УДК 517.3

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ГРАДИЕНТ

Т.Н. Рожковская (Новосибирск)

§1. Постановка задачи

Пусть Ω - ограниченная область в R и для каждой точки $x\in\bar\Omega$ задано замкнутое ограниченное строго выпуклое множество $K(x)\subset R^n$ такое, что $0\in \operatorname{int} K(x)$. Тогда множество

$$\mathcal{K}=\left\{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : \nabla v(x)\in K(x) \text{ почти всюду в } \Omega\right\}$$

выпукло замкнуто в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и содержится в пространстве $W_\infty^1(\Omega)$.
Оператор $A:\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\to W_2^{-1}(\Omega)$ определяется по формуле

$$\langle Au,v\rangle=\int_\Omega\left[a^i(x,u,\nabla u)v_{x_i}+a(x,u,\nabla u)v\right]dx,$$

где $a(x,u,p)$, $a^i(x,u,p)$, $i=1,\dots,n$, непрерывны по $u\in R^1$, $p\in R^n$ для почти всех $x\in\Omega$.

Предположим, что вариационное неравенство

$$u\in\mathcal{K},\quad \langle Au,v-u\rangle\geq 0\qquad \forall v\in\mathcal{K}, \tag{1}$$

имеет решение $u\in\mathcal{K}$ (теоремы существования см., например, в [1]). Известный контрпример [1] указывает порог гладкости для (1) : при естественных условиях разрешимость задачи (1) можно ожидать лишь в пространствах, строго содержащих $W_2^3(\Omega)$. Теоремы регулярности о принадлежности решения неравенства решения неравенства (1) пространству $W_m^2(\Omega)$, $1<m<\infty$, установлены для различных частных случаев (см.[2-5] и библиографию там же). Наиболее общим является результат Вильямса [5], доказанный для широкого

класса нелинейных эллиптических операторов второго порядка при неоднородных граничных условиях. Во всех названных работах в качестве $K(x)$ рассматривались шары, радиусы которых не зависели от x или менялись гладко по x.

В настоящей работе доказывается теорема регулярности $(u \in W_m^2(\Omega),$ $1 < m < \infty)$ для нелинейных эллиптических операторов и для широкого класса ограниченных строго выпуклых, гладко зависящих от x множеств $K(x)$.

§2. Обозначения и определения

1. Введем в R^n угловые координаты (r, ω), где $r \in R_+$ - радиус, а вектор ω пробегает единичную сферу S_n в R^n. Пусть уравнение границы $\partial K(x)$ в координатах (r, ω) имеет вид $r = r(x, \omega)$.

2. Определим функцию $\mathcal{J} : \bar{\Omega} \times R^n \to R$ такую, что $\mathcal{J}(x,p)$ при фиксированном $x \in \bar{\Omega}$ является функцией Минковского относительно множества $K(x)$, т.е.

$$\mathcal{J}(x,p) = \inf\left\{\lambda \in R_+ : \frac{1}{\lambda} p \in K(x)\right\},$$

или в координатах (r, ω)

$$\mathcal{J}(x,p) = |p| / r\left(x, \frac{p}{|p|}\right).$$

Отметим, что $p \in K(x)$, если и только если $\mathcal{J}(x,p) \le 1$.

3. Пусть $P = \max\limits_{x \in \bar{\Omega}, \omega \in S_n} r(x, \omega)$, $T = P \cdot \mathrm{diam}\,\Omega$. Так как множества $K(x)$ и область Ω ограничены и $0 \in \mathrm{int}\, K(x)$ $\forall x \in \bar{\Omega}$, то $0 < P, T < \infty$. Определим множество

$$\mathfrak{M} = \left\{(x,u,p) \in \bar{\Omega} \times R \times R^n : |u| \le T_1,\ |p| \le P_1\right\},$$

где $0 < T < T_1 < \infty$, $0 < P < P_1 < \infty$.

4. Введем обозначение

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Пусть $\partial\Omega \in C^1$. Тогда существует число $\delta_0 > 0$ такое, что никакие две внутренние нормали к $\partial\Omega$, проведенные из различных точек $\partial\Omega$, не пересекаются в множестве $\bar{\Omega}_{\delta_0}$. Для любой точки $x \in \bar{\Omega}_{\delta_0}$ однозначно определен единичный вектор $n(x)$, имеющий направление внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x_0 \in \partial\Omega$, где x_0 - ближайшая к x граничная точка: $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = |x - x_0|$.

5. Обозначим через $H(x)$ $(x \in \overline{\Omega}_{\delta_0})$ прямую в R^n, проходящую через начало координат по направлению вектора $n(x)$. Пусть проекция $K(x)$ $(x \in \overline{\Omega}_{\delta_0})$ на $H(x)$ есть отрезок $[\overline{\ell}(x), \underline{\ell}(x)]$. Так как $0 \in \operatorname{int} K(x)$, то $\overline{\ell}(x) > 0$, $\underline{\ell}(x) < 0$. При этом $\overline{\ell}(x) = \max\limits_{\omega \in S_n} r(x,\omega) \cdot \cos(\omega, n(x))$,

$\underline{\ell}(x) = -\max\limits_{\omega \in S_n} r(x,\omega) \cdot \cos(\omega, -n(x))$.

§3. Теорема регулярности

Теорема. *Пусть существует решение* $u_0 \in \mathcal{K}$ *вариационного неравенства* (1) *и выполнены следующие условия:*

а) $a^i \in C^2(\mathfrak{M})$, $i = 1, \dots, n$;

б) существует константа $\nu_1 > 0$ такая, что

$$\frac{\partial}{\partial p_j} a^i(x,u,p)\xi_i \xi_j \geq \nu_1 |\xi|^2, \quad \xi \in R^n, \quad (x,u,p) \in \mathfrak{M};$$

в) $\sup\limits_{|u|<T,\, |p| \leq P} a(x,u,p) \in L_m(\Omega)$, $1 < m < \infty$;

г) $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $\alpha > 0$;

д) $r(x,\omega) \in C^2(\overline{\Omega} \times S_n)$;

е) множества $K(x)$ при $x \in \partial\Omega$ таковы, что соответствующие им прямые нормальны к $\partial K(x)$ в точках пересечения $(r(x,-n(x)), -n(x)), (r(x, n(x)), n(x))$ прямой $H(x)$ с $\partial K(x)$;

ж) существует константа $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ такая, что $\underline{\ell}, \overline{\ell} \in C^2(\overline{\Omega}_{\delta_1})$.

Тогда $Au_0 \in L_m(\Omega)$ и при $m > n$ выполняется $u_0 \in W^2_m(\Omega) \cap C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, где $\beta = 1 - \frac{n}{m}$.

Замечание 1. Условие "е" является, по сути, условием согласования выпуклых множеств $K(x)$, $x \in \partial\Omega$, и граничных условий на $\partial\Omega$ для функций из $\mathcal{K}$. Действительно, рассмотрим производные по направлению $n(x)$, $x \in \Omega_{\delta_0}$, функций $F \in \mathcal{K} \cap C^1(\overline{\Omega})$. Так как $\nabla F(x) \in K(x)$ в $\overline{\Omega}$, то

$$\underline{\ell}(x) \leq \frac{\partial F(x)}{\partial n(x)} \leq \overline{\ell}(x).$$

В силу граничных условий $F = 0$ на $\partial\Omega$, градиент ∇F в точке $x_0 \in \partial\Omega$ направлен по нормали, кроме того, $\nabla F(x_0) \in K(x_0)$, поэтому

$$-r(x_0, -n(x_0)) \leq \frac{\partial F(x_0)}{\partial n(x_0)} \leq r(x_0, n(x_0)).$$

В общей ситуации

$$\underline{\ell}(x_0) \leq -r(x_0, -n(x_0)), \quad \overline{\ell}(x_0) \geq r(x_0, n(x_0)).$$

Условие "е" означает, что при любой точке $x_0 \in \partial\Omega$ в последних формулах должно достигаться равенство.

Замечание 2. Условие "е" выполнено, если условие "ж" справедливо не только на $\partial\Omega$, а и в некотором множестве Ω_δ, $\delta \in (0, \delta_0)$, так как тогда для любой точки $x \in \Omega_\delta$ справедливы

$$\underline{\ell}(x) = -r(x, -n(x)), \qquad \overline{\ell}(x) = r(x, n(x)).$$

Замечание 3. Шары $K(x) \subset R^n$ радиусов $R(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ удовлетворяют условиям теоремы.

§4. Доказательство теоремы

Введем функции $\overline{a}^i(x,u,p) \in C^2(\overline{\Omega} \times R \times R^n)$, $i=1,\dots,n$, такие, что

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\overline{a}^i(x,u,p)\xi_i\xi_j \geqslant \nu_1|\xi|^2, \qquad \xi \in R^n, \ (x,u,p) \in \overline{\Omega} \times R \times R^n;$$

$$\overline{a}^i(x,u,p) = a^i(x,u,p), \qquad x \in \overline{\Omega}, \ |u| \leqslant T, \ |p| \leqslant P;$$

$$\overline{a}^i(x,u,p) = const\, p_i, \qquad x \in \overline{\Omega}, \ |u| \geqslant T_1, \ |p| \geqslant P_1$$

(см. [5, лемма 1]).

Рассмотрим вариационное неравенство

$$u \in \mathcal{K}, \quad \int\limits_\Omega \left[\overline{a}^i(x,u,\nabla u)(v-u)_{x_i} + (b_i u_{x_i} + \lambda u - f)(v-u)\right]dx \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}, \qquad (2)$$

где $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i=1,\dots,n$, - пока произвольные функции, а $\lambda > 0$ - произвольное число, $f(x) = -a(x, u_0, \nabla u_0) + b_i u_{0x_i} - \lambda u_0$. Напомним, что $u_0 \in \mathcal{K}$ - решение исходного вариационного неравенства. Так как для любой функции $F \in \mathcal{K}$ имеют место

$$\operatorname*{vrai\,max}_{\Omega} |\nabla F| \leqslant \max_{x \in \Omega,\, \omega \in S_n} r(x, \omega) = T,$$

$$|F(x)| \leqslant \operatorname*{vrai\,max}_{\Omega} |\nabla F| \cdot diam\,\Omega \leqslant P,$$

то u_0 является также решением вариационного неравенства (2). При $\lambda > \lambda_0 = \frac{1}{2\nu_1}\sup\left[\sum_i \left|\frac{\partial \overline{a}^i}{\partial u}\right|^2 + |b_i|^2\right]$ оператор

$$\bar{A}_\lambda v = -\frac{d}{dx_i}\,\bar{a}^i(x, v, \nabla v) + b_i v_{x_i} + \lambda v$$

-строго монотонный [5, лемма 2] . Следовательно, существует единственное решение вариационного неравенства (2), и оно совпадает с u_0 .

Ввиду условия "в" и включения $u_0 \in \mathcal{K} \subset W^1_\infty(\Omega)$, функция f принадлежит пространству $L_m(\Omega)$. Если удастся показать, что $\bar{A}_\lambda u_0 \in \in L_m(\Omega)$, то из равенства

$$A u_0 = \bar{A}_\lambda u_0 - b_i u_{0x_i} - \lambda u_0 + a(x, u_0, \nabla u_0)$$

получим также включение $A u_0 \in L_m(\Omega)$, $1 < m < \infty$, откуда из результатов теории нелинейных эллиптических уравнений [6], следует $u_0 \in W^2_m(\Omega) \cap \cap C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$, $\beta = 1 - \frac{n}{m}$ при $m > n$ (см. также [5]).

В силу абстрактной теоремы регулярности для вариационных неравенств [2] включение $\bar{A}_\lambda u_0 \in L_m(\Omega)$ справедливо, если при любом $\varepsilon > 0$ существует элемент $u_\varepsilon \in \mathcal{K}$ такой, что $u_\varepsilon + \varepsilon J_m(\bar{A}_\lambda u_\varepsilon) = u_0$ в Ω, $u_\varepsilon = 0$ на $\partial\Omega$ и $\bar{A}_\lambda u_\varepsilon \in L_m(\Omega)$, где $J_m(t) = |t|^{m-2} t$ - отображение двойственности $L_m(\Omega) \to L_{m'}(\Omega)$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1$.

Как показано в [2-5] , условия абстрактной теоремы выполнены, если при любом $F \in \mathcal{K}$ существует решение $u \in \mathcal{K}$ задачи

$$\bar{A}_\lambda u = \theta(F - u) \text{ в } \Omega , \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{3}$$

такое, что $\bar{A}_\lambda u \in L_m(\Omega)$. Здесь $\theta \in C^1(R)$ - возрастающая функция, $\theta(0) = 0$.

Доказательство теоремы сводится, таким образом, к доказательству существования функций $b_i \in C^1(\bar{\Omega})$ и числа $\lambda > 0$, не зависящих от θ и таких, что при любом $F \in \mathcal{K}$ решение u задачи (3) существует , принадлежит $\mathcal{K}$ и $\bar{A}_\lambda u \in L_m(\Omega)$.

Поскольку задача (3) имеет решение $u \in C^2(\bar{\Omega})$ (см. [6]), то $\bar{A}_\lambda u \in L_m(\Omega)$. Остается показать, что $u \in \mathcal{K}$. Доказательство этого факта следует из ряда лемм, сформулированных ниже.

Лемма 1. *Функция $\mathcal{J}(x,p)$ выпукла по p , принадлежит пространству $C^2(\bar{\Omega} \times R^n \setminus \{0\})$ и обладает следующими свойствами:*

1. $C_1|p| \le \mathcal{J}(x,p) \le C_2|p|$;

2. $|\mathcal{J}_x|, |\mathcal{J}_{xx}| \le C_3|p|$; $|\mathcal{J}_p|, |\mathcal{J}_{xp}| \le C_4$;

3. *существует константа* $\nu_2 > 0$ *такая, что*

$$(\mathcal{J}^2(x,p))_{p_i p_j}\,\xi_i\,\xi_j \geqslant \nu_2|\xi^2|, \quad \xi \in R^n, \ p \in R^n \setminus \{0\};$$

4. $\mathcal{J}(x,p) = \mathcal{J}_{p_\kappa}(x,p)\cdot p_\kappa, \quad p \in R^n \setminus \{0\};$

5. $\mathcal{J}(x,q) \geqslant \mathcal{J}_{p_\kappa}(x,p)\cdot q_\kappa, \quad p \in R^n \setminus \{0\}, \ q \in R^n,$

где C_i, $i=1,\ldots,4$, *- положительные константы.*

Доказательство леммы 1. Свойства 1,2 следуют из указанного выше представления $\mathcal{J}(x,p) = |p|/r(x, p/|p|)$, условия "д" и свойств функции Минковского. Матрица $(\mathcal{J}^2)_{p_i p_j}$ положительно определенная (свойство 3) в силу строгой выпуклости множеств $K(x)$. Равенство 4 обусловлено однородностью функции Минковского, а неравенство 5 получается непосредственно из определения выпуклой функции

$$\mathcal{J}(x,q) - \mathcal{J}(x,p) \geqslant \mathcal{J}_{p_\kappa}(x,p)(q_\kappa - p_\kappa)$$

и свойства 4.

Лемма 2. *Существуют функции* $\underline{w}, \overline{w} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *такие, что*

1. $\underline{w} = \overline{w} = 0$ *на* $\partial\Omega$; $\overline{w} > 0$, $\underline{w} < 0$ *в* Ω;
2. $\dfrac{\partial \overline{w}(x)}{\partial n(x)} = r(x, n(x)), \quad \dfrac{\partial \underline{w}(x)}{\partial n(x)} = -r(x, -n(x))$ *в* $\partial\Omega$;
3. $\dfrac{\partial \overline{w}(x)}{\partial n(x)} > 0, \quad \dfrac{\partial \underline{w}(x)}{\partial n(x)} < 0$ *в* Ω_δ, $\delta \in (0, \delta_1)$;
4. *для любой функции* $F \in \mathcal{K}$ *справедливо неравенство*

$$\underline{w}(x) \leqslant F(x) \leqslant \overline{w}(x) \quad в \ \overline{\Omega}.$$

Доказательство леммы 2. На множестве Ω_δ определим функции:

$$\underline{g}(x) = \int_{[x_0, x]} \underline{\ell}(y)\,dS_y, \quad \overline{g}(x) = \int_{[x_0, x]} \overline{\ell}(y)\,dS_y.$$

Здесь

$$\underline{\ell}(y) = -\max_{\omega \in S_n} r(y,\omega)\cos(\omega, -n(y)) \leqslant -r(y, -n(y)) < 0,$$

$$\overline{\ell}(y) = \max_{\omega \in S_n} r(y,\omega)\cos(\omega, n(y)) \geqslant r(y, n(y)) > 0$$

(см. §2). Интегрирование ведется по отрезку $[x_0, x]$, где $x_0 \in \partial\Omega$ - ближайшая граничная точка для x, а следовательно, и для любого $y \in [x_0, x]$. Поэтому

$$n(x) = n(y) = n(x_0) \qquad \forall y \in [x_0, x].$$

В $\overline{\Omega}_\delta$ имеем:

$$\frac{\partial \bar{g}(x)}{\partial n(x)} = \bar{\ell}(x) > 0, \qquad \frac{\partial \underline{g}(x)}{\partial n(x)} = \underline{\ell}(x) < 0,$$

а на границе $\partial\Omega$ получаем

$$\frac{\partial \bar{g}(x)}{\partial n(x)} = r(x, n(x)), \qquad \frac{\partial \underline{g}(x)}{\partial n(x)} = -r(x, -n(x)).$$

Действительно, из условия "е" следует, что множество $K(x)$ при $x \in \partial\Omega$ заключено между двумя опорными гиперплоскостями, касательными к $\partial K(x)$ в точках пересечения $\partial K(x)$ с прямой $H(x)$ (см. §2). Причем прямая $H(x)$ нормальна к этим гиперплоскостям, поэтому проекция множества $K(x)$ на $H(x)$ есть отрезок $[-r(x,-n(x));\ r(x, n(x))]$, т.е.

$$\bar{\ell}(x) = r(x, n(x)), \quad \underline{\ell}(x) = -r(x, -n(x)) \qquad \forall x \in \partial\Omega.$$

Учитывая также условие "ж", получаем, что

$$\underline{g}, \bar{g} \in C^2(\Omega_\delta) \cap C^1(\overline{\Omega}_\delta).$$

Введем функцию $\chi \in C^2(\overline{\Omega})$ такую, что $\chi(x) = 1$ при $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}$, $\chi(x) = 0$ при $x \in \overline{\Omega}_{\delta/2}$. Положим

$$\underline{w}(x) = \begin{cases} (1-\chi(x))\underline{g}(x) - \chi(x) M, & x \in \overline{\Omega}_\delta; \\ -M, & x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}; \end{cases}$$

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} (1-\chi(x))\bar{g}(x) + \chi(x) M, & x \in \overline{\Omega}_\delta; \\ M, & x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}, \end{cases}$$

где $M = \max\{T, \max\limits_{\overline{\Omega}_\delta} \bar{g}(x), \max\limits_{\overline{\Omega}_\delta} -\underline{g}(x)\}$.

Определение T см. в §2.

Поскольку $\bar{w} = \bar{g}$, $\underline{w} = \underline{g}$ в $\overline{\Omega}_{\delta/2}$, то $\bar{w}, \underline{w} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ и удовлетворяют свойствам 1-3 леммы 2. Докажем справедливость утверждения 4. Пусть $F(x)$ - произвольная функция из $\mathcal{K}$ и x - произвольная точка $\overline{\Omega}_\delta$. Так как $F \in W^1_\infty(\Omega) \subset C^{0,1}(\overline{\Omega})$ и $F = 0$ на $\partial\Omega$, то

$$F(x) = \int\limits_{[x_0, x]} \frac{\partial F(y)}{\partial n(y)}\, dS_y .$$

Из определения производной по направлению и условия $\nabla F(y) \in K(y)$ имеем

$$\frac{\partial F(y)}{\partial n(y)} = |\nabla F(y)| \cdot \cos(\nabla F(y), n(y)) \leqslant \max_{\omega \in S_n} r(y,\omega) \cdot \cos(\omega, n(y)) = \overline{\ell}(y),$$

$$\frac{\partial F(y)}{\partial n(y)} = -|\nabla F(y)| \cdot \cos(\nabla F(y), -n(y)) \geqslant -\max_{\omega \in S_n} r(y,\omega) \cos(\omega, -n(y)) = \underline{\ell}(y).$$

Таким образом, в $\overline{\Omega}_\delta$ получаем

$$\underline{w}(x) \leqslant \underline{g}(x) = \int\limits_{[x_0, x]} \underline{\ell}(y) dS_y \leqslant \int\limits_{[x_0, x]} \frac{\partial F(y)}{\partial n(y)} dS_y \leqslant \int\limits_{[x_0, x]} \overline{\ell}(y) dS_y = \overline{g}(x) \leqslant \overline{w}(x),$$

так как в силу выбора M выполняются

$$\underline{w}(x) = \underline{g}(x) + \chi(x)(-M - \underline{g}(x)) \leqslant \underline{g}(x) \qquad \text{в } \overline{\Omega}_\delta,$$

$$\overline{w}(x) = \overline{g}(x) + \chi(x)(M - \overline{g}(x)) \geqslant \overline{g}(x) \qquad \text{в } \overline{\Omega}_\delta .$$

Если $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}$, то при произвольном $y \in \partial\Omega$ имеет место

$$|F(x)| = |F(x) - F(y)| \leqslant \operatorname*{vrai\,max}_{\Omega} |\nabla F| \cdot \operatorname{diam} \Omega \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x \in \overline{\Omega}, \omega \in S_n} r(x,\omega) \cdot \operatorname{diam} \Omega = T \leqslant M .$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Существуют функции* $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$, *и число* $\lambda_1 > 0$ *такие, что при* $\lambda > \max\{\lambda_0, \lambda_1\}$ $\overline{A}_\lambda \overline{w} \geqslant 0$ *в* Ω, $\overline{A}_\lambda \underline{w} \leqslant 0$ *в* Ω.

Доказательство леммы 3. Введем обозначения:

$$\varepsilon_0 = \min\left\{ \min_{\overline{\Omega}_{\delta/2}} \frac{\partial \overline{w}}{\partial n}, \quad \min_{\overline{\Omega}_{\delta/2}} \left(-\frac{\partial \underline{w}}{\partial n} \right) \right\},$$

$$\varepsilon_1 = \max\left\{0, \sup_{\Omega}\left[\bar a^i(x,\bar w,\nabla\bar w)\right]_{x_i}, \ \sup_{\Omega}\left[-\bar a^i(x,\underline{w},\nabla\underline{w})\right]_{x_i}\right\},$$

$$\varepsilon_2 = \min\left\{\min_{\Omega\setminus\Omega_{\delta/2}} \bar w, \quad \min_{\Omega\setminus\Omega_{\delta/2}} (-\underline{w})\right\}.$$

Из свойств функций $\underline{w}$, $\bar w$ следует, что константы $\varepsilon_0, \varepsilon_2$ строго положительны.

Определим
$$b_i(x) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\left(1-\chi(x)\right)n_i(x), \quad i=1,\dots,n,$$

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \lambda > \max\{\lambda_0, \lambda_1\}.$$

Функция $\chi \in C^2(\bar\Omega)$ равна 0 в $\bar\Omega_{\delta/2}$ и равна 1 в $\overline{\Omega\setminus\Omega_\delta}$.
Имеем:
$$b_i \bar w_{x_i} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\left(1-\chi\right)n_i \bar w_{x_i} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\left(1-\chi\right)\frac{\partial \bar w}{\partial n},$$

откуда, в силу леммы 2 п.3, справедливы
$$b_i \bar w_{x_i} \geqslant \varepsilon_1 \ \text{ в } \ \bar\Omega_{\delta/2}, \quad b_i \bar w_{x_i} \geqslant 0 \ \text{ в } \ \overline{\Omega\setminus\Omega_{\delta/2}}.$$
Аналогично
$$b_i \underline{w}_{x_i} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\left(1-\chi\right)n_i \underline{w}_{x_i} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\left(1-\chi\right)\frac{\partial \underline{w}}{\partial n},$$
откуда
$$b_i \underline{w}_{x_i} \leqslant -\varepsilon_1 \ \text{ в } \ \bar\Omega_{\delta/2}, \quad b_i \underline{w}_{x_i} \leqslant 0 \ \text{ в } \ \overline{\Omega\setminus\Omega_{\delta/2}}.$$

В $\bar\Omega$ справедливо неравенство $\lambda\bar w \geqslant 0$, причем в $\overline{\Omega\setminus\Omega_{\delta/2}}$
$$\lambda\bar w(x) \geqslant \lambda \min_{\Omega\setminus\Omega_{\delta/2}} \bar w(x) \geqslant \lambda\varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_1.$$

Аналогично $\lambda\underline{w} \leqslant 0$ в $\bar\Omega$, а $\lambda\underline{w}(x) \leqslant -\lambda\varepsilon_2 \leqslant -\varepsilon_1$ в $\overline{\Omega\setminus\Omega_{\delta/2}}$.
Следовательно, если $x \in \bar\Omega_{\delta/2}$, то

$$\bar A_\lambda \bar w(x) = -\left[\bar a^i(x,\bar w,\nabla\bar w)\right]_{x_i} + b_i \bar w_{x_i} + \lambda\bar w \geqslant$$

$$\geq -[\bar{a}^i(x,\bar{w},\nabla\bar{w})]_{x_i} + b_i\bar{w}_{x_i} \geq -[\bar{a}^i(x,\bar{w},\nabla\bar{w})]_{x_i} + \varepsilon_1 \geq$$

$$\geq -[\bar{a}^i_{\bullet}(x,\bar{w},\nabla\bar{w})]_{x_i} + \sup_{\Omega}[\bar{a}^i(x,\bar{w},\nabla\bar{w})]_{x_i} \geq 0,$$

$$\bar{A}_\lambda \underline{w}(x) = -[\bar{a}^i(x,\underline{w},\nabla\underline{w})]_{x_i} + b_i\underline{w}_{x_i} + \lambda\underline{w} \leq$$

$$\leq -[\bar{a}^i(x,\underline{w},\nabla\underline{w})]_{x_i} + b_i\underline{w}_{x_i} \leq -[\bar{a}^i(x,\underline{w},\nabla\underline{w})]_{x_i} - \varepsilon_1 \leq 0.$$

Если $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_{\delta/2}}$, то

$$\bar{A}_\lambda\bar{w} \geq -[\bar{a}^i(x,\bar{w},\nabla\bar{w})]_{x_i} + \lambda\bar{w} \geq -[\bar{a}^i(x,\bar{w},\nabla\bar{w})]_{x_i} + \varepsilon_1 \geq 0,$$

$$\bar{A}_\lambda\underline{w} \leq -[\bar{a}^i(x,\underline{w},\nabla\underline{w})]_{x_i} + \lambda\underline{w} \leq -[\bar{a}^i(x,\underline{w},\nabla\underline{w})]_{x_i} - \varepsilon_1 \leq 0.$$

Лемма 3 доказана.

Теорема сравнения [5]. *Если* $u_1, u_2 \in W_2^1(\Omega)$, $F \in L_\infty(\Omega)$, $\lambda > \lambda_0$,

$$\bar{A}_\lambda u_1 \geq \theta(F-u_1), \quad \bar{A}_\lambda u_2 \leq \theta(F-u_2) \qquad \text{в } \Omega,$$

$$u_2 \leq u_1 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

то $u_2 \leq u_1$ *в* $\bar{\Omega}$.

Далее будем предполагать, что функции $b_i(x)$ *такие же, как в лемме 3, и число* $\lambda > \max\{\lambda_0, \lambda_1\}$.

Лемма 4. *Пусть* $F \in \mathcal{K}$ *и* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ *– решение задачи* (3). *Тогда* $\nabla u(x) \in K(x)$ $\forall x \in \partial\Omega$.

Доказательство леммы 4. В силу леммы 2 и условия $F \in \mathcal{K}$, имеем

$$\underline{w}(x) \leq F(x) \leq \bar{w}(x) \qquad \forall x \in \bar{\Omega},$$

а так как функция θ неубывающая, то

$$\theta(F-\bar{w}) \leq 0, \quad \theta(F-\underline{w}) \geq 0 \qquad \text{в } \Omega.$$

Поэтому справедливы неравенства (см. лемму 3):

$$\bar{A}_\lambda \bar{w} \geq 0 \geq \theta(F-\bar{w}),\ \bar{A}_\lambda \underline{w} \leq 0 \leq \theta(F-\underline{w}) \qquad \text{в } \Omega .$$

Поскольку на границе $\partial\Omega$ имеет место $F(x)=\underline{w}(x)=\bar{w}(x)=u(x)=0$, то из теоремы сравнения получаем для решения u задачи (3) неравенства

$$\underline{w}(x) \leq u(x) \leq \bar{w}(x) \quad \text{в } \Omega;$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} \leq \frac{\partial \bar{w}(x)}{\partial n(x)} = r(x, n(x)) \quad \text{на } \partial\Omega;$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)} \geq \frac{\partial \underline{w}(x)}{\partial n(x)} = -r(x, -n(x)) \quad \text{на } \partial\Omega .$$

На границе $\partial\Omega$ градиент решения u направлен по нормали: $\nabla u(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial n(x)} \cdot n(x)$, следовательно, $\nabla u(x) \in K(x)$ $\forall x \in \partial\Omega$.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Существует число $\lambda_2 > 0$, не зависящее от θ такое, что если $F \in \mathcal{K}$ и $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ - решение задачи (3) при $\lambda > \max\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$, то $\nabla u(x) \in K(x)$ $\forall x \in \Omega$.*

Доказательство леммы 5. В силу эллиптичности оператора $\bar{A}_\lambda$ (условие "б") и строгой выпуклости множеств $K(x)$, матрицы $(\bar{a}^i)_{p_j}$, $(\mathcal{J}^2)_{p_k p_\ell}$ положительно определенные.

Следовательно, существует константа $\nu_3 > 0$ такая, что для любой матрицы (η_{ij}), $i,j=1,\ldots,n$, выполнено неравенство

$$(\bar{a}^i)_{p_j} (\mathcal{J}^2)_{p_k p_\ell} \eta_{ik} \eta_{j\ell} \geq \nu_3 |\eta|^2,$$

из которого следует интегральное неравенство

$$\int_\Omega (\bar{a}^i)_{p_j} (\mathcal{J}^2)_{p_k p_\ell} u_{x_i x_k} u_{x_j x_\ell} (\mathcal{J}^2-1)^+ dx \geq \nu_3 \int_\Omega |D^2 u|^2 (\mathcal{J}^2-1)^+ dx. \tag{4}$$

Здесь и далее приняты следующие сокращения:

$$(\mathcal{J}^2-1)^+ = \begin{cases} \mathcal{J}^2-1, & \text{если } \mathcal{J}^2-1 \geq 0; \\ 0, & \text{если } \mathcal{J}^2-1 \leq 0. \end{cases}$$

Частные производные функций $\bar{a}^i(x,u,p)$, $\mathcal{J}^2(x,p)$ будут обозначаться с помощью нижнего индекса $\bar{a}^i_{x_j}$, $\bar{a}^i_u$, $(\mathcal{J}^2)_{x_j}$ и т.д., а полные производ-

ные через $\frac{d}{dx_j}\bar{a}^i, \frac{d}{dx_j}\mathcal{J}^2, \frac{d^2}{dx_i dx_j}\mathcal{J}^2$. Таким образом,

$$\frac{d}{dx_j}\mathcal{J}^2 = (\mathcal{J}^2)_{x_j} + \mathcal{J}^2_{p_k} u_{x_k x_j}, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx_j}\bar{a}^i = \bar{a}^i_{x_j} + \bar{a}^i_{\kappa} u_{x_j} + \bar{a}^i_{p_k} u_{x_k x_j} . \tag{6}$$

Аргументы функций $\bar{a}^i(x,u,\nabla u)$, $\mathcal{J}^2(x,\nabla u)$ в случаях, не приводящих к разночтению, будут опускаться. Через C обозначаются различные константы, не зависящие от θ .

В силу леммы 4, $\nabla u(x) \in K(x)$, $x \in \partial\Omega$, или, что эквивалентно, $(\mathcal{J}^2-1)^+ = 0$ на $\partial\Omega$. Поэтому левую часть неравенства (4) можно преобразовать с учетом (5), (6) следующим образом:

$$\int_\Omega \bar{a}^i_{p_j} (\mathcal{J}^2)_{p_k p_e} u_{x_j x_k} u_{x_i x_e} (\mathcal{J}^2-1)^+ dx =$$

$$= \int_\Omega \Big\{ \bar{a}^i_{p_j} u_{x_j x_k} \frac{d}{dx_i} (\mathcal{J}^2)_{p_k} (\mathcal{J}^2-1)^+ - \bar{a}^i_{p_j} u_{x_j x_k} (\mathcal{J}^2)_{p_k x_i} (\mathcal{J}^2-1)^+ \Big\} dx =$$

$$= \int_\Omega \Big\{ -\frac{d}{dx_i}\left[\bar{a}^i_{p_j} u_{x_j x_k}\right] (\mathcal{J}^2)_{p_k} (\mathcal{J}^2-1)^+ - \bar{a}^i_{p_j} u_{x_j x_k} (\mathcal{J}^2)_{p_k} \frac{d}{dx_i} (\mathcal{J}^2-1)^+ -$$

$$- \bar{a}^i_{p_j} u_{x_j x_k} (\mathcal{J}^2)_{p_k x_i} (\mathcal{J}^2-1)^+ \Big\} dx. \tag{7}$$

В силу равенства

$$\frac{d}{dx_i}\left[\bar{a}^i_{p_j} u_{x_j x_k}\right] = \frac{d^2}{dx_i dx_k}\bar{a}^i - \frac{d}{dx_i}\left[\bar{a}^i_{x_k} + \bar{a}^i_u u_{x_k}\right]$$

и неравенства

$$\int_\Omega \bar{a}^i_{p_j} u_{x_j x_k} (\mathcal{J}^2)_{p_k} \frac{d}{dx_i} (\mathcal{J}^2-1)^+ dx =$$

$$= \int_\Omega \Big\{ \bar{a}^i_{p_j} \frac{d}{dx_j} \mathcal{J}^2 \frac{d}{dx_i} (\mathcal{J}^2-1)^+ - \bar{a}^i_{p_j} (\mathcal{J}^2)_{x_j} \frac{d}{dx_i} (\mathcal{J}^2-1)^+ \Big\} dx \geqslant$$

$$\geqslant -\int_\Omega \bar{a}^i_{p_j} (\mathcal{J}^2)_{x_j} \frac{d}{dx_i} (\mathcal{J}^2-1)^+ dx,$$

выражение (7) не превосходит величины

$$\int_\Omega \frac{d}{dx_k}\left(-\frac{d}{dx_i}\bar{a}^i\right)(\mathcal{J}^2)_{p_k}(\mathcal{J}^2-1)^+dx+\int_\Omega \frac{d}{dx_i}(\bar{a}^i_{x_k}+\bar{a}^i_u u_{x_k})(\mathcal{J}^2)_{p_k}(\mathcal{J}^2-1)^+dx+$$

$$+\int_\Omega \bar{a}^i_{p_j}(\mathcal{J}^2)_{x_j}\frac{d}{dx_i}(\mathcal{J}^2-1)^+dx-\int_\Omega \bar{a}^i_{p_j}u_{x_jx_k}(\mathcal{J}^2)_{p_kx_i}(\mathcal{J}^2-1)^+dx. \qquad (8)$$

Поскольку u является решением уравнения (3), то первое слагаемое в (8) преобразуется к виду

$$\int_\Omega \frac{d}{dx_k}\left(-\frac{d\bar{a}^i}{dx_i}\right)(\mathcal{J}^2)_{p_k}(\mathcal{J}^2-1)^+dx=\int_\Omega \frac{d}{dx_k}\left[-b_i u_{x_i}-\lambda u+\theta(F-u)\right](\mathcal{J}^2)_{p_k}(\mathcal{J}^2-1)^+dx=$$

$$=\int_\Omega\left[-b_{ix_k}u_{x_i}-b_i u_{x_ix_k}-\lambda u_{x_k}+\theta'\cdot(F_{x_k}-u_{x_k})\right](\mathcal{J}^2)_{p_k}(\mathcal{J}^2-1)^+dx. \qquad (9)$$

В силу свойств функции $\mathcal{J}$ (лемма 1) равенство (9) оценивается сверху величиной

$$\int_\Omega\Big\{C\mathcal{J}^2(\mathcal{J}^2-1)^++C|D^2u|\mathcal{J}(\mathcal{J}^2-1)^+-2\lambda\mathcal{J}^2(\mathcal{J}^2-1)^++$$

$$+\theta'(F-u)\cdot(F_{x_k}-u_{x_k})(\mathcal{J}^2)_{p_k}(\mathcal{J}^2-1)^+\Big\}dx. \qquad (10)$$

Слагаемое в (10), содержащее $|D^2u|$, оценивается с помощью неравенства Коши:

$$C|D^2u|\mathcal{J}(\mathcal{J}^2-1)^+\leqslant\frac{\nu_3}{4}|D^2u|^2(\mathcal{J}^2-1)^++C\mathcal{J}^2(\mathcal{J}^2-1)^+,$$

поэтому выражение (10) и, следовательно, (9) не превосходят величины

$$\int_\Omega\Big\{\frac{\nu_3}{4}|D^2u|^2(\mathcal{J}^2-1)^++(C-2\lambda)\mathcal{J}^2(\mathcal{J}^2-1)^++$$

$$+\theta'(F-u)(F_{x_k}-u_{x_k})(\mathcal{J}^2)_{p_k}(\mathcal{J}^2-1)^+\Big\}dx. \qquad (11)$$

Покажем, что $\theta'(F-u)(F_{x_k}-u_{x_k})(\mathcal{J}^2)_{p_k}(\mathcal{J}^2-1)^+ \leq 0.$

Действительно, как указано в лемме 1, справедливо неравенство

$$\mathcal{J}(x,q) \geq \mathcal{J}_{p_k}(x,p)\cdot q_k\,, \qquad q\in R^n,\ p\in R^n\setminus\{0\}.$$

Полагая $p=\nabla u$, $q=\nabla F$ (можно считать, что $\nabla u\neq 0$, иначе $\nabla u(x)\in K(x)$, т.е. $(\mathcal{J}^2(x,\nabla u(x))-1)^+=0$), получаем

$$\mathcal{J}(x,\nabla F)\geq \mathcal{J}_{p_k}(x,\nabla u)\cdot F_{x_k}.$$

Следовательно, почти всюду в Ω выполняется

$$\theta'(F-u)(F_{x_k}-u_{x_k})\cdot 2\mathcal{J}(x,\nabla u)\mathcal{J}_{p_k}(x,\nabla u)(\mathcal{J}^2(x,\nabla u)-1)^+\leq$$

$$\leq \theta'(F-u)2\mathcal{J}(x,\nabla u)[\mathcal{J}(x,\nabla F)-\mathcal{J}(x,\nabla u)](\mathcal{J}^2(x,\nabla u)-1)^+\leq$$

$$\leq \theta'(F-u)2\mathcal{J}(x,\nabla u)[(\mathcal{J}(x,\nabla F)-1)+(1-\mathcal{J}(x,\nabla u)](\mathcal{J}^2-1)^+\leq 0.$$

Таким образом, для первого слагаемого в (8) получена оценка

$$\int_\Omega \frac{d}{dx_k}\left(-\frac{d}{dx_i}\bar a^i\right)(\mathcal{J}^2)_{p_k}(\mathcal{J}^2-1)^+dx\leq$$

$$\leq\int_\Omega\left[\frac{\nu_1}{4}|D^2u|^2(\mathcal{J}^2-1)^+ +(C-2\lambda)\mathcal{J}^2(\mathcal{J}^2-1)^+\right]dx. \tag{12}$$

Для оценки второго слагаемого в (8) рассмотрим функцию

$$\Phi(x)=\frac{d}{dx_i}(\bar a^i_{x_k}+\bar a^i_u u_{x_k}).$$

Расписывая полную производную, получаем

$$\Phi(x)=\bar a^i_{x_k x_i}+\bar a^i_{x_k u}u_{x_i}+\bar a^i_{p_\ell x_k}u_{x_\ell x_i}+\bar a^i_{x_i u}u_{x_k}+$$

$$+\bar a^i_{uu}u_{x_i x_k}+\bar a^i_{up_\ell}u_{x_k}u_{x_\ell x_i}+\bar a^i_u u_{x_k x_i}. \tag{13}$$

Функции $\bar a^i\in C^2(\bar\Omega\times R\times R^n)$ вне компакта $\mathfrak{M}$ имеют вид $\bar a^i(x,u,p)=const\,p_i$, поэтому

$$\Phi(x)=0,\qquad \text{если } (x,u(x),\nabla u(x))\notin\mathfrak{M}.$$

Пусть теперь $x\in\bar\Omega$ - такая точка, что $(x,u(x),\nabla u(x))\in\mathfrak{M}$. Тогда

$|\nabla u(x)| \leqslant P_1$. Производные функций $\bar{a}^i$, $i=1,\dots,n$, до второго порядка непрерывны и, следовательно, ограничены на компакте $\mathfrak{M}$. Поэтому

$$\Phi(x) \leqslant C + C|D^2 u|, \quad \text{если} \quad (x, u(x), \nabla u(x)) \in \mathfrak{M}.$$

Используя неравенство Коши, получаем

$$|\Phi(x)| (\zeta^2)_{p_k} (\zeta^2-1)^+ \leqslant C\zeta(\zeta^2-1)^+ + C\zeta|D^2u|(\zeta^2-1)^+ \leqslant$$
$$\leqslant C\zeta^2(\zeta^2-1)^+ + \frac{\nu_3}{4}|D^2u|^2(\zeta^2-1)^+.$$

Таким образом, получена оценка второго слагаемого (8):

$$\left|\int_\Omega \frac{d}{dx_i}\left(\bar{a}^i_{x_k} + \bar{a}^i_u u_{x_k}\right)(\zeta^2)_{p_k}(\zeta^2-1)^+ dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega \left\{\frac{\nu_3}{4}|D^2u|^2(\zeta^2-1)^+ + C\zeta^2(\zeta^2-1)^+\right\} dx. \tag{14}$$

Для оценки третьего слагаемого в (8) воспользуемся интегрированием по частям. Так как $(\zeta^2-1)^+ = 0$ на $\partial\Omega$, то

$$\int_\Omega \bar{a}^i_{p_j} (\zeta^2)_{x_j} \frac{d}{dx_i}(\zeta^2-1)^+ dx =$$
$$= -\int_\Omega \frac{d}{dx_i}\left[\bar{a}^i_{p_j}(\zeta^2)_{x_j}\right](\zeta^2-1)^+ dx =$$
$$= -\int_\Omega \left\{\frac{d}{dx_i}\bar{a}^i_{p_j}(\zeta^2)_{x_j}(\zeta^2-1)^+ + \bar{a}^i_{p_j}\frac{d}{dx_i}(\zeta^2)_{x_j}(\zeta^2-1)^+\right\} dx. \tag{15}$$

Так как вне компакта $\mathfrak{M}$ функции $\bar{a}^i(x,u,p)$, $i=1,\dots,n$, линейны по p, а при $(x,u,p) \in \mathfrak{M}$ необходимо выполнение неравенства $|p| \leqslant P_1$, то в $\bar{\Omega}\times R\times R^n$

$$|\bar{a}^i_{p_j}(x,u,p)| \leqslant const,$$
$$\left|\frac{d}{dx_i}\bar{a}^i_{p_j}\right| = |\bar{a}^i_{p_j x_i} + \bar{a}^i_{p_j u} u_{x_i} + \bar{a}^i_{p_j p_\ell} u_{x_\ell x_i}| \leqslant C + C|D^2u|.$$

Поэтому используя формулу (5) и неравенство Коши, получаем оценку интеграла (15):

$$\left|\int_\Omega \bar{a}^i_{p_j}(\zeta^2)_{x_j}\frac{d}{dx_i}(\zeta^2-1)^+ dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega \left[C\zeta^2(\zeta^2-1)^+ + \frac{\nu_3}{4}|D^2u|^2(\zeta^2-1)^+\right] dx. \tag{16}$$

Последнее слагаемое в (8) оценивается аналогичным образом:

$$\left|\int_\Omega \bar{a}^i_{p_j} u_{x_j x_k} (\mathcal{J}^2)_{p_k x_i} (\mathcal{J}^2-1)^+ dx\right| \leq \int_\Omega \left(\frac{\nu_3}{4}|D^2 u| + C\mathcal{J}^2\right)(\mathcal{J}^2-1)^+ dx. \tag{17}$$

Окончательно, из (4), (7), (8), (12), (14), (16), (17) получаем неравенство

$$\int_\Omega (C-2\lambda)\mathcal{J}^2(\mathcal{J}^2-1)^+ dx \geq 0,$$

из которого при $\lambda > \frac{1}{2}C$ вытекает равенство

$$\int_\Omega \mathcal{J}^2(\mathcal{J}^2-1)^+ dx = 0.$$

Следовательно, $(\mathcal{J}^2(x,\nabla u)-1)^+ = 0$ в Ω, т.е $\nabla u(x) \in K(x)$ в Ω. Лемма 5 доказана.

На основании лемм 4,5 и рассуждений, проведенных в начале параграфа, заключаем, что $Au_0 \in L_m(\Omega)$ и $u_0 \in W^2_m(\Omega) \cap C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ при $m > n$; $\beta = 1 - \frac{n}{m}$.

В заключение автор благодарит профессора Н.Н. Уральцеву за обсуждение результатов и внимание к работе.

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М.: Мир, 1972. - 587 с.
2. Brezis H., Stampacchia G. Sur la regularite de la solution d'inequations elliptiques. - Bull.Soc.math.France, 1968, v.96, p.153--180.
3. Gerhardt C. Regularity of solutions to nonlinear variational inequalities with a gradient bounds as a constraint. Arch.Rational Mech. and Analysis, 1975, v.58, p.309-315.
4. Cimatti G. The plane stress problem of Chizzetti in Elasto-Plastisity.- Appl. math. and optim., 1976, v.3, № 1, p. 15-26.
5. Williams H. Nonlinear nonhomogeneous elliptic variational inequalities with a nonconstant gradient constraint. - J.math. pures et appl., 1981, v.60, № 2, p.213-226.
6. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. - М.: Наука, 1973. - 576 с.