УДК 517.948

О ВЫХОДЕ НА ПОЛИНОМ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ПРИ $|x| \to \infty$

Г.А. Шмырёв (Новосибирск)

В [1-4] при некоторых предположениях относительно индексов ℓ, p, n были доказаны теоремы о выходе на полином при $|x| \to \infty$ для пространств Соболева $L_p^{\ell}(E_n)$. Аналогичные результаты для пространств с лиувиллевскими производными были получены в [5]. В [6-8] было исследовано поведение на бесконечности функций, являющихся решениями псевдодифференциального уравнения $P(D)u = \int\limits_{E_n} e^{ix\xi} p(i\xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi = f(x)$ с символом $p(i\xi)$, таким что $p(i\xi) \neq 0$ при $|\xi| \neq 0$ и $p(i\xi\lambda^{\alpha}) = p(i\xi_1\lambda^{\alpha_1}, \ldots, i\xi_n\lambda^{\alpha_n}) = \lambda p(i\xi)$. Из этих результатов, как частный случай, получаются условия выхода на полином функций классов $L_{p,\alpha}^{\ell}$. При этом в [8] было показано, что в случае, когда оператор $P(D)$ имеет достаточно высокий порядок ($|\alpha| < 1$), необходимо на правую часть $f(x)$ налагать условия равенства нулю некоторых моментов. (Для полигармонического оператора Δ^m это соответствует случаю $2m - n > 0$ (см. [2, теорема XII.3])).

В настоящей работе для квазилинейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$L[D]u(x) = \sum_{\substack{\alpha:\,\alpha\varkappa \leq 1 \\ \alpha\theta \geq 1}} a_{\alpha} D^{\alpha} u(x) = f(x) \tag{1}$$

доказана теорема о выходе на полином при $|x| \to \infty$ в случае $|\varkappa| = \sum \varkappa_i < 1$ при условии, что правая часть ортогональна многочленам до определенного порядка.

Здесь $\mathscr{X} = (\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_n)$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ - мультивекторы, такие что $\mathscr{X}_i=m_i^{-1}$, $\theta_i=\ell_i^{-1}$, $i=1,\ldots,n$, где m_i, ℓ_i - целые числа. Ранее в [9] для уравнения вида (1) при условии, что $|\mathscr{X}|>1$ и средние $M_\sigma[u]\to 0$ при $\sigma\to\infty$, были получены точные по порядку убывания на бесконечности оценки решения.

Введем следующие обозначения:

$$t^\gamma = t_1^{\gamma_1}\ldots t_n^{\gamma_n}, \quad D^\gamma = D_{x_1}^{\gamma_1}\ldots D_{x_n}^{\gamma_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n,$$

$$(\alpha,\beta) = \sum \alpha_i\beta_i, \quad <x>_\omega = \left(\sum x_i^{2\omega_i}\right)^{1/2}, \quad \frac{x}{\sigma^\alpha} = \left(\frac{x_1}{\sigma^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{x_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right),$$

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{E_n} e^{-ix\xi} f(\xi)\,d\xi$$ - преобразование Фурье функции $f(\xi)$ ($\tilde{f}(\xi)$ - обратное преобразование Фурье).

На характеристические многочлены оператора $L[D]$ и его главной части $L_0[D] = \sum\limits_{(\alpha,\mathscr{X})=1} a_\alpha D^\alpha$ налагаем ограничения:

1. Для любого $\xi\in R^n$

$$C_0 <\xi>_m \leqslant |L_0(i\xi)| \leqslant C_1<\xi>_m . \tag{2}$$

2. Для любого $\xi\in R^n$

$$|L(i\xi)| \geqslant C_2<\xi>_\ell , \tag{3}$$

где $\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_n)$, $m=(m_1,\ldots,m_n)$ - целочисленные мультииндексы, такие что $m_i\geqslant \ell_i\geqslant 1$, $m_i^{-1}=\mathscr{X}_i$, $\ell_i^{-1}=\theta_i$ ($\mathscr{X}=(\mathscr{X}_1,\ldots,\mathscr{X}_n)$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ - мультивекторы, определяющие оператор $L[D]$); C_0, C_1, C_2 - некоторые положительные константы.

Рассмотрим среднюю функцию

$$u_\sigma(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{E_n} u(t)\,\hat{G}(t-x,\sigma)\,dt \tag{4}$$

с ядром усреднения

$$\hat{G}(t,\sigma) = (2\pi)^{-n/2}\int_{E_n} e^{-it\xi} e^{-|\sigma L(i\xi)|^{2k}}\,d\xi , \tag{5}$$

где K - достаточно большое число.

При выполнении условий (4), (5) для любых мультивектора $\rho, |\rho|>0$, и числа $K>0$ в силу леммы 1 из [9] имеет место оценка

$$|D^{\rho}\hat{G}(t,v)| \leqslant c_{\rho,K}\, v^{-|\omega|-(\omega,\rho)}\left(1+\left\langle \frac{x}{v^{\omega}}\right\rangle_{\omega}\right)^{-K}, \tag{6}$$

где $\omega=\mathscr{X}$ при $v\leqslant 1$, $\omega=\theta$ при $v\geqslant 1$, $\omega_j^{-1}=\omega_j$, $j=1,\ldots,n$.

Пусть

$$S_N=\{\varphi\in C^{\infty}:\ \sup_{x\in R^n}|D^{\rho}\varphi(x)|(1+|x|)^N<\infty,\ 0\leqslant(\rho,\mathscr{X})\leqslant 1\}, \tag{7}$$

$$S_N'=\{u:\int|u(x)|(1+|x|)^{-N}dx<\infty\}. \tag{8}$$

Будем говорить, что функция $f(x)\in L_{1,\nu,\rho}(E_n)$, $\nu>0$ - целое, если

$$1.\quad \|f,L_{1,\rho}\|=\int_{E_n}|f(x)|(1+|x|)^{\rho}dx<\infty, \tag{9}$$

$$2.\quad \int_{E_n}x^{\sigma}f(x)dx=0,\quad 0\leqslant|\sigma|\leqslant\nu. \tag{10}$$

Определение. Функция $u\in S_N'$ называется обобщенным решением уравнения (1) с правой частью $f\in S_N'$, если $\forall\varphi\in S_N$ выполняется равенство

$$(u,L^{*}[D]\varphi)=(f,\varphi), \tag{11}$$

где $L^{*}[D]$ - формально сопряженный к $L[D]$ оператор.

Лемма 1. *Пусть $u(x)\in S_N'$. Тогда для почти всех $x\in E_n$ имеет место*

$$\lim_{v\to 0}u_{v_K}(x)=u(x),$$

где v_K - некоторая последовательность параметров.

Доказательство. Сначала покажем, что средние $u_v(x)$ сходятся к $u(x)$ в $L_{1,-N}$ (с весом $(1+|x|)^{-N}$, см. [2, с.79]). По интегральной теореме Фурье

$$(2\pi)^{-n/2}\int_{E_n}\hat{G}(t,\sigma)dt = G(0,\sigma) = 1.$$

С учетом этого имеем

$$\|u_\sigma(x) - u(x), L_{1,-N}\| =$$

$$= \|(2\pi)^{-n/2}\int (u(x+\tau) - u(x))\hat{G}(\tau,\sigma)d\tau, L_{1,-N}\| \leqslant$$

(используя обобщенное неравенство Минковского, получаем)

$$\leqslant c\int_{E_n}\|u(x+\tau) - u(x), L_{1,-N}\|\,|\hat{G}(\tau,\sigma)|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c\int_{\langle\frac{\tau}{\sigma^{\varkappa}}\rangle_m\leqslant M}\|u(x+\tau) - u(x), L_{1,-N}\|\,|\hat{G}(\tau,\sigma)|d\tau +$$

$$+ c\int_{\langle\frac{\tau}{\sigma^{\varkappa}}\rangle_m\geqslant M\sigma}\|u(x+\tau) - u(x), L_{1,-N}\|\,|\hat{G}(\tau,\sigma)|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c\sup_{\langle\tau\rangle_m\leqslant M\sigma}\|u(x+\tau) - u(x), L_{1,-N}\|\int_{\langle\frac{\tau}{\sigma^{\varkappa}}\rangle_m\leqslant M}|\hat{G}(\tau,\sigma)|d\tau +$$

$$+ c\cdot 2\|u, L_{1,-N}\|\int_{\langle\frac{\tau}{\sigma^{\varkappa}}\rangle_m\geqslant M}|\hat{G}(\tau,\sigma)|d\tau.$$

Делая замену $\frac{\tau}{\sigma^{\varkappa}} = t$ и применяя оценку (6) с $\rho=0$, $K>n$, получаем

$$\|u_\sigma(x) - u(x), L_{1,-N}\| \leqslant c\sup_{\langle\tau\rangle_m\leqslant M_\sigma}\|u(x+\tau) - u(x), L_{1,-N}\| +$$

$$+ c_2\|u, L_{1,-N}\|\int_{\langle t\rangle_m\geqslant M}\frac{dt}{(1+\langle t\rangle_m)^K}.$$

Откуда, выбирая M сколь угодно большим и переходя затем к пределу $\sigma\longrightarrow 0$, в силу непрерывности в целом функций из $L_{1,-N}$ (см. [2, теорема

111.1]), получаем $u_\sigma(x) \to u(x)$ в $L_{1,-N}$. В силу соотношения между различными видами сходимости функциональных последовательностей (см. [10, гл. УII, § 2]), заключаем, что существует последовательность $\{\sigma_k\}$, такая что $u_{\sigma_k}(x) \to u(x)$ почти всюду.

Лемма доказана.

Замечание. Везде в дальнейшем интеграл по параметру усреднения будем понимать в смысле сходимости по данной последовательности σ_k.

Обозначим

$$\hat{G}_1(t,\sigma) = (2\pi)^{-n/2}\int_{E_n} e^{-it\xi} e^{-|\sigma L(i\xi)|^{2\kappa}} 2\kappa|\sigma L(i\xi)|^{2\kappa-2}\sigma\overline{L(i\xi)}d\xi,$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Лемма 2. *Пусть $u \in S'_N$ - обобщенное решение уравнения (1). Тогда для почти всех $x \in E_n$ имеет место представление*

$$u(x) = u_h(x) + \lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^{-n/2}\int_\varepsilon^h d\sigma \int_{E_n} f(t)\hat{G}_1(t-x,\sigma)dt. \tag{12}$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\hat{G}(t,\sigma) = (2\pi)^{-n/2}\int_{E_n} e^{-it\xi}\frac{d}{d\sigma}e^{-|\sigma L(i\xi)|^{2\kappa}}d\xi =$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\int_{E_n} e^{-it\xi}e^{-|\sigma L(i\xi)|^{2\kappa}}(-2\kappa|\sigma L(i\xi)|^{2\kappa-2})\sigma L(i\xi)\overline{L(i\xi)}d\xi =$$

$$=-L^*[D_t](2\pi)^{-n/2}\int_{E_n} e^{-it\xi}e^{-|\sigma L(i\xi)|^{2\kappa}}2\kappa|\sigma L(i\xi)|^{2\kappa-2}\overline{L(i\xi)}d\xi =$$

$$=-L^*[D_t]\hat{G}_1(t,\sigma). \tag{13}$$

Заметим, что для любого фиксированного $\sigma > 0$ функции $\hat{G}_1, \hat{G} \in S \subset S_N'$. По формуле Лейбница получаем

$$u_\varepsilon(x) - u_h(x) = -(2\pi)^{-n/2} \int_\varepsilon^h \frac{d}{d\sigma} \int_{E_n} u(x+t)\hat{G}(t,\sigma)dt d\sigma =$$

(учитывая (12) и (13), имеем)

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_\varepsilon^h \int_{E_n} u(x+t) L^*[D_t]\hat{G}_1(t,\sigma)dt d\sigma - (2\pi)^{-n/2} \int_\varepsilon^h \int_{E_n} f(x+t)\hat{G}_1(t,\sigma)dt d\sigma.$$

Применяя лемму 1, получаем требуемое. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $u \in S_N'$ *– обобщенное решение уравнения* (1)*, где* $f(x) \in L_{1,\nu,\beta}$, $\beta \geq \nu + 1$, $\nu + 1 > \frac{1 - |\theta|}{\theta_{min}}$. *Тогда для любого мультииндекса* $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $|\rho| \geq 0$*, имеет место неравенство*

$$|D^\rho u_{h_1} - D^\rho u_{h_2};\ C(E_n)| \leq c\,(h_1^{-\tau} + h_2^{-\tau}) \| f, L_{1,\beta} \|, \tag{14}$$

где $\tau = |\theta| + (\rho, \theta) + (\nu + 1)\theta_{min} - 1$, $\theta_{min} = \min_k \theta_k$, $h_1, h_2 \gg 1$ *и* c *не зависит от* x.

Доказательство. Применяя формулу Тейлора для функций многих переменных [2, (XI1.4.4)]

$$f(x) = \sum_{|\gamma| \leq \nu} D^\gamma f(0) \frac{x^\gamma}{\gamma!} + \int_0^1 \sum_{|\gamma| = \nu+1} D^\gamma f(\tau x)(1-\tau)^\nu d\tau$$

к функции $e^{-it\xi}$ как функции от $(-it_1\xi_1, \dots, -it_n\xi_n)$, получаем

$$e^{-it\xi} = \sum_{|\gamma| \leq \nu} \frac{(-it\xi)^\gamma}{\gamma!} + \int_0^1 e^{-it\xi\tau} \sum_{|\gamma| = \nu+1} \frac{(-it\xi\tau)^\gamma}{\gamma!}(1-\tau)^\nu d\tau. \tag{15}$$

Здесь $(-it\xi)^\gamma = \prod_{k=1}^n (-it_k\xi_k)^{\gamma_k}$, $(-it\xi\tau)^\gamma = \prod_{k=1}^n (-it_k\xi_k\tau)^{\gamma_k}$, $\gamma! = \gamma_1! \dots \gamma_n!$.

Используя эту формулу, имеем

$$D^\rho \hat{G}_1(\xi,\sigma) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{E_n} e^{-it\xi} e^{ix\xi} (-i\xi)^\rho G_1(\xi,\sigma)\, d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{E_n} \left(\sum_{|\gamma|\le\nu} \frac{(-it\xi)^\gamma}{\gamma!} + \int\limits_0^1 e^{-it\xi\tau} \sum_{|\gamma|=\nu+1} \frac{(-it\xi\tau)^\gamma}{\gamma!} (1-\tau)^\nu d\tau \right) \times$$

$$\times e^{ix\xi} (-i\xi)^\rho G_1(\xi,\sigma)\, d\xi = \sum_{|\gamma|\le\nu} \frac{t^\gamma}{\gamma!} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{E_n} e^{ix\xi} (-i\xi)^{\gamma+\rho} G_1(\xi,\sigma)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{|\gamma|=\nu+1} \frac{t^\gamma}{\gamma!} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{E_n} e^{ix\xi} (-i\xi)^{\gamma+\rho} \int\limits_0^1 e^{-it\xi\tau} (1-\tau)^\nu d\tau\, G_1(\xi,\sigma)\, d\xi. \qquad (16)$$

Применяя лемму 2 и равенство (16) , получаем

$$|D^\rho u_{h_1} - D^\rho u_{h_2}| = \left| (2\pi)^{-n} \int\limits_{h_1}^{h_2} d\sigma \int\limits_{E_n} f(t) \int\limits_{E_n} e^{-it\xi} e^{ix\xi} (-i\xi)^\rho G_1(\xi,\sigma)\, d\xi\, dt \right| =$$

$$= \left| (2\pi)^{-n} \int\limits_{h_1}^{h_2} d\sigma \left\{ \int\limits_{E_n} f(t) \sum_{|\gamma|\le\nu} \frac{t^\gamma}{\gamma!} dt \int\limits_{E_n} e^{ix\xi} (-i\xi)^{\gamma+\rho} G_1(\xi,\sigma)\, d\xi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{E_n} f(t) \sum_{|\gamma|=\nu+1} \frac{t^\gamma}{\gamma!} \int\limits_{E_n} e^{ix\xi} (-i\xi)^{\gamma+\rho} G_1(\xi,\sigma) \int\limits_0^1 e^{-it\xi\tau} (1-\tau)^\nu d\tau\, d\xi\, dt \right\} \right|.$$

Первый интеграл в фигурных скобках равен нулю в силу условия ортогональности (10) ; второе слагаемое оценим по модулю с учетом ограниченности интеграла по τ : $\left| \int\limits_0^1 e^{-it\xi\tau} (1-\tau)^\nu d\tau \right| \le \nu!$. Стало быть,

$$|D^\rho u_{h_1} - D^\rho u_{h_2}| \le c \sum_{|\gamma|=\nu+1} \int\limits_{h_1}^{h_2} d\sigma \int\limits_{E_n} |f(t) t^\gamma| \int\limits_{E_n} \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{\gamma_j+\rho_j} |G_1(\xi,\sigma)|\, d\xi\, dt. \qquad (17)$$

Оценим интеграл по ξ . Используя неравенства (2) , (3) , имеем

$$\int\limits_{E_n} \prod_{j=1}^{n} |\xi_j|^{\gamma_j+\rho_j} |G_1(\xi,\sigma)| d\xi < c \int\limits_{E_n} \prod_{j=1}^{n} |\xi_j|^{\gamma_j+\rho_j} e^{-|c_2\sigma<\xi>_\ell|^{2k}} (\sigma<\xi>_m)^{2k-1} d\xi <$$

(делая замену $\sigma^{\theta}\xi=\bar{\xi}$ и учитывая, что $\sigma<\xi>_m = <\sigma^{\theta-\varkappa}\bar{\xi}>_m \leq c<\bar{\xi}>_m$, поскольку $\varkappa<\theta$ и $\sigma>1$, получаем)

$$\leq c\sigma^{-|\theta|-(\theta,\gamma+\rho)} \int \prod_{j=1}^{n} |\bar{\xi}_j|^{\gamma_j+\rho_j} e^{-|c_2<\bar{\xi}>_\ell|^{2k}} <\xi>_m^{2k-1} d\xi \leq c\sigma^{-|\theta|-\theta(\gamma+\rho)}. \qquad (18)$$

Подставляя это неравенство в (17) и учитывая, что $\rho > \nu+1$, получаем

$$|D^{\rho}u_{h_1} - D^{\rho}u_{h_2}| \leq c \sum_{|\gamma|\leq\nu+1} \int\limits_{h_1}^{h_2} \sigma^{-|\theta|-(\theta,\rho)-(\theta,\gamma)} d\sigma \|f,L_{1,\beta}\| \leq c(h_1^{-\tau}+h_2^{-\tau})\|f,L_{1,\beta}\|.$$

Здесь $\tau=|\theta|+(\theta,\rho)+(\nu+1)\theta_{min}-1$. Так как $\nu+1>\dfrac{1+|\theta|}{\theta_{min}}$, то $\tau>0$.

Лемма доказана.

Следствие. *Для почти всех* $x\in E_n$ *имеет место представление*

$$u(x) = \sum_{|\rho|\leq m} c_\rho \frac{x^\rho}{\rho!} + \lim_{h\to 0} J_h(x),$$

где

$$J_h(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{h}^{h^{-1}} d\sigma \int\limits_{E_n} f(t) \int\limits_{E_n} e^{-i(t-x)\xi} G_1(\xi,\sigma) d\xi dt,$$

$$c_\rho = \lim_{\sigma\to\infty} (2\pi)^{-n} \int\limits_{E_n} u(t) \int\limits_{E_n} e^{-it\xi} (i\xi)^\rho G(\xi,\sigma) d\xi dt = \lim_{\sigma\to\infty} D^\rho u_\sigma(0), \qquad (19)$$

m *- такое, что* $m+1>\dfrac{N\theta_{max}-|\theta|}{\theta_{min}}\geq m$ *(*θ *определено в (1))* .

Доказательство данного утверждения для псевдодифференциального оператора с однородным символом приведено в [8] . В случае однородного квазиэллиптического уравнения с переменными коэффициентами в виде (19) коэффициенты полинома выписаны в [11].

Применяя разложение в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа функции $e^{ix\xi}$, имеем $(0<\tau<1)$

$$u_\sigma(x)=(2\pi)^{-n}\int_{E_n}u(t)\int_{E_n}e^{-it\xi}\left(\sum_{|p|\le m}\frac{(ix\xi)^p}{p!}+\sum_{|p|=m+1}(ix\xi)^p\frac{e^{ix\xi\tau}}{p!}\right)G(\xi,\sigma)d\xi dt=$$

$$=\sum_{|p|\le m}\frac{x^p}{p!}(2\pi)^{-n}\int_{E_n}u(t)\int_{E_n}e^{-it\xi}(i\xi)^pG(\xi,\sigma)d\xi dt+$$

$$+\sum_{|p|=m+1}\frac{x^p}{p!}(2\pi)^{-n}\int_{E_n}u(t)\int_{E_n}e^{-it\xi}(i\xi)^pe^{ix\xi\tau}G(\xi,\sigma)d\xi dt=$$

$$=\sum_{|p|\le m}\frac{x^p}{p!}D_x^pu_\sigma(x)\Big|_{x=0}+\sum_{|p|=m+1}\frac{x^p}{p!}(2\pi)^{-n}\int_{E_n}u(t)\int_{E_n}e^{-it\xi}(i\xi)^pe^{ix\xi\tau}G(\xi,\sigma)d\xi dt. \qquad (20)$$

Для ядра $\hat{G}(t,\sigma)$ имеет место следующая, аналогичная (6), оценка:

$$\left|(1+|t|)^\kappa D^p\hat{G}(t,\sigma)\right|\le c_{p,\kappa}\sigma^{-|\omega|-(p,\omega)}\left(1+\left|\frac{t}{\sigma^\omega}\right|\right)^{-\kappa} \qquad (21)$$

($\omega=\varkappa$ при $\sigma<1$, $\omega=\theta$ при $\sigma>1$), которая вытекает из неравенства (9) работы [9]. Здесь $(p=p_1,\dots,p_n)$ и K - любые мультииндекс и число, $|t|=(\sum t_i^2)^{1/2}$, $c_{p,\kappa}$ - константа, не зависящая от p и K.

Применяя эту оценку при $\sigma\gg 1$, из (20) получаем

$$\left|u_\sigma(x)-\sum_{|p|\le m}D^pu_\sigma(0)\frac{x^p}{p!}\right|\le$$

$$\leqslant \left| \sum_{|p|=m+1} \frac{x^p}{p!} (2\pi)^{-n} \int_{E_n} u(t) \int_{E_n} e^{-it\xi} (i\xi)^p e^{ix\xi\tau} G(\xi,\sigma) d\xi dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{|p|=m+1} \frac{x^p}{p!} \int_{E_n} \frac{|u(t)|}{\left(1+\left|\frac{t-\tau x}{\sigma^\theta}\right|\right)^N} dt\, \sigma^{-|\theta|-(p,\theta)} \leqslant$$

(так как при $\sigma>1$ имеет место неравенство $(0<\tau<1)$

$$\frac{1}{\left(1+\left|\frac{t-\tau x}{\sigma^\theta}\right|\right)} \leqslant \frac{\sigma^{\theta_{max}}}{(1+|t-\tau x|)} \leqslant \sigma^{\theta_{max}} \frac{(1+|x|)}{(1+|t|)}$$

, то имеем)

$$\leqslant C \sum_{|p|=m+1} (1+|x|)^N \frac{x^p}{p!} \int \frac{|u(t)|}{(1+|t|)^N} dt \cdot \sigma^{-|\theta|-(p,\theta)+N\theta_{max}} \leqslant$$

$$\leqslant C(1+|x|)^{N+m+1} \sigma^{-|\theta|-(m+1)\theta_{min}+N\theta_{max}}.$$

Откуда,учитывая выбор m и применяя лемму 3, получаем, что равномерно на любом компакте имеет место

$$\lim_{\sigma\to\infty} u_\sigma(x) = \sum_{|p|\leqslant m} c_p \frac{x^p}{p!}.$$

Полагая $\varepsilon=h$, $\sigma=h^{-1}$ и переходя к пределу при $h\to 0$, в силу лемм 1,2 получаем требуемое. Следствие доказано.

Отметим, что в случае полигармонического оператора Δ^K условие на m означает, что в пространство S'_N попадают гармонические полиномы до $N-n$ порядка и не попадают гармонические полиномы более высокой степени.

Теорема. *Пусть* $u\in S'_N$ *- обобщенное решение уравнения* (1), $f(x)\in L_{1,\nu,\beta}(E_n)$, $\beta\geqslant\nu+1$, $|\theta|+\theta_{min}(\nu+1)>1$. *Тогда существует полином* $\mathcal{P}_m(x)$, *такой что*

$$|u(x)-\mathcal{P}_m(x)|\leq c\,(1+|x|)^{-\chi}\,\|f, L_{1,\beta}(E_n)\|, \tag{22}$$

где $\chi=\dfrac{|\theta|+\theta_{min}(\nu+1)-1}{\beta\theta_{max}+\theta_{min}(\nu+1)}>0$. Полином $\mathcal{P}_m(x)$ имеет вид

$$\mathcal{P}_m(x)=\sum_{|\rho|<m} c_\rho \frac{x^\rho}{\rho!}, \quad c_\rho=\lim_{\sigma\to\infty} D^\rho u_\sigma(0).$$

Доказательство. Поскольку нас интересует поведение на бесконечности, будем считать, что $|x|\geqslant 1$. Обозначая $\mathcal{P}_m(x)=\sum_{|\rho|<m} c_\rho \dfrac{x^\rho}{\rho!}$, в силу следствия имеем

$$u(x)-\mathcal{P}_m(x)=$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\int_0^1 d\sigma\int_{E_n} f(t)\hat{G}_1(t-x,\sigma)dt+(2\pi)^{-n/2}\int_1^{|x|^\delta} d\sigma\int_{E_n} f(t)\hat{G}_1(t-x,\sigma)dt+$$

$$+(2\pi)^{-n/2}\int_{|x|^\delta}^{\infty} d\sigma\int_{E_n} f(t)\hat{G}_1(t-x,\sigma)dt=\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2+\mathcal{J}_3. \tag{23}$$

Здесь δ - некоторое положительное число, которое будет выбрано ниже. При $\sigma\leqslant 1$ имеет место следующая оценка ядра $\hat{G}_1(t,\sigma)$ $(|x|>1)$:

$$|\hat{G}_1(t-x,\sigma)|\leqslant c_\beta |x|^\beta (1+|t|)^\beta \sigma^{-|x|}, \tag{24}$$

где β - любое число, c_β - константа, зависящая от β.

Действительно,

$$|x|^\beta|\hat{G}_1(t-x,\sigma)|=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\Big|\sum_{|\gamma|=\beta} a_\gamma x^\gamma\int e^{-it\xi}e^{ix\xi}G_1(\xi,\sigma)d\xi\Big|=$$

(здесь a_γ - коэффициенты разложения $(|x_1|+\ldots+|x_n|)^\beta$)

$$=(2\pi)^{-n/2}\Big|\sum_{|\gamma|=\beta} a_\gamma\int e^{-it\xi}\frac{1}{i^{|\gamma|}}(D_\xi^\gamma e^{ix\xi})e^{-it\xi}G_1(\xi,\sigma)d\xi\Big|=$$

(интегрируя по частям по ξ и применяя формулу Лейбница, где b_ρ - коэффициенты в ней, имеем)

$$=2\pi^{-\frac{n}{2}}\left|\sum_{|\gamma|=\beta} a_\gamma \frac{(-1)^{|\gamma|}}{i^{|\gamma|}}\int e^{-it\xi} e^{ix\xi}\sum_{\rho\le\gamma} b_\rho (-it)^\rho D^{\gamma-\rho} G_1(\xi,v)\,d\xi\right| \le$$

$$\le c\sum_{|\gamma|=\beta}\sum_{\rho\le\gamma}|t|^\rho\int|D_\xi^{\gamma-\rho}G_1(\xi,v)|\,d\xi$$

(поступая далее как при доказательстве неравенства (9) из [9] и учитывая, что $v<1$, получаем)

$$\le c\sum_{|\gamma|=\beta}\sum_{\rho\le\gamma}|t|^\rho v^{-|\varkappa|+(\varkappa,\gamma-\rho)} \le c\left(1+|t|\right)^\beta v^{-|\varkappa|}.$$

Тем самым оценка (24) доказана. Подставляя ее в $\mathcal{J}_1$ и учитывая, что $|x|<1$, получаем

$$|\mathcal{J}_1| = \left|2\pi^{-n/2}\int_0^1 dv\int_{E_n} f(t)\hat{G}_1(t-x,v)\,dt\right| \le$$

$$\le c\int_0^1\frac{v^{-|\varkappa|}}{|x|^\beta}\int|f(t)|(1+|t|)^\beta dt \le c\,|x|^{-\beta}\,\|f, L_{1,\beta}\|. \tag{25}$$

Оценим $\mathcal{J}_2$. Применяя неравенство (21) с $\rho=\theta$, $\omega=\theta$, получаем

$$|\mathcal{J}_2| \le c\int_1^{|x|^\delta} dv\int|f(t)|\frac{v^{-|\theta|}}{\left(1+\left|\frac{t-x}{v^\theta}\right|\right)^\beta}\,dt \le c\int_1^{|x|^\delta} v^{-|\theta|}dv\int\frac{|f(t)|v^{\beta\theta_{max}}}{(1+|t-x|)^\beta}\,dt \le$$

$$\le \frac{c}{(1+|x|)^\beta}\int_1^{|x|^\delta} v^{-|\theta|+\beta\theta_{max}}\int|f(t)|(1+|t|)^\beta dt \le$$

$$\le c\,(1+|x|)^{\delta(-|\theta|+\beta\theta_{max}+1)-\beta}\,\|f, L_{1,\beta}\|. \tag{26}$$

Оценим J_3 . Применяя равенство (16) при $\rho=0$ и учитывая условия ортогональности (10) , имеем

$$|J_3|=(2\pi)^{-n}\left|\int\limits_{|x|^\delta}^{\infty}d\sigma\int\limits_{E_n}\sum_{|\gamma|=\nu+1}f(t)\frac{t^\gamma}{\gamma!}\int\limits_{E_n}(-i\xi)^\gamma\int\limits_0^1 e^{it\xi\tau}(1-\tau)^\nu d\tau\, G_1(\xi,\sigma)\,d\xi\, dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\,\|f, L_{1,\beta}\|\sum_{|\gamma|=\nu+1}\int\limits_{|x|^\delta}^{\infty}d\sigma\int\prod_{j=1}^{n}|\xi_j|^{\gamma_j}\,|G_1(\xi,\sigma)|\,d\xi\leqslant$$

(используя неравенство (18) с $\rho=0$ и условие $\beta\geqslant\nu+1$, получаем)

$$\leqslant c\sum_{|\gamma|=\nu+1}\|f, L_{1,\beta}\|\,|x|^{\delta(-|\theta|-(\theta,\gamma)+1)}\leqslant c\,\|f, L_{1,\beta}\|\,|x|^{\delta(-|\theta|-\theta_{min}(\nu+1)+1)}. \tag{27}$$

Полагая $\delta=\dfrac{\beta}{\beta\theta_{max}+\theta_{min}(\nu+1)}$, $\theta_{max}=\max\limits_{k}\theta_k$, $\theta_{min}=\min\limits_{k}\theta_k$,

из (23) , (25) - (27) имеем

$$|u(x)-\mathcal{P}_m(x)|<c\,\|f, L_{1,\beta}\|\,(1+|x|)^{-\chi}.$$

Теорема доказана.

Автор признателен Б.Н. Чистякову за ценные замечания в ходе обсуждения работы.

Литература

1. Успенский С.В. О теоремах вложения для весовых классов.- Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1961, т. 60, с.282-303.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974.- 808 с.
3. Бесов О.В. Поведение дифференцируемых функций в бесконечности и плотность финитных функций.- Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1969, т. 105, с.3-14.
4. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.- М.: Наука, 1975.- 480 с.

5. Лизоркин П.И. Поведение функций из лиувиллевских классов на бесконечности.- Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1979, т. 150, с.174-197.

6. Успенский С.В. О дифференциальных свойствах решений одного класса псевдодифференциальных уравнений на бесконечности.- Сиб.мат.журн., 1972, т.13, № 3, с.665-678.

7. Успенский С.В., Чистяков Б.Н. О выходе на полином при стремлении $|x| \to \infty$ решений одного класса псевдодифференциальных уравнений.- Сиб. мат. журн., 1975, т. 16, № 5, с.1053-1070.

8. Успенский С.В. , Чистяков Б.Н. О выходе на полином решений одного класса псевдодифференциальных уравнений при стремлении $|x| \to \infty$.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л. Соболева). Новосибирск, 1979, № 1, с.136-153.

9. Филатов П.С. Равномерные оценки решений одного класса квазиэллиптических уравнений на бесконечности.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л. Соболева). Новосибирск, 1979, № 2, с, 124-136.

10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.- М.: Наука, 1972.- 496 с.

11. Чистяков Б.Н. О выходе на полином при стремлении $|x| \to \infty$ решений уравнений квазиэллиптического типа.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л. Соболева). Новосибирск, 1977, № 1, с.159-179.