УДК 517.54+517.514

О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В.М. Гольдштейн, В.Н. Ситников (Новосибирск)

В этой работе мы продолжаем изучение необходимых геометрических условий продолжения функций (дифференцируемых в обобщенном смысле) через границу области определения при условии сохранения их принадлежности рассматриваемому функциональному классу. Необходимое геометрическое условие (условие с диаметром дуги) было введено в [1] и оказалось удачным при изучении необходимых условий продолжения для классов Соболева (см. [1]). Использовавшаяся при доказательстве техника емкости носит достаточно общий характер. В этой статье мы предлагаем аксиоматическое описание этой техники, позволяющее получить необходимые условия продолжения не только для классов Соболева, но и для классов с дробными производными. В качестве иллюстрации рассмотрены классы Бесова.

Несколько слов об истории вопроса. Подробное изложение истории вопроса и библиографию можно найти в [2,3] , где изучена возможность продолжения функций классов Соболева и обобщенных гёльдеровских классов через гладкие границы В [4,5] доказана возможность продолжения функций этих же классов через липшицевы границы. В [6] показано, что условие квазиокружности (или эквивалентное ему двустороннее условие с диаметром дуги) является необходимым и достаточным для продолжения функций класса W_2^1 из плоских областей. Далее, в [7,8] было доказано, что условие квазиокружности является достаточным для продолжения функций классов L_p^1, W_p^l соответственно из плоских конечносвязных областей.

Основные результаты мы сформулируем после введения необходимого запаса

понятий.

§ 1. Емкостное условие продолжения

Предварительные сведения.

1. Мы будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: R - множество вещественных чисел; R^n - n-мерное векторное пространство; $x=(x_1,\dots,x_n)$ - точка в R^n. Для $a\in R^n$, $r>0$, символами $B(a,r)$, $S(a,r)$ обозначены соответственно шар и сфера радиуса r в точке a.

Для произвольного множества A топологического пространства X символ $\bar{A}$ означает замыкание A, ∂A - границу множества A.

Фиксируем область G топологического пространства с мерой (X,μ) и полунормированное пространство функций $\mathcal{F}(G)$. Функция $u\in\mathcal{F}(G)$ называется $\mathcal{F}$-допустимой для пары множеств $F_0\subset\bar{G}$, $F_1\subset\bar{G}$, если $u(x)=0$ для всех точек x, принадлежащих некоторой окрестности множества $F_0\cap G$ в области G, и $u(x)=1$ для всех x, принадлежащих некоторой окрестности множества $F_1\cap G$ в области G.

Вариационной емкостью в области G пары множеств (F_0,F_1) называется число $Cap_{\mathcal{F}}(F_0,F_1,G)$, равное точной нижней грани полунорм $\|u\|_{\mathcal{F}(G)}$ всевозможных допустимых для пары (F_0,F_1) в области G функций. Если допустимых функций для пары (F_0,F_1) не существует, полагаем $Cap_{\mathcal{F}}(F_0,F_1,G)=\infty$.

Напомним простейшие свойства $\mathcal{F}$-емкости.

1. Свойство монотонности относительно пары.

Если $F_0'\subset F_0$, $F_1'\subset F_1$, то $Cap_{\mathcal{F}}(F_0',F_1',G)\le Cap_{\mathcal{F}}(F_0,F_1,G)$.

2. Свойство монотонности относительно области.

Рассмотрим два полунормированных пространства функций $\mathcal{F}_1(G)$ и $\mathcal{F}_2(U)$, определенных на областях G и U, причем 1) $G\subset U$; 2) $\mathcal{F}_2(U)|_G\subset\mathcal{F}_1(G)$; 3) $\|u|_G\|_{\mathcal{F}_1(G)}\le K\|u\|_{\mathcal{F}_2(U)}$ для всех функций $u\in\mathcal{F}_2(U)$. Тогда для любой пары $(F_0,F_1)\subset\bar{G}$ справедливо неравенство

$$Cap_{\mathcal{F}_1}(F_0,F_1,G)\le K\,Cap_{\mathcal{F}_2}(F_0,F_1,U).$$

Доказательства свойств 1 и 2 см., например, в [1].

Полунормированное пространство функций $\mathcal{F}(R^n)$ будем называть инвариантным относительно изометрий, если оператор φ^*, индуцированный изометрией $\varphi: R^n \to R^n$ $(\varphi^* u = u \circ \varphi$ для любой $u \in \mathcal{F}(R^n))$, является изометрией пространства $\mathcal{F}(R^n)$ на себя.

Лемма 1. *Если полунормированное пространство функций $\mathcal{F}(R^n)$ инвариантно относительно изометрий, то $Cap_{\mathcal{F}}(\{x\},\{y\},R^n)$ и $Cap_{\mathcal{F}}(\{x\},S(x,r),R^n)$ являются функциями от расстояния $|x-y|$ между точками x, y и радиуса r соответственно.*

Доказательство очевидно, так как изометрией любую пару точек (x,y) можно перевести в пару $(0,\ldots,0),(0,\ldots,|x-y|)$.

Обозначим функцию $Cap_{\mathcal{F}}(\{x\},\{y\},R^n)$ через $\gamma_{\mathcal{F}}(|x-y|)$, а $Cap_{\mathcal{F}}(\{x\},S(x,r),R^n)$ - через $\delta_{\mathcal{F}}(r)$.

2. Условие невидимости. Рассмотрим полунормированное пространство функций $\mathcal{F}_0(G)$ в области G пространства R^n. Пусть открытые множества V_1, V_2, V_3 таковы, что $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = G$ и $\partial V_1 \cap \overline{G}$ не пересекается с $\partial V_3 \cap \overline{G}$. Рассмотрим функцию $u \in \mathcal{F}_0(G)$, равную нулю на V_2.

Пространство $\mathcal{F}_0(G)$ удовлетворяет условию невидимости, если для такой функции u функция

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in V_1, \\ 0, & x \notin V_1, \end{cases}$$

принадлежит классу $\mathcal{F}_0(G)$ и справедливо неравенство

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_0(G)} \leq K \|u\|_{\mathcal{F}_0(G)},$$

где постоянная $K \geq 1$ не зависит от выбора функции u.

Лемма 2. *Пусть H - замкнутое подмножество области G. Если пространство $\mathcal{F}_0(G)$ удовлетворяет условию невидимости, то для любого компакта $F_1 \subset \overline{G}$, $F_1 \cap H = \emptyset$ справедливо*

$$Cap_{\mathcal{F}_0}(H,F_1,G) \leq K\, Cap_{\mathcal{F}_0}(\partial H,F_1,G),$$

где K - постоянная из условия невидимости.

Доказательство. Если $H^0 = \phi$, то неравенство очевидно. Рассмотрим случай $H^0 \neq \phi$. Выберем произвольную функцию u, допустимую для пары $(\partial H, F_1)$. Она обращается в нуль в некоторой окрестности $U(\partial H)$ множества ∂H. Из условия невидимости следует, что

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_0(G)} \leq K \|u\|_{\mathcal{F}_0(G)}.$$

Функция $\tilde{u}$ по построению допустима для пары (H, F_1). Отсюда следует утверждение леммы.

Оператор T, действующий из полунормированного пространства функций $\mathcal{F}_1(G)$, определенных в области $G \subset R^n$, в полунормированное пространство функций $\mathcal{F}_2(R^n)$, называется оператором продолжения, если

$$(Tu)\big|_G = u, \quad \|Tu\|_{\mathcal{F}_2(R^n)} \leq \|T\| \|u\|_{\mathcal{F}_1(G)}$$

для любой функции $u \in \mathcal{F}_1(G)$.

Теорема 1. *Пусть G - область в R^n, $\mathcal{F}_1(G), \mathcal{F}_2(R^n)$ - полунормированные пространства функций. Если существует оператор продолжения $T: \mathcal{F}_1(G) \longrightarrow \mathcal{F}_2(R^n)$, то для всякой пары замкнутых множеств $(F_0, F_1) \subset G$ справедливо неравенство*

$$Cap_{\mathcal{F}_2}(F_0, F_1, R^n) \leq \|T\| \, Cap_{\mathcal{F}_1}(F_0, F_1, G).$$

Доказательство. Выберем для вариационной $\mathcal{F}_1$-емкости произвольную функцию $u \in \mathcal{F}_1(G)$, допустимую для пары множеств (F_0, F_1). По определению допустимой функции, существует окрестность $U(F_0) \subset G$ множества F_0, на которой функция u обращается в нуль, и окрестность $U(F_1) \subset G$ множества F_1, на которой функция u обращается в единицу. По определению, оператор продолжения T не изменяет u на области G. Следовательно, для пары множеств (F_0, F_1) в R^n функция Tu является допустимой для $\mathcal{F}_2$-емкости. Из ограниченности оператора продолжения T и определения емкости следует

$$Cap_{\mathcal{F}_2}(F_0, F_1, R^n) \leq \|T\| \, Cap_{\mathcal{F}_1}(F_0, F_1, G).$$

Доказательство закончено.

§ 2. Геометрическое условие продолжения

Область $G \subset R^n$ удовлетворяет условию с диаметром дуги, если для каждой пары точек (x,y) из G выполнено неравенство

$$diam\,(x,y,G) \le C|x-y|.$$

Здесь $diam(x,y,G)$- минимум диаметров гладких кривых, соединяющих точки x и y в области G.

Теорема 2. *Пусть* G *- ограниченная область в* R^n, $\mathcal{F}_0(G)$ *- полунормированное пространство функций, удовлетворяющих условию невидимости,*

$\mathcal{F}_1(R^n), \mathcal{F}_2(R^n)$ *- полунормированные пространства функций, для которых*

1) $\mathcal{F}_1(R^n), \mathcal{F}_2(R^n)$ *инвариантны относительно изометрии;*

2) $\mathcal{F}_2(R^n)|_G \subset \mathcal{F}_0(G)$ *и* $\|u|_G\|_{\mathcal{F}_0(G)} \le K\|u\|_{\mathcal{F}_2(R^n)}$

для любой функции $u \in \mathcal{F}_2(R^n)$. *Постоянная* K *не зависит от выбора функции* u;

3) *для любой пары точек* $x,y \in R^n$ *верно* $\delta_{\mathcal{F}_2}(|x-y|) > 0$;

4) $\gamma_{\mathcal{F}_1}(t) \ge \alpha(c)\,\delta_{\mathcal{F}_2}(ct) \quad (ct < diam\,(G)),$

где $\lim\limits_{c\to\infty} \alpha(c) = \infty$.

Тогда, если существует оператор продолжения $T: \mathcal{F}_0(G) \to \mathcal{F}_1(R^n)$, *область* G *удовлетворяет условию с диаметром дуги.*

Доказательство. Предположим, что область G не удовлетворяет условию с диаметром дуги. Тогда для любого $m \in N$ существует пара точек x_m, $y_m \in G$, для которых длина любой кривой γ_m, соединяющей точки x_m и y_m в G, больше, чем $m|x_m - y_m|$. В силу ограниченности области G, можно считать последовательности $\{x_m\}$ и $\{y_m\}$ сходящимися в R^n. Докажем, что

$$\lim_{m\to\infty} x_m = \lim_{m\to\infty} y_m .$$

Если пределы не равны, то существуют такие $x_0 \neq y_0$, что

$$x_0 = \lim_{m\to\infty} x_m, \quad y_0 = \lim_{m\to\infty} y_m.$$

Тогда имеем цепочку очевидных неравенств:

$$\operatorname{diam}(x_0, y_0, G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq \frac{\operatorname{diam}(G)}{|x_0 - y_0|}|x_0 - y_0|,$$

т.е. для точек x_0, y_0 выполняется в области G условие с диаметром дуги при постоянной $C = \operatorname{diam}(G)/|x_0 - y_0|$. Тогда при достаточно больших m для точек x_m и y_m (в силу сходимости $x_m \to x_0$ и $y_m \to y_0$) выполняется неравенство

$$\operatorname{diam}(x_m, y_m, G) \leq \frac{2\operatorname{diam}(G)}{|x_0 - y_0|}|x_m - y_m|.$$

Это противоречит построению последовательностей $\{x_m\}$, $\{y_m\}$. Мы доказали, что

$$\lim_{m\to\infty} |x_m - y_m| = 0.$$

Напомним, что

$$\operatorname{diam}(x_m, y_m, G) \geq m|x_m - y_m|,$$

т.е. связная компонента A_m пересечения шара $B_m = B(x_m, m|x_m - y_m|)$ с областью G, содержащая x_m, не включает точку y_m.

Из свойства 1 монотонности для вариационной емкости получаем

$$Cap_{\mathcal{F}_0}(\{x_m\}, \{y_m\}, G) \leq Cap_{\mathcal{F}_0}(\{x_m\}, G \setminus \overline{B}_m, G).$$

Из условия невидимости для пространства $\mathcal{F}_0$ следует неравенство для емкости пары $(\{x_m\}, S_m^0)$, где $S_m^0 = \partial B_m \cap G$,

$$Cap_{\mathcal{F}_0}(\{x_m\}, G \setminus \overline{B}_m, G) \leq K_1 Cap_{\mathcal{F}_0}(\{x_m\}, S_m^0, G),$$

здесь K_1 - постоянная из условия невидимости.

Применяя к правой части последнего неравенства условие 1 теоремы, полу-

чаем

$$Cap_{\mathcal{F}_0}(\{x_m\}, S_m^o, G) \leqslant K\, Cap_{\mathcal{F}_2}(\{x_m\}, S_m, \mathbb{R}^n).$$

Сравнивая три полученных неравенства и применяя свойство 2 монотонности ($S_m^o \subset S_m = \partial B_m$) емкости, имеем

$$Cap_{\mathcal{F}_0}(\{x_m\}, \{y_m\}, G) \leqslant KK_1\, Cap_{\mathcal{F}_2}(\{x_m\}, S_m, \mathbb{R}^n).$$

Из существования оператора продолжения $T: \mathcal{F}_0(G) \to \mathcal{F}_1(\mathbb{R}^n)$ и теоремы 1 следует

$$Cap_{\mathcal{F}_1}(\{x_m\}, \{y_m\}, \mathbb{R}^n) \leqslant \|T\|\, Cap_{\mathcal{F}_0}(\{x_m\}, \{y_m\}, G),$$

т.е.

$$Cap_{\mathcal{F}_1}(\{x_m\}, \{y_m\}, \mathbb{R}^n) \leqslant \|T\| KK_1\, Cap_{\mathcal{F}_2}(\{x_m\}, S_m, \mathbb{R}^n).$$

Вспоминая определение $\gamma_{\mathcal{F}_1}$ и $\delta_{\mathcal{F}_2}$ для пространств $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ инвариантных относительно изометрий, последнее неравенство можно переписать в виде:

$$\frac{\gamma_{\mathcal{F}_1}(|x_m - y_m|)}{\delta_{\mathcal{F}_2}(m|x_m - y_m|)} \leqslant \|T\| KK_1$$

для всех $m \in N$. Это противоречит условию 3 теоремы. Значит, наша область удовлетворяет условию с диаметром дуги. Доказательство закончено.

§ 3. Условие продолжения для классов $B^l_{p,\theta}$

В [3] показано, что условия теоремы 2 выполнены для пространства $L^l_p(G)$ при $lp > n$. Мы покажем, что приведенные выше рассуждения справедливы и для функциональных классов Бесова $B^l_{p,\theta}(G)$. Случай $lp = 2$, $\theta = \infty$ исследован в [9] для плоских областей.

1. В обозначениях и определении классов $B^l_{p,\theta}(G)$ будем следовать монографии [3].

Будем использовать следующее обозначение для конечной разности: при $x \in G$, $y \in \mathbb{R}^n$ выполняется

$$\Delta(y,G)f(x)=\begin{cases} f(x+y)-f(x), & [x,x+y]\subset G,\\ 0, & [x,x+y]\not\subset G.\end{cases}$$

Из различных способов определения пространства $B^{\ell}_{p,\theta}$ выберем технически наиболее удобный для нас, учитывая, что для областей, в которых верна теорема продолжения, приводимая ниже, нормировка $B^{\ell}_{p,\theta}$ эквивалентна стандартной [3, § 18.6] .

Определение. Пространством $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$ называется линейное нормированное пространство измеримых функций f , которые определены на области $G\subset R$ и для которых норма

$$|f|^{\ell}_{p,\theta,G,h}=|f|_{L_p(G)}+\left\{\int\limits_{|t|<h}\frac{|\Delta(t,G)f|^{\theta}_{L_p(G)}}{|t|^{\ell\theta+n}}dt\right\}^{1/\theta}$$

ограничена.

Будем также рассматривать полунорму

$$\|f\|^{\ell}_{p,\theta,G,h}=|f|^{\ell}_{p,\theta,G,h}-|f|_{L_p(G)}.$$

Определение. Емкостью $C^{\ell}_{p,\theta}(F_0,F_1,G,h)$ пары (F_0,F_1) относительно полунормы $\|\cdot\|^{\ell}_{p,\theta,G,h}$ в области G называется величина

$$\inf\|u\|^{\ell}_{p,\theta,G,h},$$

где нижняя грань берется по всем допустимым относительно этой полунормы функциям. В обозначении емкости мы будем опускать часть индексов там, где это не вызовет разночтения.

В случае, когда допустимых функций не существует, емкость полагаем рав-

ной ∞ .

Для непересекающихся компактов $F_0, F_1 \subset G$ емкость всегда меньше ∞, так как допустимые функции всегда существуют.

Приведем некоторые свойства емкости $C^{\ell}_{p,\theta}$:

1) *Монотонность относительно пары*. Если $F_0' \subset F_0, F_1' \subset F_1$, то

$$C^{\ell}_{p,\theta}(F_0', F_1', G, h) \leqslant C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h).$$

2) *Монотонность относительно области*. Если $\mathcal{U} \subset G \subset R^n$, то

$$C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, \mathcal{U}, h) \leqslant C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h).$$

Доказательство свойств 1) , 2) следует из определений емкости $C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h)$ и полунормы $\|\cdot\|^{\ell}_{p,\theta,G,h}$.

3) *Эквивалентность относительно* h . Если $0 < h_1 < h_2 \leqslant \infty$, то

$$\frac{1}{K} C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h_2) \leqslant C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h_1) \leqslant K C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h_2).$$

Доказательство основывается на эквивалентности нормы $\|\cdot\|^{\ell}_{p,\theta,G,h}$ при различных h (см., например, [10]).

4) *Непрерывность*. Пусть $\{F_{1,m} \subset G\}$ - монотонно убывающая последовательность компактов, $F_{1,m} \supset F_{1,m+1}$ при всех m и

$$F_1 = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_{1,m} .$$

Тогда для любого компакта F_0 такого, что $F_0 \subset G$ и $F_0 \cap F_{1,m} = \emptyset$ при всех m , возможен предельный переход

$$\lim_{m \to \infty} C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_{1,m}, G, h) = C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h).$$

Доказательство приводится в [2] .

5) *Положительность*. Пусть $G \subset R^n$ - область с гладкой границей, (F_0, F_1) - пара непересекающихся компактов, принадлежащих G . Тогда при $\ell p > n$ емкость $C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h)$ больше нуля.

Доказательство. В силу монотонности емкости относительно пар множеств (F_0, F_1) свойство 5) достаточно доказать для пары точек.

Предположим, что $C^{\ell}_{p,\theta}(F_0,F_1,G,h)=0$. По определению емкости, существует последовательность непрерывных функций $\{u_m\}$, допустимых для пары $(\{a\},\{b\})$ в области G и сходящихся к нулю в полунорме $\|\cdot\|^{\ell}_{p,\theta,G,h}$. Тогда можно считать, что последовательность $\{u_m\}$ сходится к некоторой константе.

В силу теоремы вложения для пространства $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$ при $\ell p>n$, следует, что последовательность $\{u_m\}$ сходится локально равномерно в области G. Но это противоречит равенствам $u(a)=0$, $u(b)=1$.

Доказательство закончено.

6) Пусть $\varphi_{a,x_0}=a(x-x_0)$. Тогда

$$C^{\ell}_{p,\theta}(F_0,F_1,R^n,\infty)=|a|^{\frac{n}{p}-\ell}C^{\ell}_{p,\theta}(\varphi_{a,x_0}(F_0),\varphi_{a,x_0}(F_1),R^n,\infty).$$

Доказательство. При преобразовании подобия $\varphi_{a,x_0}:R^n\to R^n$, $\varphi_{a,x_0}(x)=a(x-x_0)$ функция f, допустимая для пары компактов (F_0,F_1), преобразуется в функцию $f\circ\varphi_{a,x_0}$, допустимую для пары компактов $(\varphi_{a,x_0}(F_0),\varphi_{a,x_0}(F_1))$. Из определения полунормы $\|\cdot\|^{\ell}_{p,\theta,R^n,\infty}$ имеем

$$\|f\|^{\ell}_{p,\theta,R^n,\infty}=|a|^{\frac{n}{p}-\ell}\|f\circ\varphi_{a,x_0}\|^{\ell}_{p,\theta,R^n,\infty}.$$

Отсюда, в силу определения емкости $C^{\ell}_{p,\theta}$, получаем искомое равенство для емкостей.

3. Пусть x,y - точки из R^n. Рассмотрим емкость $C^{\ell}_{p,\theta}(\{x\},\{y\},R^n,\infty)$. В силу свойства 6) для емкости $C^{\ell}_{p,\theta}$, функция $C^{\ell}_{p,\theta}(\{x\},\{y\},R^n,\infty)$ инвариантна относительно изометрий. Любую пару точек (x,y) изометрией можно перевести в пару $(0,\dots,0),(0,\dots,|x-y|)$. Следовательно, $C^{\ell}_{p,\theta}(\{x\},\{y\},R^n,\infty)$ является функцией от расстояния между точками $|x-y|$. Обозначим ее через $\gamma^{\ell}_{p,\theta}(|x-y|)$.

Аналогично функцию $C^{\ell}_{p,\theta}(\{x\},S(x,r),R^n,\infty)$ обозначим через $\delta^{\ell}_{p,\theta}(r)$.

Лемма 3. *Для пространства $B^{\ell}_{p,\theta}(R^n)$ при $\ell p>n$ соотношение*

$$\gamma^{\ell}_{p,\theta}(t)=Ac^{\ell-\frac{n}{p}}\delta^{\ell}_{p,\theta}(ct)$$

выполняется при некотором $A>0$ *, зависящем только от* n,ℓ,p,θ.

Доказательство. Рассмотрим емкости $\gamma(a)=C^{\ell}_{p,\theta}(\{0\},\{x_a\},\mathbb{R}^n,\infty)$ и $\delta(a)=C^{\ell}_{p,\theta}(\{0\},S_a,\mathbb{R}^n,\infty)$, $x_a=(a,a,\ldots,0)$, $S_a=S(0,a)$, $a>0$. Докажем, что соотношение $\gamma(a)/\delta(a)$ не зависит от выбора числа a.

По свойству 4) для емкостей $C^{\ell}_{p,\theta}$, имеем $\gamma(a)>0$ и $\delta(a)>0$ для любого a. При преобразовании подобия $\varphi_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\varphi_a(x)=ax$, в силу свойства 6) для емкостей, получаем

$$C^{\ell}_{p,\theta}(F_0,F_1,\mathbb{R}^n,\infty)=a^{\frac{n}{p}-\ell}\cdot C^{\ell}_{p,\theta}(\varphi_a(F_0),\varphi_a(F_1),\mathbb{R}^n,\infty).$$

Следовательно, для функций $\gamma(a)$ и $\delta(a)$ справедливы соотношения:

$$\gamma(a)=a^{\frac{n}{p}-\ell}\gamma(1),\quad \delta(a)=a^{\frac{n}{p}-\ell}\delta(1),$$

т.е.

$$\frac{\gamma(a)}{\delta(a)}=\frac{\gamma(1)}{\delta(1)}=A,$$

где $A>0$ зависит только от n,ℓ,p,θ.

Далее,

$$\frac{\gamma(t)}{\delta(ct)}=\frac{\gamma(t)A}{\gamma(ct)}=\frac{At^{\frac{n}{p}-\ell}\gamma(1)}{(ct)^{\frac{n}{p}-\ell}\gamma(1)}=Ac^{\ell-\frac{n}{p}},$$

откуда и следует наше утверждение.

4. Для пространства $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$, в силу определения нормы $\|\cdot\|^{\ell}_{p,\theta,G,h}$, выполнено условие невидимости с некоторой постоянной $K>1$. Следовательно, по лемме 2, для емкостей $C^{\ell}_{p,\theta}$ справедливо неравенство

$$C^{\ell}_{p,\theta}(H,F_1,G,h)\le KC^{\ell}_{p,\theta}(\partial H,F_1,G,h).$$

Область $G\subset\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию продолжения для $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$, если для какого-нибудь h существует ограниченный оператор продолжения $T:B^{\ell}_{p,\theta}(G)\to B^{\ell}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ такой, что

$$(Tu)\big|_G = u\ , \quad \|Tu\|^{\ell}_{p,\theta,R^n,h} < \|T\|\|u\|^{\ell}_{p,\theta,G,h}\ .$$

Лемма 4. *Пусть G – область в R^n. Если существует оператор продолжения $T: B^{\ell}_{p,\theta}(G) \longrightarrow B^{\ell}_{p,\theta}(R^n)$, то для всякой пары компактов $(F_0,F_1) \subset G$ справедливо неравенство*

$$C^{\ell}_{p,\theta}(F_0,F_1,R^n,h) \leqslant \|T\|\, C^{\ell}_{p,\theta}(F_0,F_1,G,h).$$

Лемма является следствием теоремы 1.

5. Теорема 3. *Пусть G – ограниченная область в R^n. Если существует оператор продолжения*

$$T: B^{\ell}_{p,\theta}(G) \longrightarrow B^{\ell}_{p,\theta}(R^n)$$

при $\ell p > n$, то область G удовлетворяет условию с диаметром дуги.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2 покажем, что существуют последовательности $\{x_m\}, \{y_m\}$ такие, что

$$\lim_{m\to\infty} |x_m - y_m| = 0, \quad \mathrm{diam}(x_m, y_m, G) \geqslant m|x_m - y_m|\ .$$

Из свойства 1) монотонности относительно пар для емкости $C^{\ell}_{p,\theta}(F_0,F_1,G,h)$ получаем

$$C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\},\{y_m\},G,h) \leqslant C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\}, G\setminus \bar{B}_m, G, h).$$

Из условия невидимости для пространства $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$ для пары $(\{x_m\}, S^o_m)$, где $S^o_m = \partial B_m \cap G$, следует неравенство

$$C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\}, G\setminus\bar{B}_m, G, h) < K_1 C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\}, S^o_m, G, h).$$

Из существования оператора продолжения $T: B^{\ell}_{p,\theta}(G) \to B^{\ell}_{p,\theta}(R^n)$ и свойства 2) монотонности относительно области $G \subset R^n$ имеем

$$C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\}, S^o_m, G, h) \leqslant C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\}, S^o_m, R^n, h).$$

Применяя к правой части последнего неравенства свойство 1) монотонности относительно пар $S^o_m \subset S_m = \partial B_m$ и свойство эквивалентности по h, получаем

$$C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\}, S^o_m, R^n, h) \leqslant K_2\, C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\}, S_m, R^n, \infty).$$

Сравнивая полученные неравенства, имеем

$$C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\},\{y_m\},G,h) \le K_1K_2C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\},S_m,R^n,\infty).$$

Из существования оператора продолжения T и леммы 1 следует

$$C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\},\{y_m\},R^n,h) \le \|T\|\, C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\},\{y_m\},G,h),$$

и, применяя свойство 3) эквивалентности по h, имеем

$$C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\},\{y_m\},R^n,\infty) \le K_2\, C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\},\{y_m\},R^n,h).$$

Сравнивая последние три неравенства, получаем

$$C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\},\{y_m\},R^n,\infty) \le K_1K_2^2\|T\|\, C^{\ell}_{p,\theta}(\{x_m\},S_m,R^n,\infty).$$

Вспоминая определение и свойства функций γ и δ для пространства $B^{\ell}_{p,\theta}$, последнее неравенство можно переписать в виде:

$$\frac{\gamma(|x_m-y_m|)}{\delta(m|x_m-y_m|)} \le K_1K_2^2\|T\|$$

для всех $m\in N$. Это противоречит условию леммы 2. Значит, наша область G удовлетворяет условию с диаметром дуги.

Доказательство закончено.

Литература

1. Гольдштейн В.М. Теоремы вложения, продолжения и емкость: Учеб. пособие Новосибирск, 1982.- 84 с.- (Новосиб.гос.ун-т)

2. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.- М.: Мир. 1973.

3. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.- М.: Наука, 1975.

4. Буренков В.И. Об одном способе продолжения дифференцируемых функций.- Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1976, т. 140, с.27-67

5. Буренков В.И. О продолжении функций с сохранением полунормы. - Докл.

АН СССР, 1976, т.2228, № 4, с.779-782.

6. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными.- Успехи мат. наук, 1979, т. 34, № 1, с. 17-62.

7. Гольдштейн В.М. Емкость и продолжение функций с обобщенными производными.- Сиб.мат.журн., 1982, т.23, № 1, с. 49-59.

8. Jones P.W. Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. - Preprint Univ. of Chicago, 1980, p.1-44.

9. Гольдштейн В.М. Продолжение функций классов $B^{l}_{p,\theta}$ через квазиконформные границы.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды сем. С.Л.Соболева) , Новосибирск, 1979, № 1, с.16-36.

10. Бесов О.В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения.- Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1961, т. 60, с. 42-81.