УДК 517.946

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Б.А. Бубнов (Новосибирск)

В области $Q=(0,T)\times D\times R^p$, где D - область в R^n с границей $S\in C^{2m}$, причем D может совпадать и со всем пространством R^n, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu\equiv \exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)K(x,t)u_{tt}+\alpha_0(x,t)u_t+a(x,t)u+Au+M(x,y,t)u=f(x,y,t). \quad (1)$$

Для уравнения (1) будем рассматривать смешанную задачу в следующих случаях:

1. Пусть

$$p=2,\ \alpha_0\leq 0,\ Au\equiv\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|\leq m}}(-1)^{|\alpha|}D_x^\alpha(a_{\alpha\beta}(x,t)D_x^\beta u),$$

$$K(x,t)\geq\delta>0,\ \ell>0,\ a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha},$$

$$Mu\equiv\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}(x,t)u_{y_iy_j}+\sum_{i=1}^{2}b_i(x,t)u_{y_i}+b(x,y,t)u,\ y\in R^2,$$

форма $\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j$, $\lambda\in R^2$, знаконеопределенная.

2. Имеем

$$p=1,\ \alpha_0\leq 0, K(x,t)\geq\delta>0, \ell>0, Au\equiv\sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|\leq m}}(-1)^{|\alpha|}D_x^\alpha(a_{\alpha\beta}(x,t)D_x^\beta u),$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}\,;\quad Mu\equiv b_1(x,t)u_{yy}+b_2(x,y,t)u_y+b(x,y,t)u,\ y\in R,$$

на знак функции $b_1(x,t)$ не делается никаких ограничений.

3. Наконец,

$$p=2,\ \alpha_0\leqslant 0,\ K\geqslant\delta>0,\ \ell>0,\ Au\equiv\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\|\beta|\leqslant m}}(-1)^{|\alpha|}D_x^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x,t)D_x^{\beta}u),$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}\,;\quad Mu\equiv\sum_{i=1}^{2}b_i(x,t)u_{y_iy_i}+b(x,y,t)u,$$

$$y=(y_1,y_2),\ y_1,y_2>0,$$

форма $\sum_{i=1}^{2}b_i(x,t)\lambda_i^2$ знаконеопределенная.

На оператор A будем накладывать следующие ограничения:

$$\int_0^t(Au,\bar u)dt=\int_0^t\int_D\sum a_{\alpha\beta}D_x^{2}uD_x^{\beta}\bar u\,dx\,dt\geqslant c\int_0^t\|u\|_m^2dt,\quad \int_0^t\|Au\|_0^2dt\geqslant c\int_0^t\|u\|_{2m}^2dt.$$

Для любых комплекснозначных функций $u\in L^2((0,T):W_2^{2m}(D)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^{m}(D))$.

Коэффициенты уравнения (1) - вещественные функции, и

$$K\in C^3(\bar Q_0),\ \alpha_0\in C^2(\bar Q_0),\ a\in C^1(\bar Q_0),\ a_{\alpha\beta}\in C^{m+1}(\bar Q_0),$$

$$b_{ij},b_i\in C^1(\bar Q_0),\ b_2\in C^2(Q),\ b_1\in C^1(Q),\ Q_0=(0,T)\times D.$$

В работах [1-6] расcматривались краевые задачи для уравнения вида (1) с начальными данными при $t=0$ и оператора M, не зависящего от y, при условии, что вырождение при $t=0$ происходит степенным образом, а также когда $K(x,t)\geqslant 0$, но при этом выполнено условие корректности $2\alpha_0-|K_t|\geqslant\geqslant\delta>0$, введенное В.Н. Враговым [7] для параболо-гиперболических уравнений.

В работах [8,9] рассматривались задачи для уравнения вида (1) с начальными данными по t вида $u(0)+\lambda u_t(T)=0$, $u_t(0)=0$, $\lambda>0$.
В случае постоянных коэффициентов задача Коши для уравнения вида (1) изучалась в [10]. В [11] рассматривались вопросы единственности задачи Коши для ультрагиперболических уравнений.

Рассмотрим 1-й случай.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u\Big|_{t=0}=0,\quad u\Big|_{\Gamma}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=\ldots=\frac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}\Big|_{\Gamma}=0, \tag{2}$$

$$\Gamma=(0,T)\times S\times R^2,\quad \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x_1}n_1+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}n_n,$$

$(n_1,\ldots,n_n)$- вектор внутренней нормали к S .

Лемма 1. *Пусть* $\sigma_2>\sigma_1$ *, тогда*

$$g(\lambda)=e^{\sigma_1|\lambda|}\int_{R^2}e^{-\sigma_2|s|-\sigma_1|\lambda-s|}ds\le c_1,\quad \lambda\in R^2.$$

Доказательство следует непосредственно из вида функции g .

Рассмотрим в области Q_0 задачу:

$$P v(\lambda)\equiv \exp\left(-\frac{1}{t^{\ell}}\right)Kv_{tt}+\alpha_0 v_t+av+Av+M[i\lambda]v=f(\lambda), \tag{3}$$

$$v\Big|_{t=0}=0,\quad v\Big|_{\Gamma_0}=\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0}=\ldots=\frac{\partial^{m-1}v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0}=0,\quad \Gamma_0=(0,T)\times S, \tag{4}$$

где оператор $M[i\lambda]$ определяется следующим образом:

$$M[i\lambda]u\equiv-\left(\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}\lambda_i\lambda_j+i\sum_{i=1}^{2}b_i\lambda_i\right)u+\int_{R^2}\hat{b}(\lambda-s)u(s)ds,\ \lambda\in R^2, \tag{5}$$

$\hat{b}(\lambda)$ - преобразование Фурье функции $b(x,y,t)$ по переменным y .

Теорема 1. *Пусть существуют постоянные* β_0, c_3, δ *такие, что*

$$|b_{ij}|\le c_3\exp\left(\frac{-2}{t^{\ell}}\right),\quad |b_i|\le c_3\exp\left(\frac{-1}{t^{\ell}}\right),$$

$$|\hat{b}(\lambda)|,\ |\hat{b}_t(\lambda)|\le c_3\exp\left(\frac{-3}{2t^{\ell}}\right)\exp\left(-\sigma_2|\lambda|\right),$$

$$\ell\beta_0K+2\alpha_0t^{\ell+1}\ge\delta>0,\quad a\ge\delta>0.$$

Тогда для любой функции $f(\lambda)$ *такой, что*

$$f_t(\lambda)\exp\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^{\ell}}+\beta_0\exp\left(\frac{1}{t^{\ell}}\right)\right]\in L^2(Q_0),$$

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_{Q_0}\left[f_t^2 e^{\sigma_5|\lambda|}+\frac{f^2 e^{\sigma_3|\lambda|}}{1+|\lambda|^3}\right]\exp\left[\sigma_1|\lambda|t+\frac{1}{t^\ell}+\beta_0\exp\left(\frac{1}{t^\ell}\right)-\right.$$

$$\left.-2\delta|\lambda|\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\right]d\lambda d\theta_0=E(f)<\infty,$$

существует единственное решение задачи (3), (4), для которого справедлива оценка

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_{D}\frac{\left[\upsilon_t^2+\left(\upsilon^2+\sum\limits_{|\alpha|\le m}|D_x^\alpha\upsilon|^2\right)\exp\left(\frac{1}{t^\ell}\right)\right]}{1+|\lambda|^3}\exp\left[\beta_0\exp\left(\frac{1}{t^\ell}\right)+\right.$$

$$\left.+(\sigma_3+\sigma_1 t)|\lambda|-2\sigma|\lambda|\exp\left(-\frac{1}{t^\ell}\right)\right]d\lambda dD+\int\limits_{R^2}\int\limits_{Q_0}\left[\upsilon_{tt}^2+\sum_{|\alpha|\le m}|D_x^\alpha\upsilon_t|^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{|\alpha|\le 2m}|D_x^\alpha\upsilon|^2\right]\exp\left[\sigma_5|\lambda|+\sigma_1 t|\lambda|-2\sigma|\lambda|\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\right]d\lambda dQ_0\le C_1E(f),$$

где $\upsilon^2=\upsilon\bar\upsilon$, $f^2=f\bar f$,

C_1 *не зависит от* υ, f;

$2\sigma_2>\sigma_3+\sigma_1 t-2\sigma\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)>0$; $\sigma_3>\sigma_5$; $\sigma_1<0$; $\sigma>0$;

$\sigma_5+\sigma_1 t-2\sigma\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\ge\delta_1>0$; $|\sigma_1|$, $\sigma\ge C_2(t,\delta,K,\alpha_0,\ell,C_3)>0$.

Доказательство. Рассмотрим в области Q_0 задачу

$$P_{1\varepsilon}u(\lambda)\equiv\exp\left(\frac{-1}{(t+\varepsilon)^\ell}\right)Ku_{tt}+\alpha_1 u_t+a_1 u+Au+$$

$$+M_1[i\lambda]u=f(\lambda)\exp\left[-\sigma|\lambda|\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\right],\tag{6}$$

$$u\Big|_{t=0}=u_t\Big|_{t=0}=0,\quad u\Big|_{\Gamma_0}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0}=\ldots=\frac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}\Big|_{\Gamma_0}=0,\quad \varepsilon>0,\tag{7}$$

где

$$\alpha_1=\alpha_0+\exp\left[\frac{-1}{(t+\varepsilon)^\ell}\right]2K\sigma|\lambda|\frac{\ell}{t^{\ell+1}}\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right),$$

$$a_1 = a + \alpha_0 \sigma |\lambda| \exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right) \frac{\ell}{t^{\ell+1}} + K \exp\left[\frac{-2}{t^\ell} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^\ell}\right] \frac{\sigma^2 |\lambda|^2 \ell^2}{t^{2\ell+2}} +$$

$$+ \exp\left[\frac{-1}{t^\ell} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^\ell}\right] \frac{\ell \sigma |\lambda| K}{t^{\ell+2}} \left(\frac{\ell}{t^\ell} - \ell - 1\right) = a_2 + a_3,$$

$$a_3 = \frac{\alpha_0 \ell \sigma |\lambda|}{t^{\ell+1}} \exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{t^{\ell+2}} K \sigma |\lambda| \exp\left[\frac{1}{t^\ell} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^\ell}\right],$$

$$M_1[i\lambda] v \equiv -b_2 \lambda^2 v - i b_1 \lambda v + \exp\left[-\sigma|\lambda| \exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\right] \int_{R^2} \hat{b}(\lambda - s) v(s) \exp\left[\sigma |s| \exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\right] ds,$$

$$\lambda \in R^2, \quad b_2 \lambda^2 = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} \lambda_i \lambda_j, \quad b_1 \lambda = \sum_{i=1}^{2} b_i \lambda_i .$$

Заметим, что если $u(\lambda)$ - решение задачи (6), (7) при $\varepsilon = 0$, то функция $v(\lambda) = u(\lambda) \exp\left[\sigma |\lambda| \exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\right]$ - решение задачи (3), (4). Тогда если мы докажем однозначную разрешимость задачи (6), (7) при $\varepsilon = 0$, то в соответствующем классе получим однозначную разрешимость задачи (3), (4).

Рассмотрим тождество .

$$\int_{R^2}\int_{D} \frac{K u_t^2}{1+|\lambda|^3} \varphi_0(t) d\lambda dD + \int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{u_t^2}{1+|\lambda|^3} \left[\frac{\beta_0 \ell K + 2\alpha_1 (1+\varepsilon)^{\ell+1}}{(t+\varepsilon)^{\ell+1}} \exp\left(\frac{1}{(t+\varepsilon)^\ell}\right) -\right.$$

$$\left. - K_t - K(\sigma_0 + \sigma_1 |\lambda|)\right] \varphi_0(t) d\lambda dt dD + \int_{R^2}\int_{D} \frac{\left[a_2 u^2 + \sum a_{\alpha\beta} D_x^\alpha u D_x^\beta \bar{u}\right]}{1+|\lambda|^3} \varphi d\lambda dD +$$

$$+ \int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{a_3(\bar{u}_t u + u_t \bar{u})}{1+|\lambda|^3} \varphi d\lambda dt dD - \int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{u^2}{1+|\lambda|^3} \left[\varphi' a_2 + \varphi a_{2t}\right] d\lambda dt dD -$$

$$- \int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{\sum \left[a_{\alpha\beta} \varphi' + a_{\alpha\beta t} \varphi\right] D_x^\alpha u D_x^\beta \bar{u}}{1+|\lambda|^3} d\lambda dt dD +$$

$$+\int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{(\overline{M_1[i\lambda]u}\cdot u_t+M_1[i\lambda]u\cdot\bar u_t)}{1+|\lambda|^3}\varphi\, d\lambda\, dt\, dD=$$

$$-\int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{(\bar f u_t+f\bar u_t)}{1+|\lambda|^3}\varphi \exp\left[-\sigma|\lambda|\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\right]d\lambda\, dt\, dD, \tag{8}$$

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1,\ \varphi_1=\exp\left(\frac{1}{(t+\varepsilon)^\ell}\right),\ \varphi_0=\exp\left[\beta_0\exp\left(\frac{1}{(t+\varepsilon)^\ell}\right)+\right.$$

$$\left.+(\sigma_3+\sigma_1 t)|t|+\sigma_0 t\right],\ \sigma_0<0,\ \sigma_1<0,\ \sigma_3>0.$$

Применяя лемму 1 и условия на функции b_{ij}, b_i, $\hat b(\lambda)$, оценим в левой части (8) последний интеграл:

$$|I|\le \eta\int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{u_t^2\varphi}{1+|\lambda|^3}d\lambda\, dt\, dD+\frac{1}{\eta}\int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{\varphi\exp\left[-2\sigma|\lambda|\exp\left(-\frac{1}{t^\ell}\right)\right]}{1+|\lambda|^3}\times$$

$$\times\left\{\int_{R^2}|\hat b(\lambda-s)|^2\exp\left[\frac{3}{t^\ell}+2\sigma|s|\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)-(\sigma_3+\sigma_1 t)|s|\right]ds\int_{R^2}u^2\exp\left[\frac{-3}{t^\ell}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\sigma_3+\sigma_1 t)|s|\right]ds\right\}d\lambda\, dt\, dD+\int_{R^2}\int_0^t\int_D\frac{|\lambda|u_t^2}{1+|\lambda|^3}\varphi_0\, d\lambda\, dt\, dD+$$

$$+\int_{R^2}\int_0^t\int_D\frac{u^2|\lambda|^3}{1+|\lambda|^3}\sum|b_{ij}|^2\varphi\varphi_1\, d\lambda\, dt\, dD+\eta_1\int_{R^2}\int_0^t\int_D\frac{\varphi u_t^2}{1+|\lambda|^3}d\lambda\, dt\, dD+$$

$$+\frac{1}{\eta_1}\int_{R^2}\int_0^t\int_D\frac{|\lambda|^2\sum b_i^2}{1+|\lambda|^3}\varphi u^2\, d\lambda\, dt\, dD\le\int_{R^2}\int_0^t\int_D\frac{u_t^2(\varphi\eta+\eta_1\varphi_1)}{1+|\lambda|^3}d\lambda\, dt\, dD+$$

$$+\int_{R^2}\int_0^t\int_D\frac{|\lambda|u_t^2\varphi_0}{1+|\lambda|^3}d\lambda\, dt\, dD+\int_{R^2}\int_0^t\int_D\frac{u^2|\lambda|^2}{1+|\lambda|^3}\left[|\lambda|\sum|b_{ij}|^2\varphi\varphi_1+\right.$$

$$+\frac{1}{\eta_1}\sum b_i^2\varphi\Big]d\lambda\,dt\,dD+\frac{c_0}{\eta}\int\limits_{R^2}\int\limits_0^t\int\limits_D\frac{u^2\varphi\exp\left(\frac{-3}{t^\ell}\right)}{1+|\lambda|^3}d\lambda\,dt\,dD. \tag{9}$$

Из тождества (8), используя оценку (9), в силу выбора $\sigma_0<0$, σ_3 и σ_1 получим следующее неравенство

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_D\left\{\frac{u_t^2+\Big[(1+|\lambda|^2)u^2+\sum\limits_{|\alpha|\le m}|D_x^\alpha u|^2\Big]\varphi_1}{1+|\lambda|^3}\right\}\varphi_0\,d\lambda\,dD\le c_1\int\limits_{R^2}\int\limits_{Q_0}\frac{f^2\varphi\exp\left[-2\sigma|\lambda|\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\right]}{1+|\lambda|^3}d\lambda\,dQ_0. \tag{10}$$

Если теперь рассмотреть выражение

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_0^t\int\limits_D\left[\overline{(P_{1\varepsilon}u)}_t\cdot u_{tt}+(P_{1\varepsilon}u)_t\cdot\bar u_{tt}\right]\varphi_2\,d\lambda\,dt\,dD,$$

где $\varphi_2=\exp\left[\beta_0\exp\left(\frac{1}{(t+\varepsilon)^\ell}\right)+\frac{1}{(t+\varepsilon)^\ell}+(\sigma_5+\sigma_1 t)|\lambda|+\sigma_0 t\right]$,

то после интегрирования по частям с учетом оценки (10) получим

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_{Q_0}\Big[u_{tt}^2+\sum\limits_{|\alpha|\le m}|D_x^\alpha u_t|^2+\sum\limits_{|\alpha|\le 2m}(D_x^\alpha u)^2\Big]\varphi_2\,d\lambda\,dQ_0\le c_1E(f). \tag{11}$$

Из оценок (10), (11) методом продолжения по параметру доказывается разрешимость задачи (6), (7) для $\varepsilon>0$. Далее предельным переходом при $\varepsilon\to0$ на основании оценок (10), (11) доказывается разрешимость задачи (6), (7) для $\varepsilon=0$. Докажем единственность решения задачи (6), (7) при $\varepsilon=0$. Для этого применим прием [3,12].

Пусть u_1, u_2 - два решения задачи (6), (7) при $\varepsilon=0$, тогда из тождества, аналогичного (8), для разности $u=u_1-u_2$ получим

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_D\Big\{K\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)u_t^2+u^2\Big[a+K\exp\left(\frac{-3}{t^\ell}\right)\frac{\sigma^2|\lambda|^2\ell^2}{t^{\ell+2}}+\exp\left(\frac{-2}{t^\ell}\right)\frac{\sigma|\lambda|K\ell}{t^{2\ell+2}}\Big]+$$

$$+\sum a_{\alpha\beta}D_x^\alpha u D_x^\beta\bar u\Big\}\frac{\exp(\sigma_3|\lambda|+\sigma_0 t+\sigma_1 t|\lambda|)}{1+|\lambda|^3}d\lambda\,dD+\int\limits_{R^2}\int\limits_0^t\int\limits_D\frac{1}{(1+|\lambda|^3)t^{\ell+1}}\Big[\alpha_0-$$

$$-\frac{(\ell+1)}{t}K\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\Big]\ell\sigma|\lambda|(\bar u u_t+u\bar u_t)\exp\Big[\frac{-1}{t^\ell}+(\sigma_3+\sigma_1 t)|\lambda|+$$

$$+\sigma_0 t\Big]d\lambda\,dt\,dD+\int\limits_{R^2}\int\limits_0^t\int\limits_D\frac{(\overline{M_1[i\lambda]u}\cdot u_t+M_1[i\lambda]u\cdot\bar u_t)}{1+|\lambda|^3}\exp\big[|\lambda|(\sigma_3+\sigma_1 t)+$$

$$+\sigma_0 t\Big]d\lambda\, dt\, dD-\int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{\sum\left[(\sigma_1|\lambda|+\sigma_0)a_{\alpha\beta}+a_{\alpha\beta t}\right]D_x^{\alpha}u\, D_x^{\beta}\bar{u}}{1+|\lambda|^3}\exp\Big[\sigma_0 t+$$

$$+|\lambda|(\sigma_3+\sigma_1 t)\Big]d\lambda\, dt\, dD+\int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{u_t^2}{1+|\lambda|^3}\Big[2\alpha_0+4\sigma|\lambda|\exp\left(\frac{-2}{t^{\ell}}\right)\frac{\ell}{t^{\ell+1}}-$$

$$-K(\sigma_1|\lambda|+\sigma_0)\exp\left(\frac{-1}{t^{\ell}}\right)-K_t\exp\left(\frac{-1}{t^{\ell}}\right)+\frac{K\ell\exp\left(\frac{-1}{t^{\ell}}\right)}{t^{\ell+1}}\Big]\exp\Big[\sigma_0 t+$$

$$+|\lambda|(\sigma_3+\sigma_1 t)\Big]d\lambda\, dt\, dD-\int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{u^2}{1+|\lambda|^3}\Big\{(\sigma_0+\sigma_1|\lambda|)\Big[a+$$

$$+K\exp\left(\frac{-3}{t^{\ell}}\right)\frac{\sigma^2|\lambda|^2\ell^2}{t^{2\ell+2}}+\exp\left(\frac{-2}{t^{\ell}}\right)\frac{\ell^2\sigma|\lambda|K}{t^{2\ell+2}}\Big]+a_t+$$

$$+\left[K\exp\left(\frac{-3}{t^{\ell}}\right)\frac{\sigma^2|\lambda|^2\ell^2}{t^{2\ell+2}}\right]_t+\left[\exp\left(\frac{-2}{t^{\ell}}\right)\frac{\sigma|\lambda|K\ell^2}{t^{2\ell+2}}\right]_t\Big\}\exp\Big[\sigma_0 t+$$

$$+(\sigma_1 t+\sigma_3)|\lambda|\Big]d\lambda\, dt\, dD=0. \qquad (12)$$

Оценим интегралы, стоящие в левой части тождества (12) :

$$I_1=\int_{R^2}d\lambda\int_0^t dt\int_D \frac{\sigma|\lambda|\ell\left[\alpha_0-\frac{(\ell+1)}{t}K\exp\left(\frac{-1}{t^{\ell}}\right)\right]u\bar{u}_t}{t^{\ell+1}(1+|\lambda|^3)}\exp\left[-\frac{1}{t^{\ell}}+\sigma_0 t+|\lambda|(\sigma_3+\sigma_1 t)\right]dD,$$

$$I_2=\int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{M_1[i\lambda]\,u\cdot\bar{u}_t}{1+|\lambda|^3}\exp\left[|\lambda|(\sigma_3+\sigma_1 t)+\sigma_0 t\right]d\lambda\, dt\, dD,$$

$$|I_1|\le\frac{\ell}{2}\int_{R^2}\int_0^t\int_D \frac{|\lambda|u_t^2}{1+|\lambda|^3}\exp\left[\frac{-1}{t^{\ell}}+\sigma_0 t+|\lambda|(\sigma_3+\sigma_1' t)\right]d\lambda\, dt\, dD+$$

$$+\frac{1}{2\eta}\int\limits_{R^2}\int\limits_0^t\int\limits_D \frac{\sigma^2 \ell^2|\lambda|u^2}{(1+|\lambda|^3)t^{2\ell+2}}\left[\alpha_0-\frac{(\ell+1)}{t}K\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\right]^2\exp\left[\frac{-1}{t^\ell}+\sigma_0 t+(\sigma_3+\sigma_1 t)|\lambda|\right]d\lambda\,dt\,dD,$$

$$|I_2|\leq\frac{\eta_1}{2}\int\limits_{R^2}\int\limits_0^t\int\limits_D\frac{|\lambda|\,u_t^2}{1+|\lambda|^3}\exp\left[\frac{-1}{t^\ell}+\sigma_0 t+(\sigma_3+\sigma_1 t)|\lambda|\right]d\lambda\,dt\,dD+$$

$$+\frac{1}{2\eta_1}\int\limits_{R^2}\int\limits_0^t\int\limits_D\frac{\sum b_{ij}^2|\lambda|^3}{1+|\lambda|^3}u^2\exp\left[\frac{1}{t^\ell}+\sigma_0 t+(\sigma_3+\sigma_1 t)|\lambda|\right]d\lambda\,dt\,dD+$$

$$+\frac{\eta_2}{2}\int\limits_{R^2}\int\limits_0^t\int\limits_D\frac{u_t^2}{1+|\lambda|^3}\exp\left[\sigma_0 t+|\lambda|(\sigma_3+\sigma_1 t)\right]d\lambda\,dt\,dD+\frac{1}{2\eta_2}\int\limits_{R^2}\int\limits_0^t\int\limits_D\frac{u^2\sum b_i^2|\lambda|^2}{1+|\lambda|^3}\times$$

$$\times\exp\left[\sigma_0 t+(\sigma_3+\sigma_1 t)|\lambda|\right]d\lambda\,dt\,dD+\frac{\eta_3}{2}\int\limits_{R^2}\int\limits_0^t\int\limits_D\frac{u_t^2}{1+|\lambda|^3}\exp\left[(\sigma_3+\sigma_1 t)|\lambda|+\right.$$

$$\left.+\sigma_0 t\right]d\lambda\,dt\,dD+c(\eta_3)\int\limits_{R^2}\int\limits_0^t\int\limits_D u^2\exp\left[\frac{-3}{t^\ell}+\sigma_0 t+(\sigma_3+\sigma_1 t)|\lambda|\right]d\lambda\,dt\,dD.$$

Выбрав η_2,η_3 так, чтобы $\ell\beta_0 K+2\alpha_0 t^{\ell+1}-(\eta_2+\eta_3)t^{\ell+1}\geqslant\delta_1>0$, и использовав выбор σ_0,σ_1,σ, который мы сделали при выводе оценок (10), (11), из тождества (12) и оценок на интегралы I_1, I_2 получим неравенство

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_D\frac{Ku_t^2}{1+|\lambda|^3}\exp\left[\frac{-1}{t^\ell}+(\sigma_3+\sigma_1 t)|\lambda|+\sigma_0 t\right]d\lambda\,dD\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{R^2}\int\limits_0^t\int\limits_D\frac{u_t^2\left[2|\alpha_0|+\eta_2+\eta_3\right]}{1+|\lambda|^3}\exp\left[\sigma_0 t+(\sigma_3+\sigma_1 t)|\lambda|\right]d\lambda\,dt\,dD. \qquad (13)$$

Умножив левую и правую части (13) на $\exp\left[\frac{1}{t^\ell}+\beta_0\exp\left(\frac{1}{t^\ell}\right)\right]$, получим

$$z\,\ell\beta_0\min K\leq z\,T^{\ell+1}\left(2\max|\alpha_0|+\eta_2+\eta_3\right),$$

где

$$z = \sup_{0<t<T} \operatorname{ess} y(t),\ y(t) = \int_{R^2}\int_D \frac{u_t^2}{1+|\lambda|^3} \exp\left[\sigma_0 t + \beta_0 \exp\left(\frac{1}{t^\ell}\right) + (\sigma_3 + \sigma_1 t)|\lambda|\right] d\lambda\, dD,$$

этсюда следует, что $U \equiv 0$.

Этим и завершается доказательство теоремы 1.

Рассмотрим задачу, сопряженную к задаче (1), (2):

$$L^* v = \psi(x,y,t),\ v\Big|_{t=T} = v_t\Big|_{t=T} = 0;\ v\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \ldots = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial n^{m-1}}\Big|_{\Gamma} = 0,$$

где $L^* v$ - оператор, формально сопряженный к оператору Lu.

В области Q_0 рассмотрим следующую задачу:

$$P_2 v(\lambda) \equiv \exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right) K v_{tt} - v_t\left[\alpha_0 - 2\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\left(K_t + \frac{\ell_K}{t^{\ell+1}}\right)\right] + v\left\{\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\left[\frac{\ell K_t}{t^{\ell+1}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\ell^2 K}{t^{2\ell+2}} + K_{tt} - \frac{\ell(\ell+1)}{t^{\ell+2}} K\right] + a - \alpha_0 t\right\} + Av + M^*[i\lambda] v = \psi(\lambda), \tag{14}$$

$$v\Big|_{t=T} = v_t\Big|_{t=T} = 0,\quad v\Big|_{\Gamma_0} = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0} = \ldots = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial n^{m-1}}\Big|_{\Gamma_0} = 0, \tag{15}$$

$$M^*[i\lambda] v \equiv -\left(\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\lambda_i\lambda_j - i\sum_{i=1}^{2} b_i\lambda_i\right) v + \int_{R^2} \hat{b}(\lambda - s) v(s)\, ds,\ \lambda \in R^2.$$

Теорема 2. *Пусть функции* $b_{ij}, b_i, \hat{b}(\lambda)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1 и существуют постоянные* β_0, δ *такие, что*

$$a - \alpha_{0t} + \exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\left[\frac{\ell K_t}{t^{\ell+1}} + K_{tt} - \frac{\ell(\ell+1)}{t^{\ell+2}} K\right] \geq \delta > 0,$$

$$\ell\beta_0 K + 2\alpha_0 t^{\ell+1} - 4\ell K \exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right) \geq \delta > 0.$$

Тогда для любой функции $\psi(\lambda)$ *такой, что*

$$\psi \exp \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t^{\ell}} - \beta_0 \exp\left(\frac{1}{t^{\ell}}\right)\right] \in L^2(Q_0),$$

$$\int_{R^2}\int_{Q_0}\left[\psi_t^2 e^{\sigma_{51}|\lambda|} + \frac{\psi^2 e^{\sigma_{31}|\lambda|}}{1+|\lambda|^3}\right] exp\left[-\frac{1}{t^{\ell}} - \beta_0 exp\left(\frac{1}{t^{\ell}}\right) - \right.$$

$$\left. -\sigma_1|\lambda|t - 2\sigma|\lambda| exp\left(-\frac{1}{t^{\ell}}\right)\right] d\lambda\, dQ_0 \equiv E_1(\psi) < \infty,$$

существует единственное решение задачи (14) , (15) , для которого выполнена оценка -

$$\int_{R^2}\int_{D}\left[v_t^2 exp\left(-\frac{1}{t^{\ell}}\right) + v^2 + \sum_{|\alpha|\le m}|D_x^{\alpha} v|^2\right] exp\left[-\frac{1}{t^{\ell}} - \beta_0 exp\left(\frac{1}{t^{\ell}}\right) + (\sigma_{31} - \sigma_3 t)|\lambda| - \right.$$

$$\left. -2\sigma|\lambda| exp\left(\frac{-1}{t^{\ell}}\right)\right]\frac{d\lambda\, dD}{1+|\lambda|^3} + \int_{R^2}\int_{Q_0}\left[v_{tt}^2 + \sum_{|\alpha|\le m}|D_x^{\alpha} v_t|^2 + \sum_{|\alpha|\le 2m}|D_x^{\alpha} v|^2\right] exp\left[\frac{-1}{t^{\ell}} - \right.$$

$$\left. -\beta_0 exp\left(\frac{1}{t^{\ell}}\right) - 2\sigma|\lambda| exp\left(-\frac{1}{t^{\ell}}\right) + (\sigma_{51} - \sigma_1 t)|\lambda|\right] d\lambda\, dQ_0 \le c_1 E_1(\psi),$$

c_1 не зависит от ψ, v,

$$\sigma_{51} < \sigma_{31}\ ;\ -\sigma_1, \sigma \geq c\,(t, K, \alpha_0, \ell, c_3),$$

$$2\sigma_2 > \sigma_{31} - \sigma_1 t - 2\sigma exp\left(\frac{-1}{t^{\ell}}\right) \geq \delta_1 > 0,$$

$$\sigma_{51} - \sigma_1 t - 2\sigma exp\left(\frac{-1}{t^{\ell}}\right) \geq \delta_2 > 0.$$

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме, изложенной в теореме 1.

Определим класс функций $S_1(\sigma_3)$ следующими соотношениями:

$$D_y^{\beta} u,\ u_t,\ u_{tt},\ D_x^{\alpha} u_t,\ D_x^{\alpha_1} u \in L^2(Q),\ |\beta| \le 2,\ |\alpha| \le m,\ |\alpha_1| \le 2m,$$

$$\hat{u}_t \in L^2(Q_0),$$

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_{Q_0}\left(\frac{|\hat{u}|^2+|\hat{u}_t|^2}{1+|\lambda|^3}\right)\exp\left[|\lambda|\left(\sigma_3+\sigma_1 t-2\sigma\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\right)\right]d\lambda dQ_0\equiv N_1(u)<\infty, \quad (16)$$

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_{D}\left[|\hat{u}_t|^2+\left(|\hat{u}|^2+\sum_{|\alpha|\le m}|D_x^\alpha\hat{u}|^2\right)\exp\left(\frac{1}{t^\ell}\right)\right]\exp\left[\beta_0\exp\left(\frac{1}{t^\ell}\right)+(\sigma_3+\sigma_1 t)|\lambda|-\right.$$

$$\left.-2\sigma|\lambda|\exp\left(\frac{-1}{t^\ell}\right)\right]\frac{d\lambda dD}{1+|\lambda|^3}<\infty.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и* $\sigma_{31}<\sigma_3+2\sigma_1 t$. *Тогда для решения задачи (1) , (2) из класса* $S_1(\sigma_3)$ *справедлива оценка устойчивости*

$$\int\limits_Q u^2 dQ\le\left(\int\limits_Q f^2 dQ\right)^{1/2}[N_1(u)]^{1/2}.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любой функции* $f(x,y,t)$ *такой, что* $E(\hat{f})<\infty$ *, существует решение задачи (1) , (2) из класса* $S_1(\sigma_3)$ *, где* $E(f)$ *определено в теореме 1,* $\hat{f}$ *- преобразование Фурье функции* $f(x,y,t)$ *по переменным* y .

Доказательство этих теорем следует из теорем 1,2 равенства Парсеваля и проводится так же, как и в работах [1-5] .

Рассмотрим 2-й случай.

Задача 2. Найти в области $Q=(0,T)\times D\times R$ решение уравнения (1) , удовлетворяющее следующим условиям:

$$u\big|_{t=0}=0,\quad u\big|_\Gamma=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=\ldots=\frac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}\Big|_\Gamma=0. \quad (17)$$

При этом предполагается, что коэффициенты уравнения (1) и оператор A удовлетворяют условиям п.1,на знак функции $b_1(x,t)$ не делается никаких ограничений.

Лемма 2. *Пусть* $2\sigma_2>\sigma_1>0$ *, тогда*

$$g_1(\lambda)=e^{\sigma_1|\lambda|}\int\limits_{-\infty}^{\infty}s^2 e^{-2\sigma_2|\lambda-s|-\sigma_1|s|}ds\le C_1(1+\lambda^2),\ \lambda\in R.$$

Доказательство следует из явного вида функции $g_1(\lambda)$.

Теорема 5. *Пусть функции* K,α_0,a *удовлетворяют условию теоремы 2*

и

$$|b_1| \leq c_3 \exp\left(\frac{-2}{t^\ell}\right); \left|\frac{\partial^m \hat{b}_2}{\partial t^m}\right| \leq c_3 \exp\left(\frac{-2}{t^\ell}\right) \exp(-\sigma_2|\lambda|),\ m=0,1;$$

$$\left|\frac{\partial^m \hat{b}}{\partial t^m}\right| \leq c_3 \exp\left(\frac{-3}{2t^\ell}\right) \exp(-\sigma_2|\lambda|),\quad m=0,1.$$

Тогда для решения задачи (1), (17) из класса $S_{12}(\sigma_3)$ справедлива оценка устойчивости

$$\int_Q u^2 dQ \leq \left(\int_Q f^2 dQ\right)^{1/2} [N_1(u)]^{1/2}.$$

Теорема 6. *Пусть функции K, α_0, a удовлетворяют условию теоремы 1, а функции $b_1, \hat{b}_2, \hat{b}$ удовлетворяют условию теоремы 5. Тогда для любой функции $f(x,y,t)$ такой, что $E(\hat{f}) < \infty$, существует решение задачи (1), (17) из класса $S_{12}(\sigma_3)$.*

Класс $S_{12}(\sigma_3)$ отличается от класса $S_1(\sigma_3)$, определенного (16) тем, что $y \in R$, $\lambda \in R$.

Доказательства этих теорем проводятся по схеме, изложенной выше, и опираются на следующую оценку интеграла:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\int_D \frac{\overline{v}_t e^{\sigma(t)-|\lambda|\sigma\psi(t)}}{1+|\lambda|^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} s\hat{b}_2(\lambda-s)v(s)e^{|s|\sigma\psi(t)}ds\right)d\lambda\, dt\, dD,$$

$$|I| \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\int_D \frac{v_t^2 a(t) e^{\sigma(t)}}{1+\lambda^2} d\lambda\, dt\, dD + \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\int_D \frac{e^{\sigma(t)-2|\lambda|\sigma\psi(t)}}{1+|\lambda|^4}\left[\int_{-\infty}^{\infty} s^2 \times\right.$$

$$\left.\times \frac{|\hat{b}_2(\lambda-s)|^2}{a(t)^{1+\alpha}} e^{-\sigma(t)+2\sigma|s|\psi(t)} ds \int_{-\infty}^{\infty} a(t)^\alpha e^{\sigma(t)} v^2 ds\right] d\lambda\, dt\, dD.$$

Рассмотрим 3-й случай.

Задача 3. Найти в области $Q_+ = (0,T)\times D \times R_+^2$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u|_{t=0} = 0,\quad u|_{\Gamma_+} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_+} = \ldots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}\Big|_{\Gamma_+} = 0,\quad u_{y_1}\big|_{y_1=0} = u_{y_2}\big|_{y_2=0} = 0, \tag{18}$$

$\Gamma_+ = (0,T)\times S \times R_+^2$.

Теорема 7. *Пусть функция $b(x,y,t)$ четная по переменной y и вместе с функциями K, α_0, a, b_i удовлетворяет условию теоремы 2. Тогда для решения задачи (1), (18) из класса $S_1^+(\sigma_3)$ справедлива оценка устойчивости*

$$\int_{Q_+} u^2 dQ \leq \left(\int_{Q_+} f^2 dQ \right)^{1/2} [N_1(u)]^{1/2} .$$

Класс $S_1^+(\sigma_3)$ отличается от класса $S_1(\sigma_3)$ тем, что область определения функций u является Q_+.

Доказательство. В области $Q_0 = (0,T) \times D$ рассмотрим задачу (14), (15) с оператором $M^*[i\lambda]$, определяющимся по формуле

$$M^*[i\lambda]v = -\sum b_i \lambda_i^2 v + \frac{1}{2} \int_{R^2} v(s)\left[\hat{b}(|\lambda - s|) + \hat{b}(|\lambda + s|)\right] ds,$$

и с правой частью $\hat{u}(\lambda)$, где

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{R_+^2} u(x,y,t) \cos \lambda_1 y_1 \cos \lambda_2 y_2 \, dy,$$

u - решение задачи (1), (18).

Тогда, как следует из теоремы 2, существует единственное решение задачи (14), (15) и выполнена оценка из теоремы 2. Отсюда и из равенства Парсеваля для косинус-преобразования Фурье получаем, что функция

$$z(x,y,t) = \frac{2}{\pi} \int_{R_+^2} v(\lambda) \cos \lambda_1 y_1 \cos \lambda_2 y_2 \, d\lambda$$

в области Q_+ удовлетворяет уравнению $L^* z = u$, начальным данным $z|_{t=T} = z_t|_{t=T} = 0$ и граничным условиям

$$z\Big|_{\Gamma_+} = \frac{\partial z}{\partial n}\Big|_{\Gamma_+} = \ldots = \frac{\partial^{m-1} z}{\partial n^{m-1}}\Big|_{\Gamma_+} = 0 .$$

Покажем, что

$$z_y\Big|_{y=0} = 0 .$$

В самом деле,

$$\int_0^t \int_D z_{y_1}^2 \, dt dD \leq c\left(1 - e^{-2y_1}\right) \int_0^t \int_D \int_{R_+^2} v^2 \lambda_1^2 \cos^2 \lambda_2 y_2 (1+\lambda_1^2)(1+\lambda_2^2) \, d\lambda dt dD \to 0,$$

$y_1 \to 0$, аналогично показывается, что $z_{y_2}\big|_{y_2=0}=0$.

Теперь из тождества

$$0=\int\limits_{Q_+}(zLu-uL^*z)dQ=\int\limits_{Q_+}(zf-u^2)dxdydt$$

следует утверждение теоремы 7.

Теорема 8. *Пусть функции* $b(x,y,t), f(x,y,t)$ *четные по переменным* y *и вместе с функциями* K, α_0, a, b_i *удовлетворяют условиям теорем . и 2. Тогда существует единственное решение задачи* (1) , (18) *из класса* $S_1^+(\sigma_3)$.

Доказательство. Продолжим функции f и b четным образом при $y<0$ и в области Q_- рассмотрим для уравнения $L_1\bar{u}=\bar{f}$ с коэффициентами $K, a, \alpha_0, a_{\alpha\beta}, b_i, \bar{b}$ задачу (2) , где

$$\bar{f}=\begin{cases} f(x,y,t), & y>0;\\ f(x,-y,t), & y<0,\end{cases} \qquad \bar{b}=\begin{cases} b(x,y,t), & y>0;\\ b(x,-y,t), & y<0.\end{cases}$$

Из теорем 3,4 следует, что существует единственное решение этой задачи $\bar{u}$, которое принадлежит классу $S_1(\sigma_3)$. Обозначим $\bar{u}\big|_{Q_+}=u$,

$$u_1=\begin{cases} \bar{u}(x,y,t), & y>0;\\ \bar{u}(x,-y,t), & y<0.\end{cases}$$

Тогда u_1 при $y>0$ является решением уравнения

$$Lu_1=f, \quad u_1\in S_1^+(\sigma_3).$$

Рассмотрим при $y>0$ функцию $u_2=u-u_1$, тогда в области Q_t функция u_2 удовлетворяет условиям:

$$Lu_2=0, \quad u_2\big|_{t=0}=0, \quad u_2\big|_{\Gamma_+}=\ldots=\frac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}\bigg|_{\Gamma_+}=0, \quad u_{2y}\big|_{y=0}=0.$$

Из теоремы 7 следует, что $u_2=0$ в области Q_+. Отсюда $u_1=\bar{u}$ в Q, а так как $u_1=\bar{u}\in S_1(\sigma_3)$, то $u_{1y}\big|_{y=0}=u_y\big|_{y=0}=0$, что и доказывает теорему.

Литература

1. Бубнов Б.А., Врагов В.Н. К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений.- Докл. АН СССР, 1982, т.264, № 4, с. 795-800.
2. Бубнов Б.А. Корректность смешанной задачи для одного класса ультрагиперболических уравнений (1) .- В кн.: Неклассические задачи уравнений математической физики. Новосибирск, 1982, с.42-46.

3. Бубнов Б.А. Краевая задача для одного класса ультрагиперболических уравнений.- В кн.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1981, с.34-39.

4. Бубнов Б.А. Задача Гурса для одного класса неклассических уравнений второго порядка.- В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1981, вып.51, с.17-29.

5. Бубнов Б.А. Краевые задачи для одного класса уравнений, содержащих производную по времени.- Докл. АН СССР, 1982, т.265, № 6, с.1292-1296.

6. Бубнов Б.А. Об одной краевой задаче для сингулярного ультрагиперболического уравнения.- Сиб. мат. журн., 1976, т.17, № 1, с.216-219.

7. Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа на плоскости и в пространстве. Автореф. Дис. на соиск. ученой степени д-ра физ.-мат.наук.- Новосибирск, 1977.- 28 с.

8. Дезин А.А. Простейшие разрешимые расширения для ультрагиперболических уравнений и псевдопараболических операторов.- Докл. АН СССР, 1963, т.148, № 5, с.1013-1016.

9. Терсенов С.А. О первой краевой задаче для одного уравнения неклассического типа.- Докл. АН СССР, 1980, т.250, № 5, с.1070-1073.

10. Дубинский Ю.А. К теории задачи Коши для уравнений в частных производных.- Докл. АН СССР, 1981, т.259, №4,с.781-785.

11. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа.- М.: Наука, 1980.- 285 с.

12. Нерсесян А.Б. О задаче Коши для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка.- Изв. АН АрмССР. Серия мат., 1968, т.3, № 2, с. 79-100.