1} d\tau, \tag{11}$$

$$\int\limits_{V_\gamma^*} \left| J(\Omega,(x,y,z)) \right|^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} dxdydz \le c_{11} \int\limits_0^{\tau} \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}-1} d\tau. \tag{12}$$

Сравнивая (9),(10), (11), (12),получаем, что при $\alpha < \frac{2}{2+\gamma}$

$$\| Tu \|_{W^1_{\alpha p}(V_\gamma^*)} \le C_{12} \| u \|_{W^1_p(V_\gamma)} .$$

Отсюда следует ограниченность оператора продолжения

$$T : W^1_p(V_\gamma) \longrightarrow W^1_{\alpha p}(Q).$$

Напомним, что $Q = \bar{V}_\gamma \cup V_\gamma^* = B_1 \times (0,1)$ (B_1 - круг в плоскости). Теперь, чтобы получить требуемый результат, остается применить к области $Q \in Lip\,1$ теорему продолжения.

§4. Заключительные замечания

Области U_γ и V_γ , рассмотренные в § 3 и 4, являются стандартными для определения широкого класса областей с конечным числом особенностей гёльдерова типа. Для этого при помощи квазиизометрий нужно "склеить" границу области из частей границ областей U_γ и V_γ , на которых сосредоточены особенности. Делается это стандартным приемом, который мы проиллюстрируем в двумерном случае , желая показать, что областей, из которых возможно продолжение функций класса W^1_p с сохранением первых обобщенных производных, достаточно много. К сожалению, мы не можем на основании результатов статьи ответить на вопрос: возможно ли продолжение с сохранением первых обобщенных производных для произвольной гёльдеровой границы.

Рассмотрим область $U_\gamma = \{(\tau,\varphi) : \tau < 1,\ |\varphi| < \tau^\gamma\}$. Обозначим через A_γ множество $\partial U_\gamma \cap B_1$. Ограниченную область $U \subset R^2$ будем называть областью класса JL_γ , если у каждой точки $x \in \partial U$ существуют окрес

ность V_x и квазиизометрия $\alpha_x : V_x \to B_1$ такие, что $\alpha_x(x) = 0$, $\alpha_x(\partial U \cap V_x) = A_\gamma$, $\alpha_x(V_x \cap U) \subset U_\gamma$.

Теорема 8. *Пусть область V принадлежит классу $\mathcal{JL}_\gamma$. Тогда для любого $p > (2+\gamma)/2$ существует линейный ограниченный оператор продолжения $\tau : W_p^1(V) \longrightarrow W_{\alpha p}^1(R^2)$, где α - любое положительное число, меньшее чем $2/(2+\gamma)$.*

Доказательство легко следует из теорем 1,4 при использовании стандартного приема с разбиением единицы.

Результат, аналогичный теореме 8, легко привести и для областей с нулевыми углами, направленными "наружу", используя вместо теоремы 4 теорему 5.

Замечание. Область класса $\mathcal{JL}_\gamma$ может иметь точки на границе, в которых она локально не является графиком непрерывной функции ни в какой ортонормированной системе координат [3].

Литература

1. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.- М.: Мир, 1973. -342 с.
2. Буренков В.И. Об одном способе продолжения дифференцируемых функций.- Труды Мат.ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова, 1976, т.140, с.27-67.
3. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными.- Успехи мат.наук, 1979, т.34, вып.1, с.17-65.
4. Maz'ya V.G. Einbettungssätze für Sobolewsche Raume. Teil 1. - Leipzig, Teubner-Texte zur Math., 1979-220 p.
5. Успенский С.В. О следе функций, принадлежащих классу $H_p^{r_1,\ldots,r_n}$ С.М. Никольского. - Сиб.мат.журн., 1965, т.6, №3, с.574-580.