УДК 517.9

К ВОПРОСУ О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Т.Н. Рожковская (Новосибирск)

§ 1

Пусть V - рефлексивное банахово пространство, скобки $<.,.>$ обозначают двойственность между V и сопряженным к нему V'; A - заданный оператор из V в V' и $\mathcal{K}$ - замкнутое выпуклое множество в V. Рассматривается вариационное неравенство

$$u \in \mathcal{K}, \quad <Au, v-u> \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}. \tag{1}$$

Определение. Касательным конусом к множеству $\mathcal{K}$ в точке v называется множество

$$T(\mathcal{K}; v) = cl_V \{h \in V : \exists t > 0 \quad v + th \in \mathcal{K}\}.$$

Здесь и далее $cl_V\, \mathfrak{M}$ или $\overline{\mathfrak{M}}^V$ обозначает замыкание множества $\mathfrak{M}$ в топологии V.

Определение. Нормальным конусом к множеству $\mathcal{K}$ в точке v называется поляра касательного конуса, т.е. множество

$$N(\mathcal{K}; v) = \{g \in V' : <g,h> \leqslant 0 \quad \forall h \in T(\mathcal{K}; v)\}.$$

Если $v \in \operatorname{int} \mathcal{K}$, то $T(\mathcal{K}; v) \equiv V$ и $N(\mathcal{K}; v) = \{0\}$.

Неравенство (1) эквивалентно следующей задаче: найти $u \in \mathcal{K}$ такой, что

$$-Au \in N(\mathcal{K}; u). \tag{2}$$

Любое замкнутое выпуклое множество $\mathcal{K}$ является пересечением полупространств, его содержащих, и потому представимо в виде

$$\mathcal{K}=\{v\in V : \langle \ell, v\rangle \geqslant \alpha_\ell \quad \forall \ell\in\mathcal{L}\}, \tag{3}$$

где $\mathcal{L}\subset V'$, $\{\alpha_\ell\}_{\ell\in\mathcal{L}}$ - набор вещественных чисел, соответствующих фиксированному множеству $\mathcal{L}$. Для данного множества $\mathcal{K}$ запись (3) неоднозначна, но это не существенно для наших целей.

Априори $\mathcal{L}\subset V'$ и $Au_{\mathcal{K}}\in V'$, где $u_{\mathcal{K}}$ - решение неравенства (1). Пусть X' - рефлексивное банахово пространство, непрерывно вложенное в V'. Предположим, что $\mathcal{K}$ можно записать в виде (3) с фиксированным семейством $\mathcal{L}$ из X'. Теорема из § 2 выделяет класс множеств $\mathcal{K}$, при которых $Au_{\mathcal{K}}\in X'$, и имеет следующее приложение к проблеме регулярности. Если для решения u классической задачи $Au=F$ в V' известно, что из включения $F\in X'$ следует $u\in W$, где W - некоторое подпространство в V, то для любого вариационного неравенства с таким же оператором A и множеством $\mathcal{K}$, со свойствами, указанными в теореме из § 2, имеет место теорема регулярности: $u_{\mathcal{K}}\in W$. Если A связан с эллиптическим оператором второго порядка, то классической задаче Дирихле (Неймана) соответствует вариационное неравенство (1) с $\mathcal{K}\equiv \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $(\mathcal{K}\equiv W_2^1(\Omega))$, где Ω - ограниченная область в R^N. В силу результатов О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой [1] по XIX проблеме Гильберта гладкость решений эллиптических уравнений второго порядка, а также решений классических задач для таких уравнений обусловлена лишь гладкостью данных и (в случае нелинейных операторов) поведением на бесконечности функций, образующих оператор. В частности, если A соответствует линейный оператор с коэффициентами класса C^∞ и $\partial\Omega\in C^\infty$, то решение неравенства (1) при $\mathcal{K}\equiv \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $(\mathcal{K}\equiv W_2^1(\Omega))$ бесконечно дифференцируемо. Как показали Брезис, Стампаккья [2], гладкими (из C^∞) будут также решения неравенств (1) с множествами

$$\mathcal{K}=\{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : \|v\|_{L_2(\Omega)}\leqslant 1\}$$

или

$$\mathcal{K}=\{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega): \int_\Omega \varphi v dx \geq 1\},$$

где $\varphi\in C^\infty(R)$- выпуклая функция.

Однако известно, что при данном операторе A результаты по гладкости зависят от природы множества $\mathcal{K}$: имеются примеры (см., например, [3]) одномерных задач с оператором Лапласа с множествами $\mathcal{K}\subset \overset{\circ}{W}_2(\Omega)$ $(\mathcal{K}\subset W_2^1(\Omega))$, в которых даже при данных класса C^∞ решение неравенства (1) , вообще говоря, негладкое.

Результаты из § 2,3 (в § 3 разобраны частные случаи) выделяют, в частности, класс вариационных неравенств без порогов гладкости, т.е. неравенств, гладкость решений которых, как и в классических задачах, зависит лишь от гладкости данных.

В § 4 приводятся примеры вариационных неравенств без порогов гладкости, а также разбирается случай множества с поточечными ограничениями (как в задаче с препятствием, задаче Синьорини и т.п.). Из примера 7 видно, что множества с поточечными ограничениями не удовлетворяют условиям установленных здесь теорем при $X'\supseteq L_2(\Omega)$, хотя в простых ситуациях такие $\mathcal{K}$ можно описать в виде (3) с гладким семейством $\mathcal{L}$. Как известно [3] , именно при таких $\mathcal{K}$, с локальными поточечными ограничениями, наблюдаются пороги гладкости и включение $Au_{\mathcal{K}}\in X'$ не имеет места при произвольном X' . Таким образом, пример 7 показывает, что конечность $\mathcal{L}$, непустая внутренность $\mathcal{K}$ и т.д. - существенные условия в полученных здесь результатах.

§ 2

Введем обозначения:

$$H_{\ell,\alpha}=\{h\in V: <\ell,h>=\alpha\},$$

$$V^+_{\ell,\alpha}=\{v\in V: <\ell,v>\geq \alpha_\ell\},$$

$$V^-_{\ell,\alpha}=\{v\in V: <\ell,v>\leq \alpha_\ell\}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{K} \neq \emptyset$ и $\mathcal{L} \neq 0$.
Множество всех таких функционалов $\ell \in \mathcal{L}$, для которых гиперплоскости H_{ℓ,α_ℓ} проходят через шар $U_\lambda(v_0)=\{v \in V: \|v-v_0\|_V \leq \lambda\}$ обозначим $\mathcal{L}_\lambda(v_0)$, т.е.

$$\mathcal{L}_\lambda(v_0)=\left\{\ell \in \mathcal{L} : \exists h_0 \in U_\lambda(v_0): <\ell, h_0> = \alpha_\ell\right\},$$

а через $\mathcal{K}_\lambda(v_0)$ - замкнутое выпуклое множество в V, определяемое $\mathcal{L}_\lambda(v_0)$ по формуле

$$\mathcal{K}_\lambda(v_0)=\left\{v \in V: <\ell, v> \geq \alpha_\ell \qquad \forall \ell \in \mathcal{L}_\lambda(v_0)\right\}.$$

Лемма 1. *Пусть* $v_0 \in \partial\mathcal{K}$. *Тогда при любом* $\lambda > 0$

$$N(\mathcal{K}, v_0) \subset \overline{\operatorname{con}}^{V'}\left\{-\mathcal{L}_\lambda(v_0)\right\},$$

где $\operatorname{con} \mathfrak{M}$ *обозначает коническую оболочку множества* $\mathfrak{M}$.

Доказательство леммы 1. Сначала покажем, что

$$\mathcal{K} \cap U_\lambda(v_0) \equiv \mathcal{K}_\lambda(v_0) \cap U_\lambda(v_0). \tag{4}$$

Тождество (4) очевидно, если $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_\lambda(v_0) = \emptyset$. Пусть $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_\lambda(v_0) \neq \emptyset$. Тогда

$$<\ell, v> \geq \alpha_\ell \quad \forall v \in U_\lambda(v_0), \quad \forall \ell \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_\lambda(v_0). \tag{5}$$

Действительно, если $\ell \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_\lambda(v_0)$, то гиперплоскость H_{ℓ,α_ℓ} не имеет общих точек с шаром $U_\lambda(v_0)$, и поэтому последний целиком лежит в одном из полупространств, соответствующих гиперплоскости H_{ℓ,α_ℓ}, причем именно в полупространстве V^+_{ℓ,α_ℓ}, так как точка v_0 из шара $U_\lambda(v_0)$ принадлежит V^+_{ℓ,α_ℓ} и, по определению $\mathcal{K}$, $<\ell, v_0> \geq \alpha_\ell$ $\forall \ell \in \mathcal{L}$. В частности, $<\ell, v_0> \geq \alpha_\ell$ $\forall \ell \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_\lambda(v_0)$.

Пусть $v \in \mathcal{K}_\lambda(v_0) \cap U_\lambda(v_0)$. Тогда из определения $\mathcal{K}_\lambda(v_0)$

следует

$$\langle \ell, \sigma \rangle \geqslant \alpha_\ell \qquad \forall \ell \in \mathcal{L}_\lambda(\sigma_0),$$

а из (5) -

$$\langle \ell, \sigma \rangle \geqslant \alpha_\ell \qquad \forall \ell \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_\lambda(\sigma_0),$$

т.е. $\sigma \in \mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_\lambda(\sigma_0) \cap U_\lambda(\sigma_0) \subseteq \mathcal{K} \cap U_\lambda(\sigma_0)$.

Так как $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_\lambda(\sigma_0)$ $\forall \lambda > 0$, $\forall \sigma_0 \in \partial\mathcal{K}$, то обратное включение также верно.

Докажем тождество

$$N(\mathcal{K}; \sigma_0) \equiv N(\mathcal{K}_\lambda(\sigma_0); \sigma_0). \tag{6}$$

Для этого достаточно показать совпадение касательных конусов

$$T(\mathcal{K}; \sigma_0) \equiv T(\mathcal{K}_\lambda(\sigma_0); \sigma_0).$$

Пусть $h \in T(\mathcal{K}_\lambda(\sigma_0); \sigma_0)$. Это означает, что существуют h_n и $t_n > 0$ такие, что $h_n \to h$ в V и $\sigma_0 + t_n h_n \in \mathcal{K}_\lambda(\sigma_0)$. Поскольку $\sigma_0 \in \mathcal{K}_\lambda(\sigma_0)$ и $\mathcal{K}_\lambda(\sigma_0)$ выпуклое, то весь отрезок $[\sigma_0, \sigma_0 + t_n h_n]$ лежит в $\mathcal{K}_\lambda(\sigma_0)$. Полагая $t < \min\{\lambda, t_n\}$, в силу (4) получаем

$$\sigma_0 + t h_n \in \mathcal{K}_\lambda(\sigma_0) \cap U_\lambda(\sigma_0) = \mathcal{K} \cap U_\lambda(\sigma_0),$$

т.е. при всех n справедливо включение $h_n \in T(\mathcal{K}; \sigma_0)$. В силу замкнутости в V конуса $T(\mathcal{K}; \sigma_0)$, имеем $h \in T(\mathcal{K}; \sigma_0)$, т.е. $T(\mathcal{K}_\lambda(\sigma_0); \sigma_0) \subseteq T(\mathcal{K}; \sigma_0)$. Обратное включение очевидно в силу вложения $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_\lambda(\sigma_0)$.

Справедливо включение

$$N(\mathcal{K}_\lambda(\sigma_0); \sigma_0) \subseteq \overline{\operatorname{con}}^{V'}\{-\mathcal{L}_\lambda(\sigma_0)\}. \tag{7}$$

Действительно, допустим, что существует элемент $F \in N(\mathcal{K}_\lambda(\sigma_0); \sigma_0)$ такой, что $F \notin \overline{\operatorname{con}}^{V'}\{-\mathcal{L}_\lambda(\sigma_0)\}$. Поскольку $\overline{\operatorname{con}}^{V'}\{-\mathcal{L}_\lambda(\sigma_0)\}$ замкнутый выпуклый конус, то существует гиперплоскость, опорная к

$\overline{\mathrm{con}}^{V'}\{-\mathcal{L}_\lambda(v_0)\}$ в 0 и отделяющая его от F, т.е. $\exists h\in V$ такой, что

$$<F,h> > 0;\ <p,h>\leqslant 0 \quad \forall p\in\overline{\mathrm{con}}^{V'}\{-\mathcal{L}_\lambda(v_0)\},$$

в частности, $<\ell,h>\geqslant 0 \quad \forall \ell\in\mathcal{L}_\lambda(v_0)$.

Но тогда при любом $t>0$

$$<\ell,v_0+th> = <\ell,v_0>+t<\ell,h>\geqslant \alpha_\ell \qquad \forall\ell\in\mathcal{L}_\lambda(v_0),$$

т.е. $v_0+th\in\mathcal{K}$ и, следовательно, $h\in T(\mathcal{K}_\lambda(v_0);v_0)$.

Поэтому должно выполняться неравенство $<F,h>\leqslant 0$. Тем самым получаем противоречие. Из формул (6), (7) следует утверждение леммы 1.

Используя рассуждения доказательства леммы 1 и учитывая, что $N(\mathcal{K};v_0)=\{0\}$ при $v_0\in\mathrm{int}\,\mathcal{K}$, можно доказать

Следствие 1. *Для любого элемента* $v\in\mathcal{K}$ *имеет место включение* $N(\mathcal{K};v)\subseteq\overline{\mathrm{con}}^{V'}\{-\mathcal{L}\}$.

Пусть u_0 - решение вариационного неравенства (1) с множеством $\mathcal{K}$ вида (3).

Теорема. *Пусть* $\mathcal{L}\subset X'$. *Если*

А. $\mathcal{L}$ *конечно*

или

В1. $\|\ell\|_{X'}\leqslant b \qquad \forall\ell\in\mathcal{L}$, *где* b - $const>0$,

В2. $\exists w_0\in\mathcal{K},\ \delta>0:\ <\ell,w_0>\geqslant\alpha_\ell+\delta \quad \forall\ell\in\mathcal{L}$,

то $Au_0\in X'$.

Доказательство теоремы. Пусть выполнено А. В силу эквивалентности (1) и (2) из следствия 1 имеем

$$-Au_0\in N(\mathcal{K};u_0)\subset\overline{\mathrm{con}}^{V'}\{-\mathcal{L}\}.$$

Поскольку множество $\mathcal{L}$ состоит из конечного числа элементов $\mathcal{L}=\{\ell_1,\dots$ $\dots,\ell_m\}\subset X'$, то

$$\overline{\mathrm{con}}^{V'}\{-\mathcal{L}\}=\{-\sum_{j=1}^{m}c_j\ell_j,\ c_j\geqslant 0\}\subset X',$$

откуда

$$-Au_0 \in X'.$$

Пусть выполнены условия В1, В2. Если $u_0 \in \operatorname{int} \mathscr{K}$, то $N(\mathscr{K}; u_0) = \{0\}$ и утверждение теоремы очевидно. Пусть $u_0 \in \partial \mathscr{K}$. В силу леммы 1, при любом $\lambda > 0$

$$-Au_0 \in N(\mathscr{K}, u_0) \subset \overline{con}^{V'} \{-\mathscr{L}_\lambda(u_0)\}.$$

Покажем, что при $\lambda > \delta / 2b$ имеет место включение

$$\overline{con}^{V'} \{-\mathscr{L}_\lambda (u_0)\} \subset X'.$$

Пусть $\varphi \in \overline{con}^{V'} \{-\mathscr{L}_\lambda(u_0)\}$, т.е. существует последовательность $\varphi_m \in con \{-\mathscr{L}_\lambda(u_0)\}$, сходящаяся к φ в V. При этом элементы φ_m определяются соотношением

$$< \varphi_m, v > = -\sum_{j=1}^{M_m} c_j^{(m)} < \ell_j^{(m)}, v > \quad \forall v \in V,$$

где

$$M_m < \infty, \quad c_j^{(m)} \geq 0, \quad \ell_j^{(m)} \in \mathscr{L}_\lambda(u_0).$$

Применим φ_m к элементу $u_0 - w_0$:

$$< \varphi_m, u_0 - w_0 > = \sum_{j=1}^{M_m} c_j^{(m)} < \ell_j^{(m)}, w_0 - u_0 > \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{M_m} c_j^{(m)} \left[\alpha_{\ell_j^{(m)}} + \delta - < \ell_j^{(m)}, u_0 > \right].$$

Так как $\ell_j^{(m)} \in \mathscr{L}_\lambda(u_0)$, то существует элемент $h_j^{(m)} \in U_\lambda(u_0)$ такой, что

$$\| u_0 - h_j^{(m)} \|_V \leq \lambda \quad \text{и} \quad < \ell_j^{(m)}, h_j^{(m)} > = \alpha_{\ell_j^{(m)}}.$$

Поэтому

$$<\Phi_m, u_0-w_0> \geq \sum_{j=1}^{M_m} c_j^{(m)} \left[\delta - <\ell_j^{(m)}, u_0 - h_j^{(m)}>\right] \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{M_m} c_j^{(m)} \left[\delta - b\lambda\right] \geq \frac{\delta}{2} \sum_{j=1}^{M_m} c_j^{(m)}.$$

Так как $\Phi_m \longrightarrow \Phi$ в V, то $\|\Phi_m\|_{V'} \leq const$, поэтому

$$0 \leq \sum_{j=1}^{M_m} c_j^{(m)} \leq \frac{2}{\delta} \|\Phi_m\|_{V'} \cdot \|u_0 - w_0\|_V \leq const,$$

откуда следует равномерная по m ограниченность Φ_m в X'. Действительно, в силу условия B1, имеем

$$\|\Phi_m\|_{X'} \leq \sum_{j=1}^{M_m} c_j^{(m)} \|\ell_j^{(m)}\|_{X'} \leq b \sum_{j=1}^{M_m} c_j^{(m)} \leq const.$$

В силу рефлексивности X' можно выделить подпоследовательность $\Phi_{m'}$, сходящуюся слабо в X' к некоторому элементу $\chi \in X'$. Но тогда $\Phi_{m'} \to \chi$ в V' и, следовательно, $\Phi \equiv \chi \in X'$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Как видно из доказательства, теорема выделяет класс множеств $\mathcal{K}$, для которых в каждой точке $v \in \partial\mathcal{K}$ нормальный конус $N(\mathcal{K}; v)$ (априори из V') лежит в пространстве X' при условии, что $\mathcal{K}$ задано формулой (3) с семейством $\mathcal{L}$ из X'.

§ 3

Пусть W - рефлексивное банахово пространство, скобки $\ll \cdot, \cdot \gg$ обозначают двойственность между W и сопряженным к нему W'.

Рассмотрим частный случай (3): $\mathcal{K}$ задается в виде

$$\mathcal{K} = \{ v \in V;\ \ll g, Bv \gg \geq \beta_g \quad \forall g \in G \}, \tag{8}$$

где $B: V \to W$ - линейный непрерывный оператор, $G \subset W'$, $\beta_g \in R$. Обозначим через $B^*: W' \to V'$ оператор, сопряженный к B. Пусть Y' - рефлексивное банахово пространство, непрерывно вложенное в W', и $B^* Y' \subset X'$, u_0 - решение вариационного неравенства (1) с множеством $\mathcal{K}$ вида (8).

Предложение 1. *Пусть* $G \subset Y'$ *и оператор* B^* *непрерывен из* Y' *в* X'. *Если*

A. G *конечно*

или

B1. $\|g\|_{Y'} \leq const \quad \forall g \in G,$

B2. $\exists w_0 \in \mathcal{K},\ \delta > 0: \ll g, Bw_0 \gg \geq \delta + \beta_g \quad \forall g \in G,$

то $Au_0 \in X'$.

Доказательство предложения 1 вытекает непосредственно из теоремы § 2, так как множество (8) можно записать в виде (3) с

$$\ell = B^* g, \quad \alpha_\ell = \beta_g, \quad \mathcal{L} = B^* G.$$

Причем поскольку B^* непрерывен из Y' в X' и

$$\|g\|_{Y'} \leq const \quad \forall g \in G, \qquad \text{то } \|\ell\|_{X'} \leq const \quad \forall \ell \in \mathcal{L}.$$

Предложение 1 доказано.

В приложениях может возникнуть ситуация, когда $B^* Y'$ не является "гладким" подпространством (в смысле $B^* Y' \not\subset X'$). В связи с этим рассмотрим случай, когда для решения u_0 выполнено равенство ,

$$\langle Au_0, v \rangle = \ll CBu_0, Bv \gg \quad \forall v \in V, \tag{9}$$

где C - некоторый оператор из W в W'. Априори $G \subset W'$, $-CBu_0 \in W'$. При выполнении равенства (9) справедливо

Предложение 2. *Пусть* $G \subset Y'$. *Если*

A. G *конечно*

или

В1. $\|g\|_{Y'} \leqslant const \quad \forall g \in G$,

В2. $\exists w_0 \in \mathcal{K},\ \delta > 0:\ \ll g, Bw_0 \gg \geqslant \beta_g + \delta \quad \forall g \in G$,

то $-CBu_0 \in Y'$.

Доказательство предложения 2. Обозначим через $\mathcal{K}_W$ выпуклое замкнутое множество в W :

$$\mathcal{K}_W = \{ w \in BV : \ll g, w \gg \geqslant \beta_g \quad \forall g \in G \}.$$

Очевидно, что $v \in \mathcal{K}$, если и только если $Bv \in \mathcal{K}_W$. Так как u_0- решение (1), то в силу (9) имеем

$$\ll CBu_0,\ Bv - Bu_0 \gg \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathcal{K}$$

или

$$\ll CBu_0,\ w - Bu_0 \gg \geqslant 0 \qquad \forall w \in \mathcal{K}_W,$$

откуда

$$-CBu_0 \in N(\mathcal{K}_W;\ Bu_0).$$

Множество $\mathcal{K}_W$ порождается семейством G из Y', при этом условия предложения 2 таковы, что для любой точки $w \in \partial\mathcal{K}_W$ нормальный конус $N(\mathcal{K}_W;\ w)$ принадлежит Y' (см. замечание 1). Следовательно, $-CBu_0 \in Y'$.

§ 4

Пусть Ω - ограниченная область в R^N с границей $\partial\Omega \in C^\infty$; $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. В примерах 1-5 $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$,

$$<Au, v> = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - fv)\,dx, \quad u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{10}$$

Вариационное неравенство (1) с оператором вида (10) и любым замкнутым выпуклым множеством $\mathcal{K} \subseteq \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имеет единственное решение $u_0 \in \mathcal{K}$ (см. [3]).

Пример 1. Полиэдральное множество:

$$\mathcal{K} = \{ v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : \int_\Omega \varphi_j v\,dx \geqslant \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n \},$$

где $\varphi_j \in W_p^m(\Omega)$, $m \geq 0$, $p \geq 2$, $\alpha_j \in R$, $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Здесь $X' = W_p^m(\Omega)$, множество $\mathcal{K}$ имеет вид (3) с $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$, $\ell_j = \varphi_j \in W_p^m(\Omega)$, $j = 1, \ldots, n$. Как видно из формулы (10), элемент $Au_0 \in W_2^{-1}(\Omega)$ отождествляется с обобщенной функцией $-\Delta u_0 - f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Из теоремы § 2 (выполнено условие A) следует, что эта обобщенная функция регулярна: $-Au_0 \in W_p^m(\Omega)$, т.е. $-\Delta u_0 - f \in W_p^m(\Omega)$. Таким образом, решение u_0 неравенства (1) является решением задачи Дирихле с правой частью (неизвестной, но это не важно для наших целей) из $W_p^m(\Omega)$. Из теории регулярности решении классических задач [1] имеем $u_0 \in W_p^{m+2}(\Omega)$. Следовательно, гладкость решения обусловлена лишь гладкостью функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. В частности, $u_0 \in C^\infty$, если $\varphi_j \in C^\infty$, $j = 1, \ldots, n$.

В рассматриваемом случае

$$N(\mathcal{K}, v) = \Big\{\ell \in W_2^{-1}(\Omega) : \ \ell = -\sum_{j=1}^{M} \lambda_j \varphi_j, \ \lambda_j \geq 0,$$

$$\lambda_j = 0, \ \text{если} \int_\Omega \varphi_j v\, dx > 0\Big\}.$$

Из (2) следует, что u_0 удовлетворяет задаче Дирихле $-\Delta u_0 - f = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j$ в Ω, $u_0 = 0$ на $\partial\Omega$, где $\lambda_j \geq 0$ - некоторые (неизвестные) числа.

Пример 2. Гиперплоскость:

$$\mathcal{K} = \Big\{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : \int_\Omega \varphi v\, dx = 0\Big\}, \quad \varphi \in W_p^m(\Omega).$$

Здесь множество $\mathcal{K}$ имеет вид (3) с $\mathcal{L} = \{-\varphi, \varphi\}$, $\alpha_\varphi = \alpha_{-\varphi} = 0$ и, $X' = W_p^m(\Omega)$. Из теоремы (§2) получаем, что

$$Au_0 = -\Delta u_0 - f \in W_p^m(\Omega), \quad \text{откуда} \quad u_0 \in W_p^{m+2}(\Omega).$$

Здесь нормальный конус при $v \in \partial\mathcal{K}$ имеет вид:

$$N(\mathcal{K}; v) = \{g \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : g = \lambda\varphi, \ \lambda \in R\},$$

и поэтому решение неравенства (1) удовлетворяет задаче Дирихле

$$-\Delta u_0 - f = \lambda\varphi \quad \text{в } \Omega, \ u_0 = 0 \ \text{на } \partial\Omega, \ \text{где } \lambda \in R.$$

Пример 3. Конус:

$$\mathcal{K} \doteq \{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega): \int_\Omega (\varphi+\varphi_0) v\,dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in \Psi\},$$

где $\Psi = \{\varphi \in W_p^m(\Omega) : \varphi \geq 0$ п.в.в Ω, $\|\varphi\|_{W_p^m(\Omega)} \leq c_0\}$,

$c_0 - const > 0$, $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_0 \geq 0$, $\varphi_0 \not\equiv 0$.

Множество $\mathcal{K}$ имеет вид (3) с

$$\mathcal{L} = \{\ell \in W_2^{-1}(\Omega) : \ell = \varphi + \varphi_0, \ \varphi \in \Psi\} \subset W_p^m(\Omega).$$

Проверим условия B1, B2 теоремы из § 2:

$$\|\ell\|_{W_p^m(\Omega)} = \|\varphi + \varphi_0\|_{W_p^m(\Omega)} \leq c_0 + \|\varphi_0\|_{W_p^m(\Omega)} < const.$$

Пусть $w_0 \in \mathcal{K}$ такое, что $w_0 \geq 0$, $mes(supp\, w_0 \cap supp\, \varphi_0) > 0$.

Тогда

$$\int_\Omega (\varphi+\varphi_0) w_0\,dx \geq \int_\Omega \varphi_0 w_0\,dx = \varepsilon > 0 \quad \forall \varphi \in \Psi,$$

т.е. выполнено также условие B2. Следовательно,

$A u_0 = -\Delta u_0 - f \in W_p^m(\Omega)$ (здесь $X' = W_p^m(\Omega)$), откуда $u_0 \in W_p^{m+2}(\Omega)$.

Пример 4. Шар в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$:

$$\mathcal{K} = \{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : \|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

Множество $\mathcal{K}$ можно записать также в виде

$$\mathcal{K} = \{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : (g, v) \geq -1 \quad \forall g \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : \|g\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = 1\}.$$

Здесь скобки $(\cdot,\cdot)$ обозначают скалярное произведение в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Множество $\mathcal{L}$ состоит из функционалов ℓ вида $\ell = -\Delta g + g \in W_2^{-1}(\Omega)$.

Теорема из § 2 здесь неприменима, так как в самом определении $\mathcal{K}$ заложена его "негладкость": $\mathcal{L} \not\subset L_2(\Omega)$. Однако благодаря специфике шара вариационное неравенство не имеет порогов гладкости. Действительно, выпишем нор-

мальный конус для $\mathcal{K}$ в точке $v \in \partial\mathcal{K}$:

$$N(\mathcal{K}; v) = \{\ell \in W_2^{-1}(\Omega) : \ell = \lambda(\Delta v - v),\ \lambda \geq 0\}.$$

Из (2) получаем, что решение u_0 неравенства (1) одновременно решает следующую задачу:

$$-\Delta u_0 - f = \lambda(\Delta u_0 - u_0) \text{ в } \Omega\ ,\ u_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega\ .$$

Отсюда в нашем случае $u_0 \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ (здесь гладкость u_0 определяется гладкостью f).

Пример 5. Ограничения на градиент:

$$\mathcal{K} = \{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : \int_\Omega \varphi_j v_{x_j} dx \geq 0\},$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \in (W_p^m(\Omega))^N$, $m \geq 1$, $p \geq 2$.

Здесь имеем множество $\mathcal{K}$ вида (8) с $W = (L_2(\Omega))^N$,

$$Bv = \operatorname{grad} v : \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \to (L_2(\Omega))^N,\ \beta_g \equiv 0,$$

$$g = \varphi \subset (W_p^m(\Omega))^N \subset W',$$

$$B^* g = -\operatorname{div} g : (W_p^m(\Omega))^N \longrightarrow W_p^{m-1}(\Omega).$$

Из предложения 1 получаем $Au_0 \in W_p^{m-1}(\Omega)$, откуда $u_0 \in W_p^{m+1}(\Omega)$.

Решение u_0 удовлетворяет задаче

$$-\Delta u_0 - f = -\lambda \operatorname{div} \varphi \quad \text{в } \Omega\ ,\ u_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad \text{с некоторым } \lambda \geq 0\ .$$

В следующем примере $V = W_2^1(\Omega)$, $W = W_2^{1/2}(\partial\Omega)$, $Y' \subset C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$,

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - uv - fv)dx, \quad u, v \in W_2^1(\Omega). \tag{11}$$

Оператор A коэрцитивен в $W_2^1(\Omega)$, поэтому при любом замкнутом выпуклом множестве $\mathcal{K} \subseteq W_2^1(\Omega)$ существует единственное решение u_0 неравенства (1) с оператором (11) [3] .

Пример 6. Ограничения на границе области:

$$\mathcal{K} = \{ v \in W_2^1(\Omega) : \int_{\partial\Omega} \varphi v \, d\Gamma \geq 0 \} , \quad \varphi \in Y' .$$

Здесь множество $\mathcal{K}$ имеет вид (8) , где $B : W_2^1(\Omega) \to W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ - оператор следа, $C = \frac{\partial}{\partial n}$ - оператор дифференцирования по внутренней нормали к границе области $\partial\Omega : Cv = \frac{\partial v}{\partial n} : W_2^1(\Omega) \to W_2^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Для решения u_0 вариационного неравенства (1) имеет место соотношение (см. (9)):

$$\langle Au_0, v \rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial n} v \, d\Gamma = \langle\langle Cu_0, Bv \rangle\rangle \quad \forall v \in W_2^1(\Omega).$$

Действительно, $v = u_0 \pm \eta \in \mathcal{K} \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

Поэтому из (1) вытекает

$$\langle Au_0, \pm\eta \rangle = \pm \int_\Omega [-\Delta u_0 + u_0 - f] \eta \, dx \geq 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega),$$

следовательно, u_0 в Ω удовлетворяет уравнению $-\Delta u_0 + u_0 - f = 0$. Из предложения 2 получаем $Cu_0 \in Y' \subset C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$. Таким образом, решение u_0 неравенства (1) является также решением задачи Неймана

$$-\Delta u_0 + u_0 - f = 0 \quad \text{в } \Omega , \quad \frac{\partial u_0}{\partial n} = \lambda\varphi \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega) \quad \text{на } \partial\Omega ,$$

где $\lambda \geq 0$. Поэтому $u_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ (см. [1]). При более гладких φ гладкость решения u_0 повышается .

Пример 7. Конус функций неотрицательных почти всюду в Ω :

$$\mathcal{K} = \{ v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) ; \; v(x) \geq 0 \quad \text{п.в.в} \quad \Omega \} . \tag{12}$$

Множество $\mathcal{K}$ можно записать в виде (3) следующим образом:

$$\mathcal{K} = \{ v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : \int_\Omega g v \, dx \geq 0 \quad \forall g \in G \} , \tag{13}$$

где

$$G = \{ g \in C^\infty(R^N) : \; 0 \leq g(x) \leq 1 , \; \operatorname{supp} g \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset \} .$$

Эквивалентность записей (12) и (13) показывает

Лемма 2. *Если* $v \in L_2(\Omega)$, *то* $v \geq 0$ *почти всюду в* Ω , *если и только если* $\int_\Omega g v \, dx \geq 0 \quad \forall g \in G$.

Доказательство леммы 2 можно свести к доказательству аналогичного

утверждения для непрерывных функций, используя теорему Лузина.

В этом примере приведен наиболее простой случай: в каждой (или почти в каждой) точке значения функции должны удовлетворять одному неравенству. При более общих локальных ограничениях (например, вектор-функция $\sigma \in (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^m$ почти всюду в Ω принадлежит выпуклому множеству $K \subset R^m$) функция $\sigma(x)$ в каждой точке должна удовлетворять системе (возможно, бесконечной) неравенств. Однако и в простой ситуации примера 7 множество $\mathcal{K}$ таково, что семейство G не менее чем счетно и условия B1, B2 одновременно невыполнимы при $X' \subset L_2(\Omega)$. Действительно, допустим, что $\|g\|_{L_2(\Omega)} \leq const$ $\forall g \in G$ и

$$\exists w_0 \in \mathcal{K},\ \delta > 0 : \int_\Omega g\, w_0\, dx \geq \delta > 0 \qquad \forall g \in G .$$

Тогда

$$\delta \leq \int_\Omega g w_0 dx \leq \|g\|_{L_2(\Omega)} \Big(\int_{\mathrm{supp}\, g} (w_0)^2 dx \Big)^{1/2} \qquad \forall g \in G .$$

Однако правая часть последнего неравенства может быть сколь угодно малой, поэтому оно невозможно при $\delta > 0$. Таким образом, результаты из § 2,3 здесь неприменимы, но включение $Au_{\mathcal{K}} \in X'$ при таких $\mathcal{K}$ не имеет места для произвольных $X' \subset L_2(\Omega)$ (см. [3]).

При обсуждении данной работы М.Н.Хазан заметил, что если $K \cap M$ имеет непустую внутренность в топологии X (M - подпространство в V конечной коразмерности), то включение $Au_{\mathcal{K}} \in X'$ можно доказать, основываясь на том факте, что функционал из V', ограниченный сверху на множестве $\mathcal{K}$, принадлежит X'.

Автор благодарен М.Н. Хазану, а также Н.Н. Уральцевой и А.Г. Кусраеву за обсуждение результатов и полезные замечания.

Литература

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.- М.: Наука, 1973.
2. Brezis H., Stampacchia G. Sur la regularite de la solution d'inequation elliptiques. - Bull.Soc.Math.France, 1968, v.96, No 2, p.153-180.
3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.-М.: Мир, 1972.