УДК 517.392

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Ф.Я. Загирова (Новосибирск)

1°. При решении интерполяционных задач и вычислении коэффициентов квадратурных формул часто приходится сталкиваться с необходимостью решения линейной системы с матрицей Вандермонда. Мы приведем здесь одну форму записи решения этой системы и следствие из нее для коэффициентов оптимальных квадратурных формул.

Пусть дана линейная система m-го порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

все λ_i различны.

Введем многочлен m-й степени $E(\lambda)$:

$$E(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_m) = \lambda^m + d_1\lambda^{m-1} + \dots + d_m . \tag{1.2}$$

Предложение 1. *Решение системы (1.1) можно записать в следующем виде:*

$$a_i = \frac{\sum_{\ell=0}^{m-1} d_\ell\, \sigma_{m-\ell}^{(i)}}{E'(\lambda_i)}, \quad d_0 = 1, \tag{1.3}$$

здесь $\sigma_k^{(i)} = b_1\lambda_i^{k-1} + b_2\lambda_i^{k-2} + \ldots + b_k.$

Доказательство. Введем многочлены $m-1$-й степени:

$$E_j(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{(\lambda-\lambda_j)} = \lambda^{m-1} + d_1^{(j)}\lambda^{m-2} + \ldots + d_{m-1}^{(j)}. \qquad (1.4)$$

Легко проверить, что

$$d_k^{(j)} = \lambda_j^{(k)} + d_1\lambda_j^{k-1} + \ldots + d_k. \qquad (1.5)$$

Заметим, что
$$E_i(\lambda_j) = \begin{cases} E'(\lambda_i), & \text{если } i=j; \\ 0, & \text{если } i\neq j. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую сумму:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i E_j(\lambda_i).$$

С одной стороны, эта сумма просто равна $a_j E'(\lambda_j)$, а с другой, если расписать $E_j(\lambda_i)$ по формуле (1.4), получим:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i E_j(\lambda_i) = a_1\left[\lambda_1^{m-1} + d_1^{(j)}\lambda_1^{m-2} + \ldots + d_{m-1}^{(j)}\right] +$$
$$+ a_2\left[\lambda_2^{m-1} + d_1^{(j)}\lambda_2^{m-2} + \ldots + d_{m-1}^{(j)}\right] + \ldots$$
$$\ldots + a_m\left[\lambda_m^{m-1} + d_1^{(j)}\lambda_m^{m-2} + \ldots + d_{m-1}^{(j)}\right].$$

Теперь сгруппируем члены при одинаковых $d_k^{(j)}$, и так как a_i - решение системы (1.1), то предыдущее равенство можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i E_j(\lambda_i) = (a_1\lambda_1^{m-1} + \ldots + a_m\lambda_m^{m-1}) + d_1^{(j)}(a_1\lambda_1^{m-2} + \ldots + a_m\lambda_m^{m-2}) + \ldots$$
$$\ldots + d_{m-1}^{(j)}(a_1 + \ldots + a_m) = b_m + b_{m-1}d_1^{(j)} + \ldots + b_1 d_{m-1}^{(j)}.$$

Подставляя сюда значения $d_k^{(j)}$, вычисленные по формуле (1.5), получаем:

$$a_j E'(\lambda_j) = b_m + b_{m-1}[\lambda_j + d_1] + \ldots + b_k[\lambda_j^{m-k} + d_1\lambda_j^{m-k-1} + \ldots$$

$$\ldots + d_{m-k}] + \ldots + b_1 [\lambda_j^{m-1} + d_1 \lambda_j^{m-2} + \ldots + d_{m-1}] =$$

$$= (b_m + \lambda_j b_{m-1} + \ldots + \lambda_j^{m-k} b_k + \ldots + \lambda_j^{m-1} b_1) + \ldots$$

$$\ldots + d_{m-k} (b_k + b_{k-1}\lambda_j + \ldots + b_1 \lambda_j^{m-k}) + \ldots + d_{m-1} b_1 .$$

Отсюда, очевидно, следует формула (1.3).

2°. Применим теперь формулу (1.3) для решения конкретной системы.

Задача вычисления коэффициентов оптимальных в $L_2^{(m)*}(R_1)$ квадратурных формул с фиксированными узлами при равномерном разбиении отрезка интегрирования может быть сведена к решению линейной системы $(m-1)$-го порядка.

Пусть дана точная для многочленов степени ниже m квадратурная формула, функционал погрешности которой имеет наименьшую в $L_2^{(m)*}(R_1)$ норму при заданных узлах:

$$\int_{-\eta_1}^{N+\eta_2} f(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta] f[\beta], \tag{2.1}$$

$$0 \le \eta_1,\ \eta_2 < 1.$$

Как известно [1,2], чтобы найти коэффициенты $C_0[\beta]$, нужно решить следующее уравнение в свертках (разностное уравнение):

$$B_{2m-2}[\beta] * \hat{u}[\beta] = \begin{cases} \dfrac{(\beta+\eta_1)^{2m} + (N+\eta_2-\beta)^{2m}}{2\cdot(2m)!}, & 0 \le \beta \le N; \quad (2.2) \\[2ex] \dfrac{(N+\eta_2-\beta)^{2m} - (\beta+\eta_1)^{2m}}{2\cdot(2m)!} + Q_{m-1}^{(-)}[\beta], & \beta < 0; \quad (2.3) \\[2ex] \dfrac{(\beta+\eta_1)^{2m} - (N+\eta_2-\beta)^{2m}}{2\cdot(2m)!} + Q_{m-1}^{(+)}[\beta], & \beta > N. \quad (2.4) \end{cases}$$

Здесь $Q_{m-1}^{(-)}[\beta]$, $Q_{m-1}^{(+)}[\beta]$ - многочлены степени $m-1$ - неизвестны, $B_{2m-2}[\beta]$ - финитная функция целочисленного аргумента, имеющая отличные

от нуля значения лишь на отрезке $[-m+1, m-1]$, причем функция $B_{2m-2}[\beta] = \alpha^{(2m-2)}_{m-1+\beta}/(2m-1)!$, где $\alpha^{(2m-2)}_i$ – коэффициенты многочлена Эйлера степени $2m-2$, с определением и свойствами которых можно ознакомиться, например, в [3,4]. Свертка $B_{2m-2}[\beta] * \hat{u}[\beta]$ определяется равенством [5, гл.УП]:

$$B_{2m-2}[\beta] * \hat{u}[\beta] = \sum_{\gamma} B_{2m-2}[\gamma]\,\hat{u}[\beta-\gamma].$$

Тогда оптимальные коэффициенты выражаются через функцию $\hat{u}[\beta]$ следующим образом:

$$C_0[\beta] = \Delta_2^{(m)}[\beta] * \hat{u}[\beta],$$

где $\Delta_2^{(m)}[\beta] = \overbrace{\Delta_2[\beta] * \ldots * \Delta_2[\beta]}^{m\text{-раз}}$; $\Delta_2[\beta] = \delta[\beta+1] - 2\delta[\beta] + \delta[\beta-1]$.

Решением уравнения с правой частью (2.2) назовем функцию $\hat{u}[\beta]$, заданную на $[-m+1, N+m-1]$ и удовлетворяющую уравнению для $\beta \in [0, N]$, т.е.

$$B_{2m-2}[\beta] * \hat{u}[\beta] = \frac{(\beta+\eta_1)^{2m} + (N+\eta_2-\beta)^{2m}}{2\cdot(2m)!}. \tag{2.5}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\hat{u}[\beta] = \hat{u}_0[\beta] + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \lambda_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{m-1} d_i \lambda_i^{-\beta},$$

где λ_i, $\frac{1}{\lambda_i}$ – корни характеристического многочлена (т.е. многочлена Эйлера степени $2m-2$), $|\lambda_i| < 1$, а $\hat{u}_0[\beta]$ – частное решение уравнения (2.5). Очевидно, что $\hat{u}[\beta]$ можно записать так:

$$\hat{u}[\beta] = \hat{u}_0[\beta] + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \lambda_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i \lambda_i^{N-\beta}.$$

Тогда для $0 < \beta < N$ выполняется

$$C_0[\beta] = \Delta_2^{(m)} \hat{u}_0[\beta] + \sum_{i=1}^{m-1} a_i (\lambda_i - 1)^m \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right)^m \lambda_i^{\beta} + \sum b_i (\lambda_i - 1)^m \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right)^m \lambda_i^{N-\beta}. \tag{2.6}$$

Обозначим через $x^{[m]} = x(x-1)\cdot(x-m+1)$ ньютонову степень.

Лемма 1. *Функция*

$$\hat{u}_0[\beta] = \int_0^{\beta+\eta_1} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\,dx + \int_0^{N+\eta_2-\beta} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\,dx\,,$$

с точностью до постоянного слагаемого является частным решением уравнения (2.5).

Доказательство. Частное решение $\hat{u}_0[\beta]$ находим используя равенство Ворпицкого [6]

$$\sum_{i=0}^{2m-2} \alpha_i^{(2m-2)} \binom{x+i}{2m-1} = \sum_{i=0}^{2m-2} \alpha_i^{(2m-2)} \frac{(x+i)^{[2m-1]}}{(2m-1)!} = x^{2m-1}\,.$$

Если рассматривать это равенство в целочисленных точках, то это не что иное, как $B_{2m-2}[\beta] * (\beta+m-1)^{[2m-1]} = \beta^{2m-1}$. Непосредственной подстановкой проверяется, что

$$B_{2m-2}[\beta] * \int_0^{\beta+\eta} (x+m-1)^{[2m-1]}dx = \frac{(\beta+\eta)^{2m}}{2m} + C\,, \quad -1<\eta<1.$$

Действительно,

$$B_{2m-2}[\beta] * \int_0^{\beta+\eta} (x+m-1)^{[2m-1]}dx = \sum_{\gamma=-m+1}^{m-1} B_{2m-2}[\gamma] \int_0^{\beta+\eta-\gamma} (x+m-1)^{[2m-1]}dx =$$

$$= \sum_{\gamma=-m+1}^{m-1} \alpha_{m-1+\gamma}^{(2m-2)} \int_0^{\beta+\eta-\gamma} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{(2m-1)!}\,dx = \sum_{\gamma'=0}^{2m-2} \alpha_{\gamma'}^{(2m-2)} \int_0^{\beta+\eta+m-1-\gamma'} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{(2m-1)!}\,dx.$$

Сделаем замену переменных. В интеграле с коэффициентом $\alpha_{\gamma'}^{(2m-2)}$ замена будет такова: $y = x-(m-1)+\gamma'$. Тогда

$$\int_0^{\beta+\eta+m-1-\gamma'} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{(2m-1)!}\,dx = \int_{-(m-1)+\gamma'}^{\beta+\eta} \frac{(y+2(m-1)-\gamma')^{[2m-1]}}{(2m-1)!}\,dy,$$

откуда получаем:

$$\sum_{\gamma'=0}^{2m-2} \alpha_{\gamma'}^{(2m-2)} \int\limits_0^{\beta+\eta+m-1-\gamma'} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{(2m-1)!}\, dx =$$

$$= \sum_{\gamma'=0}^{2m-2} \alpha_{\gamma'}^{(2m-2)} \int\limits_0^{\beta+\eta} \frac{(y+2(m-1)-\gamma')^{[2m-2]}}{(2m-1)!}\, dy + \sum_{\gamma'=0}^{2m-2} \alpha_{\gamma'}^{(2m-2)} \int\limits_{-(m-1)+\gamma'}^{0} \frac{(y+2(m-1)-\gamma')^{[2m-1]}}{(2m-1)!}\, dy.$$

Вторая сумма постоянна, от β не зависит, обозначим ее через C. Пользуясь тем, что коэффициенты многочлена Эйлера обладают свойством $\alpha_{2m-2-\gamma}^{(2m-2)} = \alpha_{\gamma}^{(2m-2)}$, и учитывая тождество Ворпицкого, первую сумму в правой части предыдущего равенства перепишем так:

$$\sum_{\gamma'=0}^{2m-2} \alpha_{\gamma'}^{(2m-2)} \int\limits_0^{\beta+\eta} \frac{(y+2(m-1)-\gamma')^{[2m-1]}}{(2m-1)!}\, dy =$$

$$= \int\limits_0^{\beta+\eta} \sum_{\gamma'=0}^{2m-2} \alpha_{2m-2-\gamma'}^{(2m-2)} \binom{y+2m-2-\gamma'}{2m-1} dy = \int\limits_0^{\beta+\eta} y^{2m-1}\, dy = \frac{(\beta+\eta)^{2m}}{2m}.$$

Таким образом,

$$B_{2m-2}[\beta] * \int\limits_0^{\beta+\eta} (x+m-1)^{[2m-1]}\, dx = \frac{(\beta+\eta)^{2m}}{2m} + C.$$

Так как сумма коэффициентов многочлена Эйлера степени $2m-2$ равна $(2m-1)!$, то

$$B_{2m-2}[\beta] * \left\{ \int\limits_0^{\beta+\eta} (x+m-1)^{[2m-1]}\, dx - C \right\} = \frac{(\beta+\eta)^{2m}}{2m}.$$

При вычислении оптимальных коэффициентов участвуют разности $2m$-го порядка решений уравнения в свертках, поэтому постоянная C несущественна и мы ее в дальнейшем опускаем. Из предыдущего равенства и свойства свертки относительно сдвига

$$B_{2m-2}[\beta] * u[\beta-N] = (B_{2m-2} * u)[\beta-N]$$

следует, что

$$\hat{u}_0[\beta] = \int\limits_0^{\beta+l_1} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\,dx + \int\limits_0^{\beta-(N+l_2)} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\,dx \tag{2.7}$$

является частным решением уравнения

$$B_{2m-2}[\beta] * \hat{u}_0[\beta] = \frac{(\beta+l_1)^{2m}}{2\cdot(2m)!} + \frac{(\beta-l_2-N)^{2m}}{2\cdot(2m)!}.$$

Так как

$$\int\limits_0^{\beta-(N+l_2)} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\,dx = \int\limits_0^{N+l_2-\beta} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\,dx,$$

мы будем употреблять оба эти интеграла. Лемма доказана.

Решение уравнения с правой частью (2.3) - это функция, определенная на $(-\infty, m-1]$ и удовлетворяющая на $(-\infty, 0]$ уравнению. Ищем решение в виде многочлена степени $2m-1$, так как $C_0[\beta] = \Delta_2^{(m)}[\beta] * \hat{u}[\beta] = 0,\ \beta < 0$. Правая часть уравнения - многочлен степени $2m-1$, значит, единственным полиномиальным решением на полубесконечном интервале будет многочлен той же степени, который мы можем вычислить с точностью до многочлена степени $m-1$ (правая часть задана с точностью до многочлена степени $m-1$). Обозначим это решение $\hat{Q}^{(-)}_{2m-1}[\beta]$.

$$\hat{Q}^{(-)}_{2m-1}[\beta] = \int\limits_0^{N+l_2-\beta} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\,dx - \int\limits_0^{\beta+l_1} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\,dx + \hat{Q}^{(-)}_{m-1}[\beta]. \tag{2.8}$$

Аналогично для полуоси $[N, \infty)$ функция, заданная на $[N-m+1, \infty)$ и удовлетворяющая на $[N, \infty)$ уравнению с правой частью (2.4), - это многочлен степени $2m-1$. Обозначим его через $\hat{Q}^{(+)}_{2m-1}[\beta]$. Он равен:

$$\hat{Q}^{(+)}_{2m-1}[\beta] = \int\limits_0^{\beta+l_1} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\,dx - \int\limits_0^{N+l_2-\beta} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\,dx + Q^{(+)}_{m-1}[\beta], \tag{2.9}$$

$\hat{Q}^{(-)}_{m-1}[\beta]$ и $\hat{Q}^{(+)}_{m-1}[\beta]$ - многочлены степени $m-1$ - неопределены.

Потребуем, чтобы на общих интервалах наши решения совпадали, т.е.

$$\hat{u}_0[\beta] + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \lambda_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i \lambda_i^{N-\beta} = \hat{Q}^{(-)}_{2m-1}[\beta] \qquad (2.10)$$

для $-(m-1) \leq \beta \leq m-1$ и

$$\hat{u}_0[\beta] + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \lambda_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i \lambda_i^{N-\beta} = \hat{Q}^{(+)}_{2m-1}[\beta] \qquad (2.11)$$

для $N-(m-1) \leq \beta \leq N+(m-1)$.

Мы получили здесь $4m-2$ уравнения с $(4m-2)$ неизвестными, а именно неизвестными являются: два многочлена $\hat{Q}^{(-)}_{m-1}[\beta]$, $\hat{Q}^{(+)}_{m-1}[\beta]$ и коэффициенты a_i и b_i. Но так как для вычисления оптимальных коэффициентов достаточно знать только a_i и b_i, то исключим неизвестные многочлены степени $m-1$.

Переписав уравнения (2.10) и (2.11), подставив в них вычисленные нами ранее значения $\hat{u}_0[\beta]$, $\hat{Q}^{(-)}_{2m-1}[\beta]$, $\hat{Q}^{(+)}_{2m-1}[\beta]$, получим:

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_i \lambda_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i \lambda_i^{N-\beta} = -\int_0^{\beta+\eta_1} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{(2m-1)!}\,dx + \hat{Q}^{(-)}_{m-1}[\beta],$$

$$-(m-1) \leq \beta \leq m-1;$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_i \lambda_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i \lambda_i^{N-\beta} = -\int_0^{N+\eta_2-\beta} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{(2m-1)!}\,dx + \hat{Q}^{(+)}_{m-1}[\beta],$$

$$N-(m-1) \leq \beta \leq N+m-1.$$

Теперь в первой группе уравнений возьмем разности m-го порядка "назад" в точках $\beta=1,\dots,m-1$, т.е.

$$\Delta^m_-[\beta] = \overbrace{\Delta_-[\beta] * \dots * \Delta_-[\beta]}^{m\text{-раз}}; \qquad \Delta_-[\beta] = \delta[\beta] - \delta[\beta-1],$$

или

$$\Delta^m_-[\beta] * f[\beta] = \sum_{K=0}^{m} (-1)^K C^K_m f[\beta-K].$$

Во второй группе уравнений возьмем разности m-го порядка "вперед" в точках $\beta = N-(m-1),\dots,N-1$:

$$\Delta_+^m[\beta] = \overbrace{\Delta_+[\beta] * \ldots * \Delta_+[\beta]}^{m\text{-раз}}; \quad \Delta_+[\beta] = \delta[\beta+1] - \delta[\beta],$$

или

$$\Delta_+^m[\beta] * f[\beta] = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^{m-k} f[\beta+k],$$

а также сделаем замену переменных $\beta' = N - \beta$.

Предыдущая система примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_i \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right)^m \lambda_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i (1-\lambda_i)^m \lambda_i^{N-\beta} = k_\beta^{(m)}, \tag{2.12}$$

$$\beta = 1, \ldots, m-1;$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_i (\lambda_i - 1)^m \lambda_i^{N-\beta'} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i \left(\frac{1}{\lambda_i} - 1\right)^m \lambda_i^{\beta'} = g_{\beta'}^{(m)}, \tag{2.13}$$

$$\beta' = 1, \ldots, m-1,$$

где $K_\beta^{(m)} = -\int\limits_0^{\beta+\eta_1} \frac{(x-1)^{[m-1]}}{(m-1)!} dx - \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^{[m]}}{m!} dx; \quad g_{\beta'}^{(m)} = -\int\limits_0^{-\beta-\eta_1} \frac{(x+m-1)^{[m-1]}}{(m-1)!} dx - \int\limits_0^1 \frac{(x+m-1)^{[m]}}{m!} dx.$

Отметим, что при вычислении разностей от $\int\limits_0^{\beta+\eta} f(x)dx$ мы использовали следующие легкопроверяемые равенства:

$$\Delta_+^m[\beta] * \int\limits_0^{\beta+\eta} f(x)dx = \int\limits_0^{\beta+\eta} \Delta_+^m(x) * f(x)dx + \int\limits_0^1 \Delta_+^{m-1}(x) * f(x)dx,$$

$$\Delta_-^m[\beta] * \int\limits_0^{\beta-\eta} f(x)dx = \int\limits_0^{\beta+\eta} \Delta_-^m(x) * f(x)dx + \int\limits_{-1}^0 \Delta_-^{m-1}(x) * f(x)dx.$$

Итак, получается

Лемма 2. *Величины a_i и b_i в разложении оптимальных коэффициентов $C_0[\beta]$ по степеням λ_i должны удовлетворять системе линейных уравнений (2.12), (2.13).*

Эта система однозначно разрешима [2, стр.468]. Заметим, что в случае $\eta_1 = \eta_2$ имеет место:

$$K_\beta^{(m)} = (-1)^m g_\beta^{(m)}. \tag{2.14}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно в интегральном выражении для $K_\beta^{(m)}$ сделать замену переменных $x = -y$.

Лемма 3. *Величины $K_\beta^{(m)}$ и $g_\beta^{(m)}$ удовлетворяют следующим рекуррентным*

соотношениям:

$$K_\beta^{(m)} = K_{\beta-1}^{(m)} + K_{\beta-1}^{(m-1)}\ ; \qquad g_\beta^{(m)} = g_{\beta-1}^{(m)} - g_{\beta-1}^{(m-1)}\ . \tag{2.15}$$

Докажем первое из них, второе, очевидно, будет следовать из него и из равенства (2.14).

$$K_{\beta-1}^{(m)} + K_{\beta-1}^{(m-1)} = -\int\limits_0^{\beta-1+\ell_1} \frac{(x-1)^{[m-1]}}{(m-1)!}\,dx - \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^{[m]}}{m!}\,dx - \int\limits_0^{\beta-1+\ell_1} \frac{(x-1)^{[m-2]}}{(m-2)!}\,dx - \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^{[m-1]}}{(m-1)!}\,dx.$$

Так как
$$\frac{(x-1)^{[m-1]}}{(m-1)!} = \frac{x^{[m-1]}}{(m-1)!} - \frac{(x-1)^{[m-2]}}{(m-2)!}\ ,$$

то предыдущее равенство можно переписать таким образом:

$$K_{\beta-1}^{(m)} + K_{\beta-1}^{(m-1)} = -\int\limits_0^{\beta-1+\ell_1} \frac{x^{[m-1]}}{(m-1)!}\,dx - \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^{[m]}}{m!}\,dx - \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^{[m-1]}}{(m-1)!}\,dx =$$
$$= -\int\limits_{-1}^{\beta-1+\ell_1} \frac{x^{[m-1]}}{(m-1)!}\,dx - \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^{[m]}}{m!}\,dx = -\int\limits_0^{\beta+\ell_1} \frac{(x-1)^{[m-1]}}{(m-1)!}\,dx - \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^{[m]}}{m!}\,dx = K_\beta^{(m)}.$$

Лемма доказана.

Из равенств (2.15) вытекают следующие формулы для $K_\beta^{(m)}$ и $g_\beta^{(m)}$:

$$K_\beta^{(m)} = \sum_{j=0}^{\beta-1} C_{\beta-1}^{j}\, K_1^{(m-j)}\ , \tag{2.16}$$

$$g_\beta^{(m)} = \sum_{j=0}^{\beta-1} (-1)^j C_{\beta-1}^{j}\, g_1^{(m-j)}. \tag{2.16'}$$

Теперь возьмем N достаточно большим, чтобы можно было пренебречь слагаемыми, содержащими λ_i^N . Тогда система (2.12) , (2.13) распадается на две линейные системы с матрицами Вандермонда:

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_i' \lambda_i^\beta = K_\beta^{(m)}, \qquad \beta = 1, \dots, m-1\,; \tag{2.17}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} b_i' \lambda_i^\beta = (-1)^m g_\beta^{(m)}, \qquad \beta = 1, \dots, m-1, \tag{2.17'}$$

где $a_i' = a_i\left(1-\frac{1}{\lambda_i}\right)^m; \quad b_i' = b_i\left(1-\frac{1}{\lambda_i}\right)^m.$

Матрица у обеих систем одна и та же, только правые части разные при $\gamma_1 \neq \gamma_2$, поэтому достаточно рассмотреть одну из систем (2.17). Применим формулу (1.3) для решения системы (2.17) :

$$a_i' = \frac{\sum_{j=0}^{m-2} d_j \sigma_{m-1-j}^{(i)}}{\lambda_i E_-'(\lambda_i)}, \tag{2.18}$$

здесь d_j - коэффициенты так называемого "полуэйлеровского" многочлена $E_-(\lambda)$, т.е. многочлена степени $m-1$, корнями которого являются те корни многочлена Эйлера степени $2m-2$, абсолютные величины которых меньше единицы $|\lambda_i|<1$. Преобразуем теперь величины $\sigma_{m-1-j}^{(i)}$, используя свойство (2.15) для правой части $K_\beta^{(m)}$, или, что то же самое, формулу (2.16):

$$\sigma_j^{(i)} = K_j^{(m)} + \ldots + K_{j-\ell}^{(m)}\lambda_i^\ell + \ldots + K_1^{(m)}\lambda_i^{j-1} =$$

$$= K_1^{(m)} + C_{j-1}^1 K_1^{(m-1)} + \ldots + C_{j-1}^t K_1^{(m-t)} + \ldots + C_{j-1}^{j-1} K_1^{(m-j+1)} + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_i^\ell\left[K_1^{(m)} + C_{j-\ell-1}^1 K_1^{(m-1)} + \ldots + C_{j-\ell-1}^{j-\ell-1} K_1^{(m-j-\ell+1)}\right] + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_i^{j-2}\left[K_1^{(m)} + K_1^{(m-1)}\right] + \lambda_i^{j-1} K_1^{(m)}.$$

Перепишем это равенство, собирая члены при одинаковых $K_1^{(t)}$:

$$\sigma_j^{(i)} = K_1^{(m)}\left[1+\lambda_i+\ldots+\lambda_i^{j-1}\right] + K_1^{(m-1)}\left[C_{j-1}^1+\ldots+C_{j-\ell-1}^1\lambda_i^\ell+\ldots+\lambda_i^{j-2}\right]+\ldots$$

$$\ldots + K_1^{(t)}\left[C_{j-1}^t + C_{j-2}^t\lambda_i + \ldots + C_t^t\lambda_i^{j-1-t}\right] + \ldots + K_1^{m-(j-1)} C_{j-1}^{j-1}.$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках можно преобразовать следующим образом:

$$C_{j-1}^t + \lambda_i C_{j-2}^t + \ldots + \lambda_i^{j-1-t} C_t^t =$$

$$=\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dx^t}\left[x^{j-1}+\lambda_i x^{j-2}+\ldots+x^t\lambda_i^{j-1-t}+\ldots+\lambda_i^{j-1}\right]_{x=1}=$$

$$=\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dx^t}\left[\frac{x^j-\lambda_i^j}{x-\lambda_i}\right]_{x=1}.$$

Тогда $\sigma_j^{(i)}$ можно записать в таком виде:

$$\sigma_j^{(i)}=K_1^{(m)}\frac{1-\lambda_i^j}{1-\lambda_i}+\frac{K_1^{(m-1)}}{1!}\frac{d}{dx}\left[\frac{x^j-\lambda_i^j}{x-\lambda_i}\right]_{x=1}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{K_1^{(m-t)}}{t!}\frac{d^t}{dx^t}\left[\frac{x^j-\lambda_i^j}{x-\lambda_i}\right]_{x=1}+\ldots+\frac{K_1^{(m-j+1)}}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}\left[\frac{x^j-\lambda_i^j}{x-\lambda_i}\right]_{x=1}=$$

$$=\left(\sum_{t=0}^{j-1}\frac{K_1^{(m-t)}}{t!}\frac{d^t}{dx^t}\right)\frac{x^j-\lambda_i^j}{x-\lambda_i}\bigg|_{x=1}.$$

Подставив это выражение для $\sigma_j^{(i)}$ в числитель формулы (2.18) , получим:

$$\sum_{j=0}^{m-2}d_j\sigma_{m-1-j}=\sum_{j=0}^{m-2}d_j\left(\sum_{t=0}^{m-j-2}\frac{K_1^{(m-t)}}{t!}\frac{d^t}{dx^t}\right)\frac{x^{m-1-j}-\lambda_i^{m-1-j}}{x-\lambda_i}\bigg|_{x=1}=$$

$$=\sum_{t=0}^{m-2}\frac{K_1^{(m-t)}}{t!}\frac{d^t}{dx^t}\left[\sum_{j=0}^{m-t-2}d_j\frac{x^{m-1-j}-\lambda_i^{m-1-j}}{x-\lambda_i}\right]_{x=1}.$$

Легко видеть, что при $t\neq 0$ имеет место

$$\frac{d^t}{dx^t}\left[\sum_{j=0}^{m-t-2}d_j\frac{x^{m-1-j}-\lambda^{m-1-j}}{x-\lambda_i}\right]=\frac{d^t}{dx^t}\left[\sum_{j=0}^{m-2}d_j\frac{x^{m-1-j}-\lambda_i^{m-1-j}}{x-\lambda_i}\right]$$

(мы добавили слагаемые, степень которых ниже t) . Далее в каждой квадратной скобке прибавим и вычтем $\frac{d_{m-1}}{x-\lambda_i}$, получим

$$\sum_{j=0}^{m-2}d_j\sigma_{m-1-j}^{(i)}=\sum_{t=0}^{m-2}\frac{K_1^{(m-t)}}{t!}\frac{d^t}{dx^t}\left[\sum_{j=0}^{m-1}d_j\frac{x^{m-1-j}}{x-\lambda_i}-\right.$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1} d_j \frac{\lambda_i^{m-1-j}}{x-\lambda_i}\Bigg]_{x=1} .$$

Так как λ_i - корень многочлена $E_-(\lambda)$, а вторая сумма внутри скобок $E_-(\lambda_i)/(x-\lambda_i) \equiv 0$, то имеем:

$$\sum_{j=0}^{m-2} d_j \sigma_{m-1-j}^{(i)} = \sum_{t=0}^{m-2} \frac{K_1^{(m-t)}}{t!} \frac{d^t}{dx^t}\left(\frac{E_-(x)}{x-\lambda_i}\right)_{x=1} .$$

Итак, мы показали, что a_i' - решение системы (2.17) - имеет следующий вид:

$$a_i' = \frac{\sum_{t=0}^{m-2} \frac{K_1^{(m-t)}}{t!} \frac{d^t}{dx^t}\left(\frac{E_-(x)}{x-\lambda_i}\right)_{x=1}}{\lambda_i E_-'(\lambda_i)} , \qquad (2.19)$$

где

$$K_1^{(m-t)} = -\int_0^{1+\eta_1} \frac{(x-1)^{[m-t-1]}}{(m-t-1)!}\, dx - \int_{-1}^{0} \frac{x^{[m-t]}}{(m-t)!}\, dx . \qquad (2.20)$$

Точно так же получаем, что

$$b_i' = \frac{(-1)^m \sum_{t=0}^{m-2} \frac{(-1)^t g_1^{(m-t)}}{t!} \frac{d^t}{dx^t}\left(\frac{E_-(x)}{x-\lambda_i}\right)_{x=1}}{\lambda_i E_-'(\lambda_i)} , \qquad (2.21)$$

где

$$g_1^{(m-t)} = -\int_0^{-1-\eta_2} \frac{(x+m-t-1)^{[m-t-1]}}{(m-t-1)!}\, dx - \int_0^{1} \frac{(x+m-t-1)^{[m-t]}}{(m-t)!}\, dx . \qquad (2.22)$$

Теперь с учетом леммы 2 и формул (2.19) -(2.22) нетрудно доказать основной результат нашей работы.

Теорема. *При достаточно большом N приближенные значения оптимальных коэффициентов имеют следующий вид:*

$$C_0[\beta] = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} a_i^{(0)} \lambda_i^{\beta}, \qquad a_i^{(0)} = a_i'(\lambda_i - 1)^m$$

для $\beta > 0$ *вблизи левого конца* $[0, N]$;

$$C_0[\beta] = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_i^{(0)} \lambda_i^{N-\beta}, \qquad b_i^{(0)} = b_i'(\lambda_i - 1)^m$$

для $\beta < N$ *вблизи правого конца* $[0, N]$ *, где* a_i' *и* b_i' *вычисляются по формулам (2.19) , (2.21).*

Это утверждение следует из представления оптимальных коэффициентов $C_0[\beta]$ по формуле (2.6) , т.е.

$$C_0[\beta] = \Delta_2^{(m)}[\beta] * \hat{u}_0[\beta] + \sum_{i=1}^{m-1} a_i(\lambda_i - 1)^m \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right)^m \lambda_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i(\lambda_i - 1)^m \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right)^m \lambda_i^{N-\beta}.$$

Легко видеть, что $\Delta_2^{(m)}[\beta] * \hat{u}_0[\beta] = 1$. В самом деле,

$$\Delta_2^{(m)}[\beta] * \left\{ \int_0^{\beta+\eta_1} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\, dx + \int_0^{\beta-N-\eta_2} \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2(2m-1)!}\, dx \right\} = \Delta_+^{2m}[\beta+m] * \{\ldots\} =$$
$$= \int_0^{\beta+\eta_1} \Delta_+^{2m}(x+m) \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\, dx + \int_0^{\beta-N-\eta_2} \Delta_+^{2m}(x+m) \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2(2m-1)!}\, dx +$$
$$+ 2\int_0^{1} \Delta_+^{2m-1}(x+m) \frac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}\, dx = 1.$$

Коэффициенты a_i и b_i по лемме 2 должны удовлетворять системе (2.12) , (2.13). При большом N эта система переходит в систему (2.17) , (2.17$'$), решение которой мы выписали по формулам (2.19) - (2.22) . В этом смысле мы и понимаем приближенные значения оптимальных коэффициентов.

При вычислении $C_0[0]$ мы должны знать решение сверточного уравнения на отрезке $[-m, m]$, чтобы взять симметрическую разность $2m$-го порядка в нуле, но на этом отрезке у нас нет единого представления решения сверточного уравнения, поэтому в точке $\beta=0$ мы вычисляем $C_0[0]$, используя различные представления решения для $\beta \geqslant -m+1$ и для $\beta \leqslant m-1$ и то, что $\Delta_2^{(m)}[\beta]$ можно представить как $\Delta_2^{(m)}[\beta] = \Delta_-^{2m-1}[\beta+m] - \Delta_-^{2m-1}[\beta+m-1]$.

Обозначим $\varphi(x)=\dfrac{(x+m-1)^{[2m-1]}}{2\cdot(2m-1)!}$, тогда для $C_0[0]$ имеем:

$$C_0[0]=\left(\Delta_-^{2m-1}*\hat{u}\right)[m]-\left(\Delta_-^{2m-1}*\hat{Q}^{(-)}_{2m-1}\right)[m-1]=$$

$$=\Delta_-^{2m-1}[\beta]*\left\{\int_0^{\beta+\eta_1}\varphi(x)dx+\int_0^{\beta-N-\eta_2}\varphi(x)dx+\sum_{i=1}^{m-1}a_i\lambda_i^{\beta}+\sum_{i=1}^{m-1}b_i\lambda_i^{N-\beta}\right\}_{\beta=m}-$$

$$-\Delta_-^{2m-1}[\beta]*\left\{\int_0^{\beta-N-\eta_2}\varphi(x)dx-\int_0^{\beta+\eta_1}\varphi(x)dx\right\}_{\beta=m-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{m+\eta_1}dx+\int_0^{m-N-\eta_2}dx-\int_0^{m-1-N-\eta_2}dx+\int_0^{m-1+\eta_1}dx\right\}+$$

$$+\int_{-1}^{0}(x-m+1)dx+\sum_{i=1}^{m-1}a_i\left(1-\frac{1}{\lambda_i}\right)^{2m-1}\lambda_i^m+\sum_{i=1}^{m-1}b_i(1-\lambda_i)^{2m-1}\lambda_i^{N-m}.$$

Отбрасывая члены, содержащие λ_i^N , получаем:

$$C_0[0]=\frac{m+\eta_1+m-N-\eta_2-(m-1)+N+\eta_2+m-1+\eta_1}{2}-\left(m-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}a_i\left(1-\frac{1}{\lambda_i}\right)^{m}(\lambda_i-1)^m\frac{\lambda_i}{\lambda_i-1}=\frac{1}{2}+\eta_1+\sum_{i=1}^{m-1}a_i^{(0)}\frac{\lambda_i}{\lambda_i-1}\ .$$

Точно так же для $C_0[N]$ имеем

$$C_0[N]=\frac{1}{2}+\eta_2+\sum_{i=1}^{m-1}b_i^{(0)}\frac{\lambda_i}{\lambda_i-1}\ .$$

В заключение отметим, что для $\eta_1=\eta_2=0$ оптимальные коэффициенты несколько другим способом были вычислены в работе [7].

Литература

1. Соболев С.Л. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул. - Докл. АН СССР, 1977, т.235, I, с. 34-35.
2. Sobolev S.L. Les coefficients optimaux des formules d'integration approximative. - Ann.Scuola Normale Superiore-Pisa, Classe di Scienze, Serie IV, 1978, v. V, № 3, p.455-469.
3. Frobenius . Über die Bernoullischen und Eulerschen Polynome. - Sitzungs-

berichte der Preussische Akademie des Wissenschaft, 1910, p.809-847.
4. Carlitz L. Eulerian Numbers and Polynomials. - Math. magazine, 1959, v. 32, No 5, p. 247-260.
5. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул, Наука, 1974, с. 808.
6. Worpitzky J. Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen. - Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1883, v.94, p.203-232.
7. Загирова Ф.Я. О построении оптимальных квадратурных формул с равноотстоящими узлами. - Новосибирск, Б.И., 1982. - Препринт ИМ СО АН СССР, 25, с.27.