УДК 518.517.392

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА РЕШЕТЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

М.В. Носков (Красноярск)

Вопрос об асимптотической оптимальности решетчатых кубатурных формул с регулярным пограничным слоем в пространствах типа L_p^m с ограниченной областью интегрирования изучался С.Л. Соболевым и др. [1]. В [2,3] эти результаты были обобщены на пространства $L_p^{m,s}(\Omega)$, к которым приводит задача об интегрировании функций по боковой поверхности цилиндра, но используемый в [2,3] аппарат декартовых произведений непригоден для других развертывающихся поверхностей. В [4] выделен класс поверхностей, на которых строятся решетки, классы функций и асимптотически оптимальные последовательности функционалов погрешностей кубатурных формул. Результаты в [4] приведены без доказательств. В настоящей работе теорема из [4] обобщается на более широкий класс поверхностей.

Введем обозначения:

Ω - ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве E^n, $\partial\Omega$ - граница Ω; p, q, m - числа, $1<p<\infty, p^{-1}+q^{-1}=1$; m - целое, $pm>n$;

G - единичный куб, $G=\{x: x=(x_1,\dots,x_n), 0<x_i<1, i=1,\dots,n\}$;

$L_p^m(\Omega)$ - совокупность функций, обладающих в Ω суммируемыми в степени p обобщенными производными порядка m. Если $f\in L_p^m(\Omega)$, то

$$\|f\|_{L_p^m(\Omega)}=\left[\int_\Omega\left[\sum_{|\alpha|=m}\frac{\alpha!}{m!}(\mathcal{D}^\alpha f)^2(x)\right]^{p/2}dx\right]^{1/p}<\infty,$$

где $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$; $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $\alpha!=\alpha_1!\dots\alpha_n!$, $\mathcal{D}^\alpha f=\dfrac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$;

$\widetilde{W}_p^m$ - множество всех определенных в E^n периодических, с периодом единица по каждой из переменных $x_1,\dots,x_n$ функций, принадлежащих

классу $L_p^m(G)$;

$\hat{W}_p^m$ - совокупность линейных комбинаций функций из $\tilde{W}_p^m$ и полиномов степени не выше m;

$\hat{L}_p^m$ - нормированное пространство, состоящее из фактор-мн гообразия $\hat{W}_p^m$ по множеству полиномов степени ниже m с нормой, инд..ированной $\|\cdot\|_{L_p^m(G)}$;

$$S_p^m=\{f: f\in \tilde{W}_p^m,\ f(0)=0;\ \|f\|_{L_p^m(G)}=1\};$$

$$A_p^m=\sup_{f\in S_p^m}\left\{\int_G f dx\right\};$$

R^n - множество n-мерных векторов с целочисленными компонентами.

$H=\{h\}$ - множество параметров;

$\Gamma(x_0|A)=\{x: x=A\beta+x_0\}$ - n-мерная решетка, где A - вещественная квадратная матрица порядка n, $\det A>0$, x_0 - произвольный фиксированный вектор, $\beta\in R^n$;

E - единичная матрица порядка n;

$$\Omega_\gamma^h=\{x=hy+h\gamma,\ y\in G\},\ h\in H,\ \gamma\in R^n;$$

$$Q_\gamma^h(\Omega)=\Omega_\gamma^h\cap\Omega;$$

$$\Omega_\gamma^{\tau,h}=\{x: x=(x_1,\dots,x_n): |x_i-\gamma_i h-\frac{h}{2}|<\frac{\tau h}{2};\ i=1,\dots,n\},\gamma\in R^n,\ h\in H;$$

$$Q_\gamma^{\tau,h}(\Omega)=\Omega_\gamma^{\tau,h}\cap\Omega;$$

$$N_\tau=\Omega_0^{\tau,1};$$

$d(M,N)$ - расстояние между множествами M и N.

Пусть M - связная, кусочно-гладкая, локально-развертывающаяся, ориентируемая поверхность, $\mathcal{T}=\{M_i\}$, $i=\{\overline{1,t}\}$, - конечное покрытие M. Предположим, что M_i связные, $M_{ij}=M_i\cap M_j$, для любого $i\in\{\overline{1,t}\}$ существует изометричное отображение g_i множеств M_i в E^2 : $g_i M_i=$ $=\Omega_i\subset E^2$. Пусть на M существует система кривых K^h, являющихся геодезическими на гладких частях M, с множеством $\Gamma^h(M)$ точек

пересечения, таким, что для некоторой матрицы A и вектора x_0 при $h<h_0$ выполняется $g_i(\Gamma^h(M)\cap M_i)\in\Gamma(x_0|A)$, где x_0 и A не зависят от i. Пусть S_ξ^h - связная компонента $M\setminus K^h$, ξ - индексирующая точка из S_ξ^h, $\{\xi\}=\Delta^h$. Пусть $A=E$ и x_0 - начало координат, тогда $g_i(M_i\cap S_\xi^h)=Q_\gamma^h(\Omega_i)$ для некоторого $\gamma\in R^n$.

Построим последовательность функционалов $\{\ell^h\}$ на M. Выберем для каждого h таким образом $S^h_{\xi(h)}$, чтобы для некоторых $i=i(h)$ и $\gamma=\gamma(h)\in R^n$ выполнялись $g_i S^h_{\xi(h)}=Q_\gamma^h(\Omega)=\Omega_\gamma^h$ и $g_i^{-1}\Omega_\gamma^{z,h}\subset M_i$. Пусть функционал ℓ, $supp\,\ell\subset N_z$, $\ell\in L_p^{m*}(N_z)$, таков, что для выбранного $\gamma=\gamma(h)$ функционалы $\ell_\gamma^h=\ell(\frac{x}{h}-\gamma)\in L_p^{m*}(\Omega_\gamma^{z,h})$, $\|\ell_\gamma^h\|_{L_p^{m*}(\Omega_\gamma^{z,h})}<$
$<Th^{m+nq^{-1}}$, где T - некоторая постоянная, не зависящая от h и γ. Отображение g_i^{-1} индуцирует на M для каждого функционала ℓ_γ^h функционал $\rho^h_{\xi_0}$. В множестве Δ^h выделим максимальное подмножество Δ_1^h так, чтобы для всякого $\xi\in\Delta_1^h$ был возможен вместе с параллельным переносом $S^h_{\xi_0}$ на S^h_ξ параллельный перенос $\rho^h_{\xi_0}$ вдоль кривых, образующих $\Gamma^h(M)$. Обозначим функционалы, получающиеся при таком переносе, через ρ^h_ξ, причем считаем, что можно построить такое изометрическое отображение g носителя ρ^h_ξ, что его можно продолжить на множество K^h_ξ, $supp\,\rho^h_\xi\subset$
$\subset K^h_\xi$ и $gK^h_\xi=\Omega_\gamma^{z,h}$ для некоторого γ.

Если $\xi\in\Delta_2^h=\Delta\setminus\Delta_1^h$, то разобьем S^h_ξ на непересекающиеся части $S^h_{\xi,i}\subset M$. Пусть $g_i S^h_{\xi,i}\subset Q^h_\gamma(\Omega_i)$, тогда для $g_i S^h_{\xi,i}$ построим функционал $\ell^h_{\gamma,i}$, $supp\,\ell^h_{\gamma,i}\subset Q_\gamma^{z,h}(\Omega_i)$, $\|\ell_\gamma^h\|<Tt^{-1}h^{m+nq^{-1}}$.

Отображение g_i^{-1} индуцирует на M для $\ell^h_{\gamma,i}$ функционал $\tau^h_{\xi,i}$. Положим $\tau^h_\xi=\sum_{i=1}^{t}\tau^h_{\xi,i}$ и

$$\ell^h=\sum_{\xi\in\Delta_1^h}\rho^h_\xi+\sum_{\xi\in\Delta_2^h}\tau^h_\xi\,. \qquad (1)$$

Последовательность $\{\ell^h\}$ таких функционалов назовем последовательностью с пограничным слоем.

Замечание. Определенная таким образом последовательность есть частный случай последовательностей, определенных в [5], если M - область из E^n. Определение последовательностей с пограничным слоем на решетчатом многообра-

зии, совпадающее с определением из [5], дано в [4], при этом существенно ограничился класс рассматриваемых многообразий.

Если на M задана функция $f(\sigma)$, $\sigma \in M$, то g_{i} индуцируют на Ω_i функции $f_i(x_i)$, $x_i = g_i \sigma$, причем при $\sigma_0 = g_i^{-1} x_i^0 = g_j^{-1} x_j^0$ выполняется равенство $f_i(x_i^0) = f_j(x_j^0)$. Считаем $f(\sigma) \in L_p^m(M)$, если $f_i(x_i) \in L_p^m(\Omega_i)$, $i \in \{\overline{1,t}\}$. Норму $f(\sigma)$ в $L_p^m(M)$ определим равенством

$$\|f\|^p_{L_p^m(M)} = \|f_1(x)\|^p_{L_p^m(\Omega_1)} + \sum_{i=1}^{t-1} \|f_{i+1}\|^p_{L_p^m(\Omega_{i+1} \setminus \bigcup_{k \le i} g_{i+1}(M_{i+1} \cap M_k))} .$$

Определение 1. Последовательность функционалов (1) называется *последовательностью функционалов погрешностей с пограничным слоем*, если для любых h, ξ имеет место

$$(\rho_\xi^h, f) = \int_{S_\xi^h} f(\sigma)d\sigma - \sum_{\mu \in \Gamma^h(M)} c^h_{\mu,\xi} f(\mu),$$

$$(\tau^h_{\xi,i}, f) = \int_{S^h_{\xi,i}} f(\sigma)d\sigma - \sum_{\mu \in \Gamma^h(M)} c^h_{\mu,\xi,i} f(\mu).$$

Функционал ℓ, используемый при построении последовательности (1), назовем *сопутствующим*. Для последовательностей, определенных в [1], характерно равенство h^n коэффициентов кубатурных формул, достаточно далеко отстоящих от границ области. Для выполнения этого свойства в последовательности (1) положим ℓ инвариантным относительно преобразований, оставляющих G на месте.

Определение 2. Последовательность функционалов погрешностей с пограничным слоем $\{\ell^h\}$ называется *асимптотически оптимальной в* $L_p^m(M)$, если $\ell^h \in L_p^{m*}(M)$ и для любой последовательности $\{\rho^h\}$, $\rho^h \in L_p^{m*}(M)$; таких, что

$$(\rho^h, f) = \int_M f(\sigma)d\sigma - \sum_{\mu \in \Gamma^h(M)} c^h_\mu f(\mu)$$

выполняется соотношение

$$\varliminf_{h \to 0} \left\{ \|\rho^h\|_{L_p^{m*}(M)} \cdot \|\ell^h\|^{-1}_{L_p^{m}(M)} \right\} \ge 1 .$$

Для определенных в [5] последовательностей функционалов с пограничным слоем, используя приведенные там доказательство их асимптотической оптимальности и оценки, можно доказать следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* ℓ_i *– сопутствующий функционал* $\{\ell_i^h\}$ *– асимптотически оптимальной последовательности с пограничным слоем, обладающей в* $\hat{L}_p^m$ *экстремальной функцией из* $\tilde{W}_p^m$; $\ell_i^h \subset L_p^{m*}(D_i)$, $D_i \in E^n$, $i=1,2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. *Пусть* $\ell^h = \ell_1^h + \ell_2^h$, $D_1 \cup D_2 = D$. *Тогда* $\{\ell^h\}$ *– асимптотически оптимальная последовательность в* $L_p^m(D)$:

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(D)} = (mes\, D)^{1/q} h^m A_p^m (1+o(1)).$$

Доказательство. Из неравенства Гёльдера при $f \in L_p^m(D)$ следует

$$|(\ell^h, f)| = |(\ell_1^h + \ell_2^h, f)| \leq |(\ell_1^h, f)| + |(\ell_2^h, f)| \leq$$

$$\leq \|\ell_1^h\|_{L_p^{m*}(D_1)} \|f\|_{L_p^m(D_1)} + \|\ell_2^h\|_{L_p^{m*}(D_2)} \|f\|_{L_p^m(D_2)} \leq$$

$$\leq \left(\|\ell_1^h\|^q_{L_p^{m*}(D_1)} + \|\ell_2^h\|^q_{L_p^{m*}(D_2)}\right)^{1/q} \left(\|f\|^p_{L_p^m(D_1)} + \|f\|^p_{L_p^m(D_2)}\right)^{1/p}.$$

Учитывая, что при $i=1,2$

$$\|\ell_i^h\|_{L_p^{m*}(D_i)} = A_p^m (mes\, D_i)^{1/q} h^m (1+o(1)),$$

а

$$\|f\|^p_{L_p^{m*}(D)} = \|f\|^p_{L_p^m(D_1)} + \|f\|^p_{L_p^m(D_2)},$$

получаем

$$|(\ell^h, f)| \leq A_p^m (mes\, D)^{1/q} h^m (1+o(1)) \|f\|_{L_p^m(D)}$$

и

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(D)} \leq A_p^m (mes\, D)^{1/q} h^m (1+o(1)). \qquad (2)$$

Для получения нижней оценки введем следующие области множества, $i=1,2$:

$$R_{1,i}^h = \{\gamma : \gamma \in R^n,\ \Omega_\gamma^h \subset \bar{D}_i\};\quad \Omega_{1,i}^h = \bigcup_{\gamma \in R_{1,i}^h} \Omega_\gamma^h;$$

$$R^h_{2,i} = \{\gamma : \gamma \in R^n,\ \Omega^h_\gamma \subset \Omega^h_{1,i}\ ;\ d(\Omega^h_\gamma,\ \partial\Omega^h_{1,i}) > 0\};$$

$$R^h_{3,i} = \{\gamma : \gamma \in R^n,\ \Omega^{h/2}_\gamma \subset \Omega^h_{1,i}\ ;\ d(\Omega^{h/2}_\gamma,\ \partial\Omega^h_{1,i}) > 0\};$$

$$\Omega^h_{2,i} = \bigcup_{\gamma \in R^h_{2,i}} \Omega^h_\gamma\ ;\quad \Omega^h_{3,i} = \bigcup_{\gamma \in R^h_{3,i}} \Omega^{h/2}_\gamma .$$

Введем также функции $\omega(x)$, $\omega_n(x)$, $\eta^i_h(x)$; $\omega(x)$ - неотрицательная функция одного переменного, $\omega(x) = 0$ при $|x| > \frac{1}{2}$ и имеет непрерывные производные до порядка m,

$$\int_{-1/2}^{1/2} \omega(x)dx = 1.$$

При $x = (x_1, \ldots, x_n)$ функция

$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^{n} \omega(x_i)^{-\frac{1}{2}} .$$

Функция

$$\eta^i_h = (h/2)^{-n} \int_{\Omega^h_{3,i}} \omega_n\left(\frac{x-y}{h/2}\right) dy .$$

Если $\varphi_i(x) \in \widetilde{W}^m_p(D_i)$ - экстремальная функция функционала ℓ_i, $i = 1,2$, $\|\varphi_i\|_{L^m_p(D_i)} = 1$, то обозначим через $\varphi_h(x)$ функцию

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} \eta^i_h(x)\left[\varphi_i\left(\frac{x}{h}\right) - \varphi_i(0)\right] & \text{при } x \in D_i,\ i = 1,2; \\ 0 & \text{при } x \notin D. \end{cases}$$

Функции φ_h, по построению, обладают следующими свойствами:

1) $\varphi_h \in L^m_p(E^n)$;

2) $\varphi_h(h\gamma) = 0$ при $\gamma \in R^n$;

3) существуют функции $g_1, \ldots, g_s \in L^m_p(G)$, обладающие в совокупности свойством: " каковы бы ни были $\gamma \in R^n$ и h, существует $k \in \{1, \ldots, s\}$ такое, что в Ω^h_γ

$$\varphi_h(x) = g_\kappa\left(\frac{x}{h} - \gamma\right)^m;$$

4) $\varphi_h(x) = \varphi\left(\frac{x}{h}\right) - \varphi(0)$ в $\Omega^h_{2,1} \cup \Omega^h_{2,2}$.

Так как

$$\|\varphi_h(x)\|^p_{L^m_p(D)} = \left\|\varphi_1\left(\frac{x}{h}\right) - \varphi_1(0)\right\|^p_{L^m_p(D_1)} + \left\|\varphi_2\left(\frac{x}{h}\right) - \varphi_2(0)\right\|^p_{L^m_p(D_2)}$$

и при $h \to 0$ количество $\gamma \in R^n$ таких, что $[h\gamma] \in \Omega^h_{2,i}$, $i=1,2$, $\varphi_h(x) \neq 0$ в Ω^h_γ, - бесконечно большая величина низшего порядка по сравнению с количеством $\gamma \in R^n$, $[h\gamma] \in \Omega^h_{2,i}$, то из свойств 3,4 функции $\varphi_h(x)$ следует

$$\|\varphi_h\|^p_{L^m_p(E^n)} = \|\varphi_h(x)\|^p_{L^m_p(\Omega^h_{2,1} \cup \Omega^h_{2,2})}(1+o(1)) =$$

$$= \left\|\varphi_1\left(\frac{x}{h}\right) - \varphi_1(0)\right\|^p_{L^m_p(\Omega^h_{2,1})} + \left\|\varphi_2\left(\frac{x}{h}\right) - \varphi_2(0)\right\|^p_{L^m_p(\Omega^h_{2,2})}(1+o(1)). \qquad (3)$$

С другой стороны,

$$\left\|\varphi_i\left(\frac{x}{h}\right)\right\|^p_{L^m_p(D_i)} = \frac{mes\, D_i}{h^n}(1+o(1))\int\limits_{\{x:[x/h]\in G\}}\left[\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\left[\varphi\left(\frac{x}{h}\right)^{(\alpha)}\right]^2\right]^{p/2}dx \doteq$$

$$= (mes\, D_i)\, h^{-mp-n}(1+o(1))\int\limits_{\{x:[x/h]\in G\}}\left[\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\left[\varphi^{(\alpha)}\left(\frac{x}{h}\right)\right]^2\right]^{p/2}dx = (mes\, D_i)\, h^{-mp}(1+o(1)). \qquad (4)$$

Из (3) , (4) получаем, что

$$\|\varphi_h(x)\|^p_{L^m_p(D)} = mes\, D\, h^{-mp}(1+o(1)). \qquad (5)$$

Найдем значение ℓ на функции φ_h :

$$(\ell, \varphi_h) = \int\limits_D \varphi_h(x)dx = \int\limits_{D_1}\varphi_h(x)dx + \int\limits_{D_2}\varphi_h(x)dx =$$

$$= (1+o(1))\left(\int\limits_{\Omega^h_{2,1}}\left(\varphi_1\left(\frac{x}{h}\right) - \varphi_1(0)\right)dx + \int\limits_{\Omega^h_{2,2}}\left(\varphi_2\left(\frac{x}{h}\right) - \varphi_2(0)\right)dx =\right.$$

$$= (1+o(1))\,(\operatorname{mes} D_1 \int\limits_G [\varphi_1(x)-\varphi_1(0)]\,dx + \operatorname{mes} D_2 \int\limits_G [\varphi_2(x)-\varphi_2(0)]\,dx).$$

Так как

$$\int\limits_G [\varphi_i(x)-\varphi_i(0)]\,dx = (\ell_i,\varphi) = \|\ell_i\| = A_p^m,\ ([3]),\ i=1,2,$$

то $(\ell,\varphi^h) = (1+o(1))\,A_p^m \operatorname{mes} D.$ (6)

Из (5) , (6) имеем

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(D)} \geq \frac{|(\ell^h,\varphi_h)|}{\|\varphi_h\|_{L_p^m(D)}} = h^m (\operatorname{mes} D)^{1/q} A_p^m\,(1+o(1)). \qquad (7)$$

Из (2) и (7) следует утверждение леммы.

Метод доказательства леммы близок методу, примененному в [6] .

Теорема. *Последовательность* $\{\ell^h\}$ *функционалов погрешностей с пограничным слоем вида*

$$(\ell^h,f) = \int\limits_M f(\sigma)\,d\sigma - \sum_{\gamma\in\Gamma^h(M)} c_\gamma^h f(\gamma),$$

сопутствующий функционал которой в $\hat{L}_p^m$ *обладает экстремальной функцией из* $\widetilde{W}_p^m$ *, асимптотически оптимальна в* $L_p^m(M)$ *, и*

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(M)} = (\operatorname{mes} M)^{1/q} h^m A_p^m\,(1+o(1)).$$

Доказательство. Для простоты положим $M=M_1\cup M_2$, $M_{12}=M_1\cap M_2$ - объединение двух связных непересекающихся множеств L' и L'' . Выберем на $\partial L'$ точки A' , B' , а на L'' точки A'' , B'' таким образом, чтобы некоторые кривые g_1 и g_2 , $g_1\subset L'$, $g_2\subset L''$, $A',B'\in g_1$, $A'',B''\in g_2$, разбивали M на части W_i , $W_i\subset M_i$, $i=1,2$. Положим $D_1=g_1W_1$, $D_2=g_2W_2$. Будем считать, что g_1,g_2 выбраны так, что $D_1\cap D_2=0$. Построим на D_i функционалы погрешностей с пограничным слоем с сопутствующим функционалом ℓ , $\operatorname{supp}\ell_i^h\subset\bar{D}_i$. Каждый из этих функционалов индуцирует на M функционал ℓ_i^h . Пусть $\ell_1^h = \mathring{\ell}_1^h + \mathring{\ell}_2^h$. Заметим, что

$$\mathring{\ell}_i^h = \sum_{\Delta_i} \mathring{\ell}_\xi^h,$$

где Δ_i - множество точек, индексирующих $S_\xi^\ell \cap W_i$, $i=1,2$. Заметим, что

$$\| \ell_1^h - \ell^h \|_{L_p^{m*}(M)} = o(h^m).$$

В самом деле, функционалы ℓ^h и ℓ_1^h отличаются только для множества $\mu_h \subset \Delta$, состоящего из ξ, отстоящих от ∂W_1 и ∂W_2 на расстоянии, меньшем Lh, L - постоянная, не зависящая от h. Тогда

$$\rho^h = \ell^h - \ell_1^h = \sum_{\xi \in \mu_h} \delta_\xi^h ,$$

причем из построения ℓ^h и ℓ_1^h следует, что $supp\, \delta_\xi^h$ равномерно ограничены, и если $M_\xi^h = supp\, \delta_\xi^h$, то

$$\| \delta_\xi^h \|_{L_p^{m*}(M_\xi^h)} \leqslant K h^{m+nq^{-1}}, \tag{8}$$

число $\xi \in \mu_h$ равно $o(h^{-n})$, поэтому $\|\rho^h\|_{L_p^{m*}(M)} = o(h^m)$. Действительно, учитывая, что $mes\, M_\xi^h < Nh^n$, N не зависит от h, ξ, имеем

$$|(\rho^h, f)| \leqslant \sum_{\xi \in \mu_h} \|\delta_\xi^h\|_{L_p^{m*}(M_\xi^h)} \cdot \|f\|_{L_p^m(M_\xi^h)} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{\gamma \in M_h} \|\delta_\xi^h\|^q_{L_p^{m*}(M_\xi^h)} \Big)^{1/q} \Big(\sum_{\xi \in \mu_h} \|f\|^p_{L_p^m(M_\xi^h)} \Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \big(o(h^{-n}) \big)^{1/q} K_1 h^{m+nq^{-1}} \|f\|_{L_p^m(M)} = o(h^m) \cdot \|f\|_{L_p^m(M)} .$$

Таким образом, из неравенства

$$\|\ell_1^h\|_{L_p^{m*}(M)} - \|\rho^h\|_{L_p^{m*}(M)} \leqslant \|\ell^h\|_{L_p^{m*}(M)} \leqslant \|\rho^h\|_{L_p^{m*}(M)} + \|\ell_1^h\|_{L_p^{m*}(M)}$$

следует

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(M)} = \|\ell_1^h\|_{L_p^{m*}(M)} + o(h^m).$$

Замечая, что $\mathrm{mes}\, M = \mathrm{mes}\, D_1 + \mathrm{mes}\, D_2$,

$$(\ell_1^h, f) = (\mathring{\ell}_1^h, f_1) + (\mathring{\ell}_2^h, f_2),\ \|f\|_{L_p^m(M)} = \|f_1\|_{L_p^m(D_1)} + \|f_2\|_{L_p^m(D_2)},$$

и учитывая асимптотическую оптимальность последовательностей $\{\mathring{\ell}_1^h\}, \{\mathring{\ell}_2^h\}$ в $L_p^m(D_1)$ и $L_p^m(D_2)$, из леммы сразу получаем справедливость утверждения теоремы.

Замечание. В [5] использовалось множество параметров $H = \{t^{-1}, t^{-2}, \ldots\}$, t - некоторое натуральное число, $t = 1$. На основе результатов [7] утверждения из [5] обобщаются на произвольное множество параметров H.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974.- 803 с.
2. Половинкин В.И. Декартовы произведения формул прямоугольников с регулярным пограничным слоем.- 5-е советско-чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. Тез. докл., Новосибирск, 1978, с.248-250.
3. Носков М.В. Приближенное интегрирование функций, периодических по некоторым переменным.- Деп. ВИНИТИ 13.07.82., № 3698-82, Деп.- 25 с.
4. Носков М.В. Кубатурные формулы на развертывающихся поверхностях.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 1978, вып.51, с.91-96.
5. Половинкин В.И. Асимптотическая оптимальность последовательностей формул с регулярным пограничным слоем при нечетных m.- Сиб.мат.журн., 1975, т.16, № 2, с.328-335.
6. Половинкин В.И. Некоторые оценки норм функционалов ошибок кубатурных формул.- Мат. заметки, 1969, т.5, № 3, с.317-322.
7. Бесов О.В. Оценки погрешностей кубатурных формул по гладкости функций.- Труды Мат. ин-та АН СССР, 1978, т.150, с. 11-23.