УДК 517.946

ОЦЕНКИ АППРОКСИМАТИВНЫХ ЧИСЕЛ ВЛОЖЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА С ВЕСОМ

К.Т. Мынбаев (Алма-Ата)

Работа посвящена оценкам сверху аппроксимативных чисел (a -чисел) вложения пространства $\overset{\circ}{W}(\Omega)=\overset{\circ}{W}{}_p^{\kappa}(\Omega,u,v)$, полученного пополнением множества $C_0^{\infty}(\Omega)$ вещественных финитных бесконечно гладких в Ω функций по норме

$$\|f\|^p_{\overset{\circ}{W}(\Omega)}=\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^n\left|u_j^{\kappa_j}(x)\frac{\partial^{\kappa_j}f}{\partial x_j^{\kappa_j}}\right|^p+|v(x)f|^p\right)dx, \tag{1}$$

в пространство $L_{q,r}(\Omega)$ с нормой

$$\|f\|^q_{L_{q,r}(\Omega)}=\int_\Omega|r(x)f|^q\,dx. \tag{2}$$

Задачи об оценке a -чисел естественным образом возникают в спектральной теории дифференциальных операторов и в теории аппроксимации. В настоящее время известно много работ по оценкам a -чисел и близких к ним характеристик вложений анизотропных пространств различного типа (см., например, библиографию в [1]). Методы этих работ применимы только для пространств с весами степенного поведения. В изотропном случае имеются оценки a -чисел, поперечников по Колмогорову, по Гельфанду и др. при довольно общих условиях на веса [2-6]. Здесь мы распространяем на анизотропную ситуацию

методы и результаты [5-6] .

Пусть B_1, B_2 - банаховы пространства, $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ - множество линейных ограниченных операторов, действующих из B_1 в B_2, $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$. Число

$$a_m(A) = \inf\left\{\|A-K\|_{B_1 \to B_2} : K \in \mathcal{L}(B_1, B_2),\ \dim K < m\right\}.$$

назовем m - м a-числом оператора A .

Здесь m - натуральное, $\dim K$ - размерность образа оператора K. По определению, $a_0(A) = \|A\|_{B_1 \to B_2}$. Очевидно, последовательность $\{a_m(A)\}$ не возрастает. Если $\overset{\circ}{W}(\Omega)$ вложено в $L_{q,\tau}(\Omega)$, то числа $a_m = a_m(E)$, $m \geqslant 0$, где E - оператор вложения, будем называть a-числами вложения $\overset{\circ}{W}(\Omega) \hookrightarrow L_{q,\tau}(\Omega)$. Функция распределения a-чисел $N(\lambda, E)$, по определению, равна $\operatorname{card}\{m : a_m \geqslant \lambda\}$, $\lambda > 0$ (здесь учитывается кратность чисел a_m). Эта функция не возрастает, причем $N(\lambda, E) = 0$ при $\lambda > a_0$. Вместо самих a-чисел достаточно оценивать их функцию распределения, так как если $N(\lambda, E) \leqslant \varphi(\lambda)$ для некоторой непрерывной убывающей функции φ, то $a_m \leqslant \varphi^{-1}(m)$ при всех $m > \inf\limits_{\lambda > 0} \varphi(\lambda)$, где φ^{-1}- обратное отображение. Среди всех аппроксимативных характеристик вложений [1] наибольшими являются a-числа, поэтому из оценок сверху a-чисел немедленно вытекают верхние оценки, например, поперечников по Колмогорову.

Применяемый нами метод позволяет доказывать теоремы вложения, компактность вложения, оценки a-чисел. Все оценки даются в терминах весовых функций, причем иногда верны окончательные двусторонние оценки. В одномерном случае подтверждение этому можно найти в [5] ; вопрос о точности получаемых ниже оценок будет рассмотрен в другой работе. В настоящей работе ослаблены требования к гладкости весов, особенно к гладкости функции τ, множество Ω может быть неограниченным (см. теорему 4). Также ослаблены требования к геометрии множества Ω и его границы $\partial\Omega$. Можно получать оценки a-чисел вложения в $L_{q,\tau}(\Omega)$ множества локально суммируемых функций с конечной нормой (1) , где производные понимаются в обобщенном смысле (теорема 5). Множество таких функций мы будем обозначать через

$L_p^{\kappa}(\Omega) = L_p^{\kappa}(\Omega, u, v)$. Теоремы 2 и 3 - основные. Теоремы 4-6 являются далеко не единственно возможными примерами их применения.

Ниже мы будем использовать следующие обозначения:

Ω - открытое подмножество R^n;

$\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ - натуральные числа;

$D^{\kappa_j} = \partial^{\kappa_j}/\partial x_j^{\kappa_j}$, $d^{1/\kappa} = (d^{1/\kappa_1}, \ldots, d^{1/\kappa_n})$ при $d>0$,

$\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$.

Всюду далее полагаем:

$$0 \leq v \in L_q^{loc}(\Omega),\ 0 \leq v \in L_p^{loc}(\Omega),\ u_j^{\kappa_j} \in L_p^{loc}(\Omega),\ j = \overline{1,n},$$

$u_1, \ldots, u_n$ положительны и конечны в Ω, $u = (u_1, \ldots, u_n)$,

$$1 < p \leq q < \infty,\ \delta(p,q) \equiv 1 - (1/p - 1/q) \sum 1/\kappa_j > 0;$$

функции $v \in L_q^{loc}(\Omega)$ и $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$ вне Ω продолжаются нулем.

При $0 < a_1, \ldots, a_n < \infty$, $x \in R^n$, через $Q(a,x)$ обозначаем параллелепипед

$$Q(a,x) = \{ y \in R^n : |y_j - x_j| < a_j/2,\ j = \overline{1,n} \}.$$

Если $a = (c, \ldots, c)$, $x = 0$, то для краткости полагаем $Q(a,x) = Q_c$. Величину $|f; L_p(\Omega)|$ записываем иногда как $\|f\|_{p,\Omega}$. Сумму и произведение без указания пределов берем по j от 1 до n. При $a, b \in R^n$ считаем $a \cdot b = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$. Буквой C с индексами или без них будем обозначать различные постоянные, точное значение которых для нас несущественно. Зависимость постоянных от параметров κ, p, q, n отмечаться не будет.

Перейдем к изложению результатов.

Емкостью компакта $e \subset \overline{Q}_1$ относительно Q_2 называется число

$$cap(e, Q_2) = \inf \left\{ \sum \int_{Q_2} |D^{\kappa_j} f|^p dt : f \in C_0^{\infty}(Q_2),\right.$$

$\left. f \geq 1 \text{ на } e \right\}$, здесь $cap(\phi, Q_2) = 0$, по определению. Совокупность компактов $e \subset \overline{Q}_1$, удовлетворяющих неравенству $cap(e, Q_2) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0,1)$, обозначаем через $N_{\varepsilon}(Q_1)$. Доказательства всех используемых ниже свойств емкости вполне аналогичны изложенным в [7] для изотропного случая.

Во всех дальнейших построениях центральную роль играет функция V^*, впервые введенная М.Отелбаевым [2] для изучения вложений изотропных пространств Соболева. Анизотропный вариант V^* и лемма 1 ниже приведены в [8].

Определение функции V^*. Пусть $R(\kappa^-,Q_1)$ - множество вещественных многочленов $R(y)$ степени не выше κ_j-1 по переменной y_j, $j=\overline{1,n}$, таких, что $1/2\le\|R\|_{p,Q_1}\le 2$. Положим $[R(y)]_\gamma=1$, если $|R(y)|\ge\gamma$, $[R(y)]_\gamma=0$ в противном случае. При $0<d<\infty$, $x\in\Omega$, $\varepsilon,\gamma\in(0,1)$ введем величину

$$M_{\varepsilon,\gamma}(x,d)=\inf\Big\{\int_{Q_1\setminus e}\sigma^p(u(x)\cdot d^{1/\kappa}\cdot y+x)[R(y)]_\gamma dy:$$

$$e\in N_\varepsilon(Q_1),\ R\in R(\kappa^-,Q_1)\Big\}, \tag{3}$$

где, по определению, интеграл равен $+\infty$, если

$\{y\in Q_1:|R(y)|\ge\gamma\}\setminus(e\cup\Omega_{x,d})\ne\emptyset$, $\Omega_{x,d}$ - образ Ω при отображении $y=y(t)=u^{-1}(x)\cdot d^{-1/\kappa}\cdot(t-x)$. Наконец,

$$V^*(x)=V^*_{\varepsilon,\gamma}(x)=\sup\{d>0:d^{-p}\ge M_{\varepsilon,\gamma}(x,d)\}. \tag{4}$$

При необходимости зависимость $V^*_{\varepsilon,\gamma}$ от σ будем указывать явно. Функция V^* позволяет для каждого $x\in\Omega$ найти такой параллелепипед $Q(a(x),x)$, на котором весовая соболевская норма функции $f\in C_0^\infty(\Omega)$ оценивается снизу через невесовую.

Лемма 1. *Пусть при некоторых достаточно малых* ε,γ *в данной точке* $x\in\Omega$ *функция* $V^*_{\varepsilon,\gamma}(x)$ *положительна и конечна. Определим вектор* $a(x)$ *равенством*

$$a(x)=u(x)\cdot V^*_{\varepsilon,\gamma}(x)^{1/\kappa}. \tag{5}$$

Если при некотором $T>1$

$$u_j(x)\le Tu_j(t),\quad t\in Q(a(x),x)\cap\Omega,$$

то справедливо неравенство

$$\int_{Q(a(x),x)\cap\Omega}\Big(\sum|u_j^{\kappa_j}(t)D^{\kappa_j}f|^p+|\sigma(t)f|^p\Big)dt\ge$$

$$\geqslant c \int\limits_{Q(a(x),x)} \left(\sum |u_j^{\kappa_j}(x) D^{\kappa_j} f|^p + \left| \frac{f}{V^*_{\varepsilon,\gamma}(x)} \right|^p \right) dt,$$

где $C=C(\varepsilon,\gamma,T)$ *не зависит от* $f\in C_0^\infty(\Omega)$ *и* $x\in\Omega$.

Определение. Пусть $I_a=\{Q(a(x),x):\ x\in\Omega\}$ - некоторое покрытие Ω параллелепипедами. Будем писать $u\in M_T(I_a)$ $(T>1)$ и говорить, что (векторный) вес u медленно меняется на покрытии I_a, если при всех $x\in\Omega$ выполняется условие:

$$T^{-1}\leqslant u_j(x)/u_j(t)\leqslant T,\ j=\overline{1,n},\ t\in Q(a(x),x)\cap\Omega. \tag{6}$$

Далее везде будем считать, что выполняются условия:

А) при некоторых достаточно малых ε,γ функция $V^*_{\varepsilon,\gamma}$ конечна и положительна в Ω;

Б) вес $u\in M_T(I_a)$, где $a(x)$ определено равенством (5) при всех $x\in\Omega$.

Замечание 1. При $\sum 1/\kappa_j<p$ условие А выполняется, например, если Ω ограничено. При $\sum 1/\kappa_j\geqslant p$ условие А также выполняется, если, например, Ω ограничено и $v\in L_\infty^{loc}(\Omega)$. (Ниже лемма 10 дает пример вычисления V^*. Примеры совсем другого рода имеются в [2] - изотропный случай).

Замечание 2. Если $\kappa_1=\ldots=\kappa_n=\ell$, $u_1=\ldots=u_n$, то имеет место эквивалентность

$$V^*_{\varepsilon,\gamma}(x)\sim\mu(x)^{-1/p}\left[d_x^{\varepsilon,\gamma}\left(\frac{v}{\mu}\right)\right]^\ell,$$

константы которой зависят от числа T из условия Б.

Замечание 3. Предположим, что функции u, v удовлетворяют следующему условию

В) они положительны и конечны в Ω, существует $T>1$ такое, что при всех $x\in\Omega$ имеет место $Q(\tilde a(x),x)\subset\Omega$, где $\tilde a(x)=u(x)\cdot(Tv(x))^{-1/\kappa}$ - условие погружения и $u,v\in M_T(I_{\tilde a})$ - условие медленного изменения на покрытии $I_{\tilde a}$. Тогда функция $V(x)=(Tv(x))^{-1}$ с успехом выполняет роль

функции $V^*(x)$. Действительно, для всех $f\in L_p^\kappa(\Omega)$ выполнение неравенства леммы 1 с V и $\tilde{a}$ вместо V^* и a очевидно (обозначение см. в начале работы). Выполнение А, Б для V и $I_{\tilde{a}}$ вместо V^* и I_a вытекает из В.

Определение функции $A(x,d)$. Обозначим $\delta(p)=1-\sum 1/(p\kappa_j)$; $\Pi(x,d)$ - множество всех параллелепипедов вида $Q^\mu=Q(u(x)\cdot\mu^{1/\kappa}y),\ 0<\mu\leqslant d,\ y\in R^n$, содержащихся в $Q(u(x)\cdot d^{1/\kappa},x)$.

Для $x\in\Omega$ и $d>0$ положим:

1) при $p<q$, $\delta(p)\neq 0$

$$A(x,d)=\left(\Pi u_j(x)\right)^{-1/p}\sup_{Q^\mu\in\Pi(x,d)}\mu^{\delta(p)}\|\tau\|_{q,Q^\mu};$$

2) при $p\leqslant q$, $\delta(p)=0$

$$A(x,d)=d^{1-\delta(\theta,p)}\left(\Pi u_j(x)\right)^{-1/p}\sup_{Q^\mu\in\Pi(x,d)}\mu^{\delta(Q)}\|\tau\|_{q,Q^\mu},$$

где $\theta\in(1,p)$ таково, что $\delta(\theta,q)>0$ (обозначение $\delta(p,q)$ см. в начале работы);

3) при $p=q$, $\delta(p)\neq 0$

$$A(x,d)=\left(\Pi u_j(x)\right)^{-1/p}\|\tau\|^{1-q/\theta}_{q,\theta(u(x)\cdot d^{1/\kappa},x)}\times\sup_{Q^\mu\in\Pi(x,d)}\mu^{\delta(p)}\|\tau\|^{q/\theta}_{q,Q^\mu},$$

где $\theta>p$ таково, что $\delta(p,\theta)>0$.

Так как при фиксированном $x\in\Omega$ множество $\Pi(x,d)$ расширяется с увеличением d, то $A(x,d)$ не убывает по d. Может оказаться, что $A(x,d)=+\infty$ для некоторых x,d. Пользуясь монотонностью $A(x,d)$ по d, можно доопределить $A(x,d)$ при $d=\infty$, положив $A(x,\infty)=\lim\limits_{d\to\infty}A(x,d)$. Основное свойство функции $A(x,d)$ определяет

Лемма 2. *Пусть* $x\in\Omega$ *и* $0<d\leq V^*(x)$. *Справедлива оценка*

$$\Big(\int\limits_{Q(u(x)\cdot d^{1/\kappa},x)} |\tau(t)f|^q dt\Big)^{1/q} \leq cA(x,d)\Big\{\int\limits_{Q(u(x)\cdot d^{1/\kappa},x)} \Big(\sum |u_j^{\kappa_j}(t)D^{\kappa_j}f|^p + |f/d|^p\Big)dt\Big\}^{1/p},$$

где $c=c(T)$ *не зависит от* $f\in C_0^\infty(\Omega)$, τ, d, x.

Эта лемма выводится из леммы 1.3 (см. [8]). Изотропный случай см. в [9].

Замечание 4. Если выполняется условие В, то справедлива оценка леммы 2 при $x\in\Omega$ и $0<d\leq V(x)$ для всех $f\in L_p^\kappa(\Omega)$. Это видно из метода доказательства леммы 1.3 из [8].

Замечание 5. Если выполнено условие погружения ($Q(a(x),x)\subset\Omega$ $\forall x\in\Omega$) и $\tau\in M_T(I_a)$ (или выполняется условие В и $\tau\in M_T(I_{\tilde a})$), то при $0<d\leq V^*(x)$ (соответственно при $0<d\leq V(x)$) имеет место эквивалентность

$$A(x,d)\sim A_1(x,d)\equiv \tau(x)(\Pi u_j(x))^{1/q-1/p}d^{\delta(p,q)}. \tag{7}$$

В дальнейшем важную роль будет играть функция $S(\lambda,x)$, определенная при $x\in\Omega$ и $\lambda>0$ соотношением

$$S(\lambda,x)=\sup\{d>0:\ A(x,d)\leq\lambda\}.$$

Далее в дополнение к условиям А и Б будем требовать выполнения еще условия

1) функция $S(\lambda,x)$ положительна в Ω при всех $\lambda>0$ ($S(\lambda,x)$ не обязана быть конечной). Очевидно, $A(x,S(\lambda,x))\leq\lambda$ и $S(\lambda_1,x)\geq S(\lambda_2,x)$ при $\lambda_1\geq\lambda_2$.

Определение. Не более чем счетное покрытие $\{Q^j\}$ множества Ω называется *конечноразделимым*, если его можно разбить на $\xi<\infty$ подсемейств $\{Q^{j\kappa}\}$, $1\leq\kappa\leq\xi$, каждое из которых состоит из попарно-непересекающихся множеств. Число ξ называется *коэффициентом разделимости покрытия* $\{Q^j\}$.

Для произвольного параллелепипеда Q обозначим через $W(Q)$ и $L_{q,\tau}(Q)$ множества сужений на Q функций из $\overset{\circ}{W}(\Omega)$ и $L_{q,\tau}(\Omega)$,

рассматриваемых в нормах (1) и (2) с Q вместо Ω ; $E(Q)$ - оператор вложения $W(Q)$ в $L_{q,\tau}(Q)$. Аналогично понимается $L_p^\kappa(Q)$ $(Q\subset\Omega)$.

Локализацию задачи об оценке $N(\lambda,E)$ содержит

Лемма 3. *Пусть* $\{Q^j\}$ *- произвольное конечноразделимое покрытие* Ω *параллелепипедами с коэффициентом разделимости* ξ . *Тогда при всех* $\lambda>0$ *справедливо*

$$N(\lambda,E)\leqslant \sum_j N\left(\xi^{-1/q}\lambda,\, E(Q^j)\right).$$

Доказательство этой леммы, проведенное для кубов в [6] , дословно переносится на покрытия параллелепипедами.

Замечание 6. Лемма 3 справедлива для операторов

$$E: L_p^\kappa(\Omega)\to L_{q,\tau}(\Omega),\ E(Q^j): L_p^\kappa(Q^j)\to L_{q,\tau}(Q^j)$$

при дополнительном условии $Q^j\subset\Omega$ для всех j .

Обозначим $h(\lambda,x)=\min\{S(\lambda,x),V^*(x)\}$. Покрытие из леммы 3 (свое для каждого $\lambda>0$) будем выбирать на основе следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть* $\lambda>0$, $x\in\Omega$. *Тогда*

а) если $S(\lambda,x)\leqslant V^*(x)$, *то*

$$N\left(c_1\lambda, E\left(Q\left(u(x)\cdot h(\lambda,x)^{1/\kappa}, x\right)\right)\right)\leqslant c_2\,;$$

б) если $V^*(x)\leqslant S(\lambda,x)\leqslant\infty$, *то*

$$N\left(c_1\lambda, E\left(Q\left(u(x)\cdot h(\lambda,x)^{1/\kappa}, x\right)\right)\right)=0.$$

Здесь $c_1=c_1(\varepsilon,\gamma,T)$, c_2 *- постоянные, не зависящие от* λ *и* x (c_2 *зависит только от* κ).

В леммах 3,4 содержится основная идея метода. Справедлива

Лемма 5. *Пусть, кроме условий А и В, выполняется условие*

Д) при каждом $\lambda>0$ *функция* $h(\lambda,x)$ *конечна и положительна в* Ω *и из покрытия* $\{Q(u(x)\cdot h(\lambda,x)^{1/\kappa}, x\}: x\in\Omega\}$ *можно выделить конечноразделимое подпокрытие* $\{Q^j\}$ *множества* Ω *с коэффициентом разделимости* ξ , *не зависящим от* λ .

Обозначим через $M(\lambda)$ максимальное количество попарно-непересекающихся параллелепипедов вида $Q(u(x_j)\cdot h(\lambda, x_j)^{1/k}, x_j)$, $x_j \in \Omega$, для которых $S(\lambda, x_j) \leqslant V^*(x_j)$. Тогда

$$N(c_1\lambda, E) \leqslant c_2 M(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

где $c_1 = c_1(\varepsilon, \gamma, T, \xi)$, $c_2 = c_2(\xi)$.

Замечание 7. Если вместо условий А и Б потребовать выполнения условия В, то лемма 5 будет справедлива для оператора $E: L_p^k(\Omega) \to L_{q,\tau}(\Omega)$, если всюду V^* заменить на V.

Замечание 8. Анализ доказательства изложенных результатов показывает, что вычисление A и S можно облегчить следующим образом. Функцию $A(x,d)$ можно вычислить при $d \leqslant V^*(x)$, а при $d > V^*(x)$ доопределить произвольным образом так, чтобы $A(x,d)$ монотонно возрастала к ∞ при $d \to \infty$. Обозначив полученную функцию через $A_1(x,d)$, образуем $S_1(\lambda, x) = \sup\{d>0: A_1(x,d) \leqslant \lambda\}$. Тогда S_1, в отличие от S, всегда конечна. Выберем A_1 так, чтобы S_1 удовлетворяла (11) - это понадобится в теоремах 2, 3. Тогда будут справедливы леммы 4,5, если в них заменить S на S_1. (Это обстоятельство количественно выражает тот общий факт, что поведение a-чисел в значительной мере определяется локальным поведением весовых функций). Например, в условиях замечания 5 в качестве A_1 можно взять функцию (7). Тогда

$$S_1(\lambda, x) = \left[(\Pi u_j(x))^{1/p-1/q} \lambda / \tau(x) \right]^{1/\delta(p,q)}. \tag{8}$$

Таким образом, если вместо условий А и Б выполняется В и $\tau \in M_T(I_\alpha)$, то лемма 5 справедлива для оператора $E: L_p^k(\Omega) \to L_{q,\tau}(\Omega)$ с заменой V^* на V, S на S_1, h на

$$h_1(\lambda, x) = \min\{S_1(\lambda, x), V(x)\}. \tag{9}$$

Из леммы 4, п "б", можно вывести следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$, $\delta(p,q) > 0$, *выполняются условия*

А и Б и из покрытия $\{Q(a(x),x) : x\in\Omega\}$ *(вектор* a *определен в* (5)) *можно выделить конечноразделимое подпокрытие. Если* $A=\sup\limits_{x\in\Omega} A(x,V^*(x))<\infty$, *то* $\overset{\circ}{W}(\Omega)$ *вложено в*

$$L_{q,r}(\Omega) \text{ и } \|E\|\le cA,\ c=c(\varepsilon,\gamma,T,\xi).$$

Теорема 1'. *Пусть* $1<p\le q<\infty,\ \delta(p,q)>0$ *, выполняется условие В,* $r\in M_T(I_{\tilde a})$ *и из покрытия* $\{Q(\tilde a(x),x): x\in\Omega\}$ *можно выделить конечноразделимое подпокрытие. Если*

$$A_1=\sup_{x\in\Omega} r(x)\left(\Pi u_j(x)\right)^{1/q-1/p} v(x)^{-\delta(p,q)}<\infty,$$

то $L_p^K(\Omega)$ *вложено в* $L_{q,r}(\Omega)$ *и* $\|E\|\le cA_1,\ c=c(T,\xi)$.

Более общие результаты доказаны в [8] , там же имеются примеры. См. также [10].

Приведенных результатов достаточно, чтобы понять, насколько важно уметь выделять из данного покрытия множества Ω конечноразделимое подпокрытие. Классическая лемма Безиковича-Гусмана [11] утверждает, что если множество Ω ограничено, то из любого покрытия его кубами (для каждой точки из Ω должен быть определен куб с центром в этой точке) можно выделить конечноразделимое подпокрытие с ξ , зависящим только от n . Поэтому в изотропном случае для ограниченного множества Ω условие Д выполняется тривиальным образом, если $h(\lambda,x)$ положительна и конечна в Ω . Имеющиеся обобщения [10, 11] леммы Безиковича-Гусмана на покрытия параллелепипедами оставляют желать лучшего, поскольку их применение в анизотропном случае приводит к жестким ограничениям на веса и требует некоторой изобретательности. Лемма 7 показывает, что иногда достаточно уметь выбирать конечноразделимое покрытие не для всего Ω , а для его ограниченных подмножеств. На такую возможность автору указал М.Отелбаев.

Лемма 6. *Пусть* $A_0, A_1,\ldots$ *- операторы из* $\mathcal{L}(B_1,B_2)$, $\lim\limits_{j\to\infty} A_j=A_0$ *. Тогда при любом* $\delta>0$

$$N(\lambda+\delta,A_0)<\varliminf_{j\to\infty} N(\lambda,A_j).$$

Для наших целей достаточно брать $\delta = \lambda$.

Обозначим $\Omega_C = \{x \in \Omega : |x| < C\}$.

Лемма 7. *Пусть выполняются условия А,Б, а также условие Д' для любого $\lambda > 0$ существует $C(\lambda) > 0$ такое, что*

$$S(\lambda, x) \geq V^*(x), \quad x \in \Omega \setminus \Omega_{C(\lambda)}, \quad \lim_{\lambda \to 0} C(\lambda) = \infty,$$

и при любом $C > 0$ выполняется условие Д с заменой Ω на Ω_C, где коэффициент разделимости не зависит от λ и C.

Тогда

$$N(2\lambda, E) \leq \varliminf_{C \to \infty} N(\lambda, E(\Omega_C)),$$

где $E(\Omega_C)$ - оператор вложения $W(\Omega_C)$ в $L_{q,\tau}(\Omega_C)$ ($W(\Omega_C)$ понимается аналогично $W(Q)$), и справедлива оценка из леммы 5.

Замечание 9. Если вместо А и Б выполняется В, то лемма 7 справедлива с заменой V^* на V для оператора $E : L_p^K(\Omega) \to L_{q,\tau}(\Omega)$. Если, кроме того, $\tau \in M_T(I_{\tilde{a}})$, то A, S, h можно заменить на A_1, S_1, h_1 - из замечания 8 (см. (7) - (9)).

Замечание 10. Если $N(\lambda, E) < \infty$ при любом $\lambda > 0$, то оператор E с любой точностью аппроксимируется конечномерными операторами и, следовательно, компактен. Поэтому из лемм 5,7 и замечаний 7-9 сразу получаем утверждение: если $M(\lambda) < \infty$ при любом $\lambda > 0$, то соответствующий оператор вложения компактен.

В следующей лемме утверждается некоторое свойство устойчивости V^*.

Обозначим $\tilde{\Omega} = \bigcup_{x \in \Omega} Q(a(x), x)$.

Лемма 8. *Пусть $x_0 \in \Omega$ и $d_0 = c\, V^*_{\varepsilon,\gamma}(x_0, v)$, где $c = c(T)$ достаточно мало. Предположим, что выполняется условие*

Е) функцию u можно продолжить на $\tilde{\Omega}$ так, чтобы условие (6) выполнялось при всех $t \in Q(a(x), x)$, $x \in \Omega$ (а не только при $t \in Q(a(x), x) \cap \Omega$).

Тогда существуют зависящие от T константы C_1, C_2, такие, что

$$V^*_{\varepsilon,\gamma}(x_0, v) \leq C_1 V^*_{C_2\varepsilon, C_2\gamma}(x, v/C_1) \tag{10}$$

при всех $x\in Q(u(x_0)\cdot d_0^{1/\kappa},x_0)$. *(При условии Е правая часть в (10) определена, хотя* x *может не принадлежать* Ω *; если же Е не выполняется, то (10) верно, если дополнительно* $x\in\Omega$ *).*

Замечание 11. При выполнении условия В справедлив следующий очевидный аналог леммы 8: при всех $x_0\in\Omega$ имеет место

$$V(x_0)\leqslant T\,V(x),\quad x\in Q\,(\tilde{a}(x_0),x_0).$$

Лемма 9. *Пусть выполняется условие Е* , $x_0\in\Omega$, $S(\lambda,x_0)\leqslant V^*(x_0)$. *Тогда при всех* $x\in Q(u(x_0)\cdot S(\lambda,x_0)^{1/\kappa},x_0)$ *справедливо неравенство*

$$c_1\,S(\lambda,x_0)\geqslant S(\lambda/c_2,x), \tag{11}$$

где c_1,c_2 *достаточно велики и зависят от* T *. (Если условие Е не выполняется, то (11) верно при дополнительном условии* $x\in\Omega$ *).*

Теорема 2. *Пусть* $1<p\leqslant q<\infty$, $\delta(p,q)>0$ *, выполняются условия А, Б, Е и хотя бы одно из условий Д или Д'. Обозначим*

$$\Omega=\bigcup_{x\in\Omega}Q\,(a(x),x).$$

Тогда найдутся c_1,c_2 *такие, что для функции распределения* a *-чисел оператора вложения* $E:W(\Omega)\to L_{q,\tau}(\Omega)$ *при всех* $\lambda>0$ *справедлива оценка*

$$N(\lambda,E)\leqslant c_1\int\limits_{\tilde{\Omega}(\lambda)}S\left(\frac{\lambda}{c_1},x\right)^{-\sum 1/\kappa_j}\left(\Pi u_j(x)\right)^{-1}dx, \tag{12}$$

где $\tilde{\Omega}(\lambda)=\left\{x\in\tilde{\Omega}:\ S\left(\frac{\lambda}{c_1},x\right)\leqslant c_1V^*_{\varepsilon_1,\gamma_1}\left(x,\frac{U}{c_1}\right)\right\}$,

$$\varepsilon_1\leqslant c_2\varepsilon,\quad \gamma_1\leqslant c_2\gamma,\quad c_1=c_1(\varepsilon,\gamma,T,\xi),\quad c_2=c_2(T).$$

Эта теорема выводится из лемм 5,7-9. В изотропном случае из теоремы 2 вытекает основной результат работы [6] (в этой работе Ω ограничено и условие Д выполняется).

Замечание 12. Условие Е можно заменить следующим условием (его можно назвать ослабленным условием погружения) : при некотором $\delta\in(0,1)$ справедливо

$$Q\left(u(x)\cdot(\delta V^*_{\varepsilon,\gamma}(x))^{1/\kappa},x\right)\subset\Omega\qquad \forall x\in\Omega,$$

или при некоторых $\delta \in (0,1), \Gamma > 1$ для любого $\lambda > 0$ и всех $x \in \{x \in \Omega :$ $S(\lambda, x) \leq V^*_{\varepsilon,\gamma}(x)\}$ имеет место неравенство

$$\frac{\operatorname{mes} Q(u(x)\cdot(\delta S(\lambda,x))^{1/k}, x)}{\operatorname{mes}\{Q(u(x)\cdot(\delta S(\lambda,x))^{1/k}, x)\cap\Omega\}} \leq \Gamma.$$

Тогда оценка (12) сохранится, если заменить $\widetilde{\Omega}(\lambda)$ на множество

$$\Omega(\lambda) = \{x \in \Omega : S\left(\frac{\lambda}{C_1}, x\right) \leq C_1 V^*_{\varepsilon_1,\gamma_1}(x, \frac{v}{C_1})\},$$

где C_1 зависит от $\varepsilon, \gamma, T, \xi, \delta, \Gamma$. Более того, огрубляя оценку (12), функцию $V^*_{\varepsilon_1,\gamma_1}(x, v/C_1)$ можно заменить более простой функцией $v_{\varepsilon_2}(x, \frac{v}{C_1})$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon, \gamma)$, которая определяется следующим образом: при $\varepsilon \in (0,1)$

$$m_\varepsilon(x,d) = \inf_{\substack{\operatorname{mes} e \leq \varepsilon \\ e \subset Q_1}} \int_{Q_1 \setminus e} v^p(u(x)\cdot d^{1/k}\cdot y + x)\,dy,$$

$$v^*_\varepsilon(x) = \sup\{d > 0 : d^{-p} \geq m_\varepsilon(x,d)\}.$$

Теорема 3. *Предположим, что $1 < p \leq q < \infty$, $\delta(p,q) > 0$, выполняется условие В и одно из условий Д или $\dot{Д}$, где V^* надо заменить на V. Тогда при некоторых $C > 1$ и $\lambda > 0$ для оператора $E : L^k_p(\Omega) \to L_{q,\tau}(\Omega)$ справедлива оценка*

$$N(\lambda, E) \leq C \int_{\Omega(\lambda)} S(\lambda/C, x)^{-\sum 1/k_j} (\Pi u_j(x))^{-1} dx,$$

где $\Omega(\lambda) = \{x \in \Omega : S(\lambda/C, x) \leq C\,V(x)\}$. Если же, кроме того, $\tau \in M_T(I_{\widetilde{a}})$, то функции A, S, h можно заменить на функции (7), (8) (9) соответственно.

Эта теорема доказывается с помощью замечаний 7-9, 11 и леммы 9 (условие Е вытекает из В).

Теорема 2 применяется к случаю, когда норма (1) невесовая. Этот случай, несмотря на его простоту, интересен, потому, что вложение $\dot{W}(\Omega) \subset$ $\subset L_{q,\tau}(\Omega)$ при $\tau \equiv 1$ может не иметь места, если геометрические свойства

множества Ω не соответствуют дифференциальному индексу K (см. [12]), и тогда норма (2) должна быть существенно весовой.

Лемма 10. *Пусть $u_1,\dots,u_n,v$ тождественно равны 1 и множество Ω удовлетворяет условию: либо $\Omega = R^n$, либо существуют числа $\Gamma > 1$ и достаточно малые δ_1, δ_2 такие, что для тех $x\in\Omega$, для которых*

$$V_1(x) \equiv \sup\{d>0 : d\leq 1,\ Q(d^{1/k}, x)\subset\Omega\} < \delta_1 ,$$

при всех $d\in(\Gamma V_1(x), \Gamma\delta_1)$ выполняется неравенство

$$\mathrm{mes}\{Q(d^{1/k}, x)\setminus\Omega\} \geq \delta_2\, \mathrm{mes}\, Q(d^{1/k}, x).$$

Тогда при достаточно малых ε, γ, зависящих от δ_2, имеет место эквивалентность $V^*_{\varepsilon,\gamma}(x, \delta_1^{-p} v) \sim V_1(x)$ с константами эквивалентности, зависящими от Γ, δ_1.

При $\Omega\neq R^n$ условие леммы 10 выполняется, если существуют такие α, β, что каждой точки границы $\partial\Omega$ можно коснуться снаружи конусом высоты β с углом α при вершине.

Теорема 4. *Пусть $1<p\leq q<\infty$, $\delta(p,q)>0$, $u_1,\dots,u_n, v$ тождественно равны 1 и выполняется условие леммы 10. Предположим, что $S(\lambda,x)$ положительна в Ω при всех $\lambda>0$. Тогда при некотором $c=c(\delta_1,\delta_2,\Gamma)>1$ для оператора $E:\overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega,1,1)\to L_{q,r}(\Omega)$ имеет место оценка*

$$N(\lambda, E) \leq c \int\limits_{\{x\in\Omega : S(\lambda/c, x)\leq c V_1(x)\}} S(\lambda/c, x)^{-\sum 1/k_j} dx.$$

При использовании этой теоремы полезно иметь в виду замечание 8. Следующая теорема выводится из теоремы 3. Обозначим через $\rho(x)=\rho(x,\partial\Omega)$ расстояние от точки x до границы множества Ω. Пусть $\alpha,\beta_1,\dots,\beta_n\in R$,

$$\delta_1 = \sum((\mu-\alpha)/k_j-\beta_j)/\delta(p,q),\quad \delta_2=\mu-\alpha-(1/p-1/q)\sum\beta_j,$$

$$\delta_3=-\sum 1/(k_j\,\delta(p,q)).$$

Теорема 5. *Пусть Ω удовлетворяет условиям: $\mathrm{mes}\,\Omega<\infty$ и существуют $T>1$ и натуральное m_0 такие, что при всех $m\geq m_0$* справедливо

$$\operatorname{mes}\{x\in\Omega : 2^{-m-1}\leqslant\rho(x)<2^{-m}\}\leqslant T2^{-m}.$$

Предположим, что $\min\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}\geqslant 1$ *и либо* $\delta_1>-1$, δ_2 *произвольно, либо* $\delta_2>0$, δ_1 *произвольно. Тогда оператор* $E: L_p^\kappa(\Omega)\to L_{q,\tau}(\Omega)$ *компактен и при всех* $\lambda>0$ *справедливы оценки:*

1) $N(\lambda,E)\leqslant c\lambda^{\delta_3}$ *при* $\delta_1>-1$ (δ_2 *произвольно*);

2) $N(\lambda,E)\leqslant c\lambda^{\delta_3}\max\{1,-\ln\lambda\}$ *при* $\delta_1=-1$, $\delta_2>0$;

3) $N(\lambda,E)\leqslant c\lambda^{\delta_3}[1+\lambda^{(\delta_1+1)/\delta_2}]$ *при* $\delta_1<-1$, $\delta_2>0$.

Заметим, что для "хороших" областей в невесовом случае (см. [1]) имеет место оценка 1). Заключение этой теоремы о компактности оператора вложения дополняет следствие 1 из [10], где компактность доказана в случаях 2) и 3),

Теорема 6. *Пусть* Ω *ограничено*, $1<p\leqslant q<\infty$, $\delta(p,q)>0$, $u_j(x)=(\sigma(x)w(x))^{1/k_j}$, $j=\overline{1,n}$, *выполняется условие В*, $\tau\in M_T(I_{\tilde a})$. *Тогда для оператора* $E: L_p^\kappa(\Omega)\to L_{q,\tau}(\Omega)$ *справедлива оценка*

$$N(\lambda,E)\leqslant c\lambda^{\delta_3}\int\limits_{\{x\in\Omega:\ \sigma(x)w(x)^{1-\delta(p,q)}\lambda\leqslant c\tau(x)\}}(\sigma(x)w(x)/\tau(x))^{\delta_3}dx,$$

где $c=c(T)$, δ_3 *определено перед теоремой 5.*

Литература

1. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.- М.: Мир, 1980.- 664 с.

2. Отелбаев М. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера.- Труды МИ АН СССР, 1979, т. 150, с. 265-305.

3. Алексеев А.Б., Олейник В.Л. Оценки поперечников единичного шара $\overset{\circ}{L}{}_p^{\ell}$ в $L_p(\mu)$.- В кн.: Проблемы математической физики.- Л.: 1970, вып. 7, с.3-7.

4. Кусаинова Л.К. Оценки поперечников вложения одного весового класса в $W_q^m(\Omega)$.- Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-мат., 1979, № 5, с.28-34.

5. Мынбаев К., Отелбаев М. Оценки аппроксимативных чисел оператора вложения одного класса весовых пространств.- Изв. АН Каз. ССР, Сер. физ.-мат., 1981, № 5, с. 44-47 (ч.1), 1982, № 1, с.36-39 (ч.11).

6. Лизоркин П.И., Отелбаев М. Оценки аппроксимативных чисел оператора вложения для пространств соболевского типа с весами.- Труды МИ АН СССР, 1983, т. 157.

7. Мазья В.Г. О (p,l)-емкости, теоремах вложения и спектре самосопряженного эллиптического оператора.- Изв. АН СССР, Сер. мат., 1973, т. 37, с. 356-385.

8. Мынбаев К.Т. Об анизотропных весовых теоремах вложения и спектре некоторых дифференциальных операторов: Дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук (01.01.01) - Алма-Ата, Б.и., 1981.- 102 с.

9. Лизоркин П.И., Отелбаев М. Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами.- Мат. сб., 1979, т.108, № 3, с.358-377 (ч.1); 1980, т. 112, № 1, с. 56-85 (ч.11).

10. Кусаинова Л.К., Мынбаев К.Т. К теоремам вложения и компактности для анизотропных весовых пространств Соболева.- Докл. АН СССР, 1982, т.263, № 5, с.1050-1053.

11. Гусман М. Дифференцирование интегралов в R^n .-М.: Мир, 1978.- 200 с.

12. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.- М.: Наука, 1975.- 480 с.