УДК 517+518.87

ВЕСОВЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ УЗЛАМИ

В.И. Половинкин (Красноярск)

Изучение весовых кубатурных формул с произвольными узлами существенно сложней, чем формул с постоянной весовой функцией. Об этом свидетельствует, в частности, то, что вопросы, связанные с порядком убывания норм функционалов ошибок кубатурных формул, когда число узлов неограниченно возрастает, были исследованы позднее (см., например, [1,2]), чем эти вопросы для весовых кубатурных формул в [3], где рассматривались формулы с квадратично интегрируемой весовой функцией в пространстве $L_2^m(E_n)$.

В настоящей работе оценивается величина $\mathcal{J}(g,N)$, являющаяся наибольшей нижней гранью норм в $L_p^{m*}(\Omega)$, $p\in(1,\infty)$, функционалов ошибок кубатурных формул для интегрирования по ограниченной измеримой области Ω в n-мерном пространстве, $n<pm$, с весовой функцией $g\in L_q(\Omega)$, $\|g\|_{L_q(\Omega)}\neq 0$, $q=p(p-1)^{-1}$ и N-узлами; доказывается существование констант $K_1, K_2>0$, не зависящих от $g\in L_q(\Omega)$ и таких, что при больших N имеет место

$$K_1\|g\|_{L_q(\Omega)}N^{-m/n}<\mathcal{J}(g,N)<K_2\|g\|_{L_q(\Omega)}N^{-m/n}, \qquad (1)$$

где

$$r = qn(qm+n)^{-1} < 1, \quad \|g\|_{L_r(\Omega)} = \left(\int_\Omega |g(x)|^r dx\right)^{1/r}.$$

Так как $r < q$ и Ω ограничена, то из неравенства Гёльдера следует, что

$$\|g\|^r_{L_r(\Omega)} \leqslant \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{r/q} \left(\int_\Omega dx\right)^{1-\frac{r}{q}}$$

и нормы $\|g\|_{L_r(\Omega)}$ определены при $g \in L_q(\Omega)$.

Из (1) непосредственно следует теорема о наилучшем порядке стремления $J(g,N)$ к 0 при $N \to \infty$, опубликованная без доказательства в [4] (см. теорему 2). Формула (1) показывает, что у непостоянных весовых функций оценки $J(g,N)$ при $N \to \infty$ существенно отличаются от оценок главных членов норм функционалов ошибок решетчатых весовых кубатурных формул (см. [4,5] и аналогичных оценок из [6] для кубатурных формул в пространствах типа $W_p^m(E_n)$, пропорциональных $\|g\|_{L_q(\Omega)}$). Ниже также выводятся оценки погрешностей весовых кубатурных формул, построенных с помощью последовательностей равномерно распределенных интерполяционных операторов, приведенные в [4] без доказательства и использованные при выводе (1), а также результатов из [4,5], относящихся к решетчатым весовым формулам.

Введем обозначения: p, q, m, n, r, g - числа и функция, требования к которым описаны выше при разъяснении формулы (1); E_n - n-мерное евклидово пространство; Ω - область в E_n; R - множество целочисленных векторов E_n; $G = \{(X_1, \ldots, X_n): 0 < x_1, \ldots, x_n = \overline{x_1, x_n} < 1\}$;

h - положительный параметр; если $\gamma \in R$, то

$$\Omega_\gamma^h = \{x : x = hy + h\gamma, \ y \in G\};$$

$$Q(h,\gamma) = \Omega_\gamma^h \cap \Omega; \quad B_h = \{\gamma : \gamma \in R, \ \mathrm{mes}\, Q(h,\gamma) > 0\};$$

если x - точка E_n, то V_x^h - замкнутый шар радиуса h с цент-

ром в x ; P^m - множество многочленов степени ниже m.

Если M - область, то обозначим: $W_p^m(M)$ - множество функций, обладающих в M всеми обобщенными производными порядка m, суммируемыми в степени p ; $L_p^m(M)$ - линейное нормированное пространство, индуцированное на $W_p^m(M)$ полунормой

$$\| f(x) \|_{L_p^m(M)} = \| f(x_1,\dots,x_n) \|_{L_p^m(M)} = \left[\int_M \left[\sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_m=1}^{n} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \right)^2 \right]^{p/2} dx \right]^{1/p},$$

$L_p^{m*}(M)$ - пространство, сопряженное с $L_p^m(M)$.

В дальнейшем область Ω считаем ограниченной и удовлетворяющей условиям: существуют числа $K, \delta > 0$, обладающие тем свойством, что для любых $h \in (0,\delta]$ и точки $x \in \Omega$ найдутся число $\varepsilon = \varepsilon(x,h) > 0$ и точка $y = y(x,h)$ такие, что $K\varepsilon > \delta$ и больше расстояния между x и y ; при $z_1 \in V_x^h \cap \Omega$, $z_2 \in V_y^\varepsilon$, числе $t \in [0,1]$ точки

$$[z_1 + t(z_2 - z_1)] \in \Omega.$$

Как показано в [7], условиям на Ω, сформулированным выше, удовлетворяет всякая область, звездная относительно некоторого содержащегося в ней шара. Для областей рассматриваемого класса справедливы теоремы С.Л. Соболева [8] для вложений пространств типа W_p^m.

В данной статье исследуются кубатурные формулы с функционалами ошибок $\ell^N \in L_p^{m*}(\Omega)$ вида

$$(\ell^N, f) = \int_\Omega g(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^{N} C_k^N f(x_k^N), \tag{2}$$

где $C_1^N, \dots, C_N^N$ - постоянные, $x_1^N, \dots, x_N^N$ - точки из Ω.

Определение. Семейство операторов $\{\mathcal{J}^h\}$ называется семейством равномерно распределенных интерполяционных операторов в Ω, если все $\mathcal{J}^h$ определены на функциях, непрерывных в Ω, и представимы в виде сумм интерполяционных операторов $\mathcal{J}_\gamma^h$, $\mathcal{J}^h = \sum_{\gamma \in B_h} \mathcal{J}_\gamma^h$, обладающих следующими

свойствами:

а) существуют положительные числа s, M, t (t - натуральное), функции $g^h_{\gamma,i}$, равные 0 вне $Q(h,\gamma)$ и непрерывные в $Q(h,\gamma)$, точки $x^h_{\gamma,i} \subset V^{hs}_{h\gamma} \cap \Omega$, $\gamma \in B_h$, $i=\overline{1,t}$, такие, что

$$(J^h_\gamma f)(x) = \sum_{i=1}^{t} f(x^h_{\gamma,i}) g^h_{\gamma,i}(x), \quad |g^h_{\gamma,i}(x)| < M, \tag{3}$$

б) если $f \in P^m$,

то

$$(J^h_\gamma f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in Q(h,\gamma), \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus Q(h,\gamma). \end{cases}$$

Для рассматриваемых нами Ω всегда можно построить семейства равномерно распределенных интерполяционных операторов. Покажем один из возможных способов их построения.

При достаточно большом натуральном N можно выбрать точки $x_1, \dots, x_N \in V^1_{(0,\dots,0)}$, многочлены $g_1, \dots, g_N$ и оператор U вида

$$U(f) = \sum_{K=1} g_K(x) \cdot f(x_K)$$

так, что $Uf=f$ при $f \in P^m$. Зафиксируем такое U.

Из условий на Ω следует, что при малых $h, \gamma \in B_h$ можно найти числа $\varepsilon = \varepsilon(h,\gamma) > 0$ и точки $y = y(h,\gamma)$ такие, что $V^\varepsilon_y \subset \Omega$, и как $\varepsilon(h,\gamma)$, так и расстояния от $h\gamma$ до $y(h,\gamma)$ меньше Th, где T - число, не зависящее от h и γ. Определим операторы $A^h_\gamma, B^h_\gamma, U^h_\gamma$, $\gamma \in B_h$:

$$(A^h_\gamma f)(x) = f(x\varepsilon + y), \quad (B^h_\gamma f)(x) = f\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right), \quad U^h_\gamma = B^h_\gamma U A^h_\gamma .$$

Операторы B_γ^h, A_γ^h, U тождественны на P^m. Операторы A_γ^h отображают P^m также в P^m. Поэтому U_γ^h тождественны на P^m.

Положим

$$(J_\gamma^h f)(x) = \begin{cases} (U_\gamma^h f)(x) & \text{при } x \in Q(h,\gamma), \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus Q(h,\gamma). \end{cases}$$

Операторы

$$J^h = \sum_{\gamma \in B_h} J_\gamma^h$$

образуют семейство равномерно распределенных интерполяционных операторов в Ω.

Теорема 1. *Пусть* $\{J^h\}$ *- семейство равномерно распределенных операторов в* Ω, ℓ^h *- функционалы*,

$$(\ell^h, f) = \int_\Omega g(x)[f - J^h f](x)dx. \tag{4}$$

Тогда существуют числа K, $h_0 > 0$ *такие, что для любых* $h < h_0$ *и* $g \in L_q(\Omega)$ *справедливо*

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} < K \|g\|_{L_q(\Omega)} h^m. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\{J^h\}$ - семейство равномерно распределенных интерполяционных операторов в Ω; ℓ^h - функционалы (4); операторы J^h и число s соответствуют $\{J^h\}$ в определении семейств равномерно распределенных интерполяционных операторов. Считаем s таким, что $Q(h,\gamma) \subset V_{h\gamma}^{hs}$ при $\gamma \in B_h$. Это условие не умаляет полученных ниже результатов.

Положим

$$(\ell_\gamma^h, f) = \int\limits_{Q(h,\gamma)} g(x)\,[f - \mathcal{J}_\gamma^h f](x)\,dx .$$

функционалы ℓ^h и ℓ_γ^h связаны соотношениями: $\ell^h = \sum\limits_{\gamma\in B_h} \ell_\gamma^h$. Из неравенства Гёльдера при $f \in W_p^m(\Omega)$ следует

$$|(\ell_\gamma^h, f)| \leq \|g\|_{L_q(Q(h,\gamma))} \|f - \mathcal{J}_\gamma^h f\|_{L_p(Q(h,\gamma))} . \tag{6}$$

Еще раз применяя неравенство Гёльдера, учитывая (6) , находим

$$|(\ell^h, f)| = |(\sum_{\gamma\in B_h} \ell_\gamma^h, f)| \leq \sum_{\gamma\in B_h} |(\ell_\gamma^h, f)| \leq$$

$$\leq \sum_{\gamma\in B_h} \|g\|_{L_q(Q(h,\gamma))} \|f - \mathcal{J}_\gamma^h f\|_{L_p(Q(h,\gamma))} \leq$$

$$\leq \|g\|_{L_q(\Omega)} \Big(\sum_{\gamma\in B_h} \|f - \mathcal{J}_\gamma^h f\|^p_{L_p(Q(h,\gamma))}\Big)^{1/p} . \tag{7}$$

Для областей, рассматриваемых в настоящей работе, справедливо следующее утверждение, равносильное формуле (22) из [9] при $\alpha = 0$.

Лемма 1. *Существуют постоянные* $K_1, s(1), h_0 > 0$ *, зависящие только от* Ω *, такие, что в каждом* $V_{h\gamma}^{s,h}$, $\gamma \in B_h$, $h < h_0$, $f = u_\gamma^h + P_\gamma^h$, *где* $P_\gamma^h \in P^m$,

а

$$|u_\gamma^h(x)| < K_1 h^{m - \frac{n}{p}} \|f\|_{L_p^m(V_{h\gamma}^{sh} \cap \Omega)} . \tag{8}$$

Замечания. Формула (22) в [9] справедлива лишь при малых h . Ее правая часть записана неточно. Для точной записи в ней необходимо заменить

$\Omega_\gamma^{r,h}$ на $\Omega_\gamma^{r,h} \cap \Omega$.

В [9] использовался тот факт, что константа K_5 , присутствующая в доказательстве формулы (22) упомянутой работы, не зависит от γ . Хотя этот факт точно в [9] не отражен, он явствует из доказательства формулы (22) .

Считаем далее $h < h_0$ из леммы 1.

Так как $(\ell_\gamma^h, P_\gamma^h) = 0$, $\gamma \in B_h$, $Q(h,\gamma) \subset V_{h\gamma}^{hs} \cap \Omega$,

то из (7) и (3) находим, что существует число $K_2 > 0$ такое, что

$$|(\ell^h, f)| \leq \|g\|_{L_q(\Omega)} \left(\sum_{\gamma \in B_h} \|u_\gamma^h - \mathcal{J}_\gamma^h u_\gamma^h\|^p_{L_p(Q(h,\gamma))} \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq h^{n/p} \|g\|_{L_q(\Omega)} \left(\sum_{\gamma \in B_h} \left[\sup_{x \in Q(h,\gamma)} \left\{ |(u_\gamma^h - \mathcal{J}_\gamma^h u_\gamma^h)(x)| \right\} \right]^p \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq K_2 h^{n/p} \|g\|_{L_q(\Omega)} \left(\sum_{\gamma \in B_h} \left[\sup_{x \in V_{h\gamma}^{sh} \cap \Omega} \left\{ |u_\gamma^h(x)| \right\} \right]^p \right)^{1/p}. \tag{9}$$

Сравнивая (9) и (8) , получаем

$$|(\ell_\gamma^h, f)| \leq K_1 K_2 h^m \|g\|_{L_q(\Omega)} \left(\sum_{\gamma \in B_h} \|f\|^p_{L_p^m(V_{h\gamma}^{s(1)h} \cap \Omega)} \right)^{1/p}. \tag{10}$$

Так как при $\gamma \in B_h$ количество множеств $V_{h\beta}^{s(1)h}$, $\beta \in B_h$, имеющих непустое пересечение с $V_{h\beta}^{s(1)h}$, равномерно ограничено относительно $h, \gamma \in B_h$, то из (10) при некоторой $K > 0$ вытекает (5) и теорема 1 доказана.

Пусть $L(N)$ - совокупность функционалов (2) , равных 0 на P^m и

$$\mathcal{J}(g,N) = \inf_{\ell \in L(N)} \left\{ \|\ell\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \right\} .$$

Теорема 2. а) *Существует постоянная* $K_1>0$ *такая, что для любой* $g\in L_q(\Omega)$, $\|g\|_{L_q(\Omega)}\neq 0$, *при больших* N *выполняется*

$$\mathcal{J}(g,N)<K_1N^{-m/n}\|g\|_{L_q(\Omega)}, \tag{11}$$

но

б) не существует $K_2>0$ *такой, что для любой* $g\in L_q(\Omega)$ *при больших* N *выполняется*

$$\mathcal{J}(g,N)>K_2N^{-m/n}\|g\|_{L_q(\Omega)}.$$

Доказательство. а) Пусть $\{\mathcal{J}^h\}$ - некоторое семейство равномерно распределенных операторов в Ω , ℓ^h - функционалы (4) . Если $\{\ell^h\}$ записать в виде (2) с $N=N(h)$, то величина $h^mN^{m/n}$ ограничена положительной постоянной, не зависящей от $g\in L_q(\Omega)$. Отсюда, из (5) и того факта, что при увеличении N $\mathcal{J}(g,N)$ не возрастает, следует утверждение а) теоремы.

Утверждение б) следует из теоремы 3, приводимой ниже.

Теорема 3. *Существуют константы* $K_1,K_2>0$ *такие, что для любой* $g\in L_q(\Omega)$, $\|g\|_{L_q(\Omega)}\neq 0$, *при больших* N *выполняется* (1) .

Сначала покажем, как отсюда вытекает утверждение б) теоремы 2.

Пусть точка $z\in\Omega$, g_h - функции, равные 1 в V_z^h, 0 - в $\Omega\setminus V_z^h$. Тогда $\{\|g_h\|_{L_2(\Omega)}/\|g_h\|_{L_q(\Omega)}\}\longrightarrow 0$ при $h\to 0$.
Отсюда и из левого неравенства (1) следует утверждение б) теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Обозначим через Φ^h множество функций, постоянных во всех $Q(h,\gamma)=\Omega_\gamma^h$, $\gamma\in R$, и равных 0 вне их в Ω . Положим $\Phi=\bigcup\limits_{h>0}\Phi^h$.

Покажем, что существуют постоянные K_1, $K_2>0$ такие, что для любой $g\in\Phi$ при достаточно больших N выполняется (1) .

Пусть функция $g\in\Phi^\tau$ при некотором $\tau>0$ в кубах $\Omega^\tau_{\gamma(i)}$, $i=\overline{1,S}$, принимает значения C_i и равна вне их 0 .

Выберем некоторую последовательность функционалов $\{\ell^N\}$, равных 0 на P^m :

$$(\ell^N, f) = \int_G f(x)dx - \sum_{K=1}^{N} c_K^N f(x_K^N), \tag{12}$$

где $x_1^N, \ldots, x_N^N$ - точки G, $c_1^N, \ldots, c_N^N$ - постоянные, такую, что

$$\| \ell^N \|_{L_p^{m*}(G)} < A N^{-m/n}. \tag{13}$$

Здесь A - положительная постоянная. Подобная последовательность может быть построена, например, с помощью некоторого семейства $\{\mathcal{J}^h\}$ равномерно распределенных интерполяционных операторов в G и формулы (4) с $g \equiv 1$. Определим функционалы ℓ_i^N, $i = \overline{1, S}$:

$$(\ell_i^N, f) = \int_{\Omega_{\gamma(i)}^{\tau}} f(x)dx - \tau^n \sum_{K=1}^{N} c_K^N f(\tau\gamma(i) + \tau x_K^N). \tag{14}$$

Функционалы ℓ_i^N, $i = \overline{1, S}$, получены из ℓ^N с помощью сдвигов и растяжений аргументов. Поэтому из (12) - (14) следует, что

$$\| \ell_i^N \|_{L_p^{m*}(\Omega)} \leq \| \ell_i^N \|_{L_p^{m*}(\Omega_{\gamma(i)}^{\tau})} < A \tau^{m + \frac{n}{q}}. \tag{15}$$

Выберем натуральные числа $\overline{N(1), N(S)}$, $N(1) + \ldots + N(S) = N$ так, чтобы при $N \longrightarrow \infty$ выполнялось

$$N(i) = |c_i|^{\tau} N \left(\sum_{i=1}^{S} |c_i|^{\tau} \right)^{-1} \left(1 + o(1)\right), \tag{16}$$

и положим

$$\ell^N = \sum_{i=1}^{S} c_i \ell_i^{N(i)}.$$

Если функция $f \in W_p^m(\Omega)$, то аналогично выводу (7) из (15) полу-

чаем

$$|(\ell^N, f)| \leq \sum_{i=1}^{s} |c_i| \, \|\ell_i^{N(i)}\|_{L_p^{m*}(\Omega_{j(i)}^{\tau})} \|f\|_{L_p^m(\Omega_{j(i)}^{\tau})} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{s} |c_i|^q \|\ell_i^{N(i)}\|^q_{L_p^{m*}(\Omega_{j(i)}^{\tau})}\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{s} \|f\|^p_{L_p^m(\Omega_{j(i)}^{\tau})}\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq A\tau^{m+\frac{n}{q}} \left(\sum_{i=1}^{s} (N(i))^{-\frac{mq}{n}} |c_i|^q\right)^{1/q} \|f\|_{L_p^m(\Omega)} . \qquad (17)$$

Учитывая (16) , находим, что при $N \to \infty$ выполняется

$$\tau^{m+\frac{n}{q}} \left(\sum_{i=1}^{s} (N(i))^{-\frac{mq}{n}} |c_i|^q\right)^{1/q} =$$

$$= \tau^{m+\frac{n}{q}} \left(\sum_{i=1}^{s} |c_i|^{\tau}\right)^{1/\tau} N^{-m/n} \left(1 + o(1)\right) =$$

$$= N^{-m/n} \left(\sum_{i=1}^{s} |c_i|^{\tau} \tau^n\right)^{1/\tau} \left(1 + o(1)\right). \qquad (18)$$

Сравнивая (17) с (18) , получаем правое неравенство (1) с $K_1 = A$.

Условимся, что $\overline{c_1, c_s} \neq 0$. Это не умалит полученных ниже результатов. Аналогично устанавливается [8, теорема XУ1.1] следующая

Лемма 2. *Пусть* $\{\ell^N\}$ *– произвольная последовательность функционалов* (12) *. Тогда существуют постоянная* $T > 0$ *, не зависящая от выбора* $\{\ell^N\}$ *, и функции* $\omega_N \in W_p^m(G)$ *, равные* 0 *в* $x_1^N, \ldots, x_N^N$ *и в некоторой окрестности границы* G *, удовлетворяющие неравенствам*

$$(\ell^N, \omega_N) > TN^{-m/n} \|\omega_N\|_{L_p^m(G)} .$$

Доказательство. Пусть $\{\ell^N\}$ - некоторая последовательность функ-

ционалов (12) . Обозначим: $h=h(N)=(3N)^{-1/n}$, $M(N)$ - множество $\gamma\in R$ таких, что $\Omega_\gamma^h\subset G$ и не содержит $x_1^N,\dots,x_N^N$, $\mu(N)=mes\left[\bigcup_{\gamma\in M(N)}\Omega_\gamma^h\right]$. Из определения $\mu(N)$ следует, что существует число h_0, не зависящее от $\{\ell^N\}$ и такое, что при $h<h_0$ верно $3^{-1}<\mu(N)<1$.

Пусть w - некоторая заданная в E_n функция, m раз непрерывно дифференцируемая, неотрицательная и такая, что $\int_G w(x)dx>0$. Пусть функция w равна 0 вне G и в некоторой окрестности границы G.

Обозначим

$$w_N(x)=\sum_{\gamma\in M(N)} w(xh^{-1}-\gamma).$$

Из определения w_N следует, что

$$(\ell^N, w_N)=\mu(N)\int_G w_N(x)dx,$$

$$\|w_N\|^p_{L_p^m(G)}=\mu(N)h^{-mp}\|w_N\|^p_{L_p^m(G)}.$$

Сравнивая равенства, написанные выше, получаем лемму 2.

Замечание. В этой лемме 2 не предполагается, что функционалы ℓ^N равны 0 на P^m.

Из леммы 2 вытекает, что для любых функционалов $\ell_i^{N(i)}$, $i=\overline{1,S}$,

$$(\ell_i^{N(i)},f)=\int_{\Omega^\tau_{\gamma(i)}} f(x)dx-\sum_{K=1}^{N(i)} c_{K,i}^{N(i)} f(x_{K,i}^{N(i)}), \tag{19}$$

где $c_{K,i}^{N(i)}$ - постоянные, $x_{K,i}^{N(i)}$, $K=\overline{1,N(i)}$, - точки из $\Omega^\tau_{\gamma(i)}$, существуют функции $w_i^{N(i)}\in W_p^m(\Omega)$, равные 0 в $x_{K,i}^{N(i)}$ и вне $\Omega^\tau_{\gamma(i)}$, такие, что

$$(\ell_i^{N(i)}, w_i^{N(i)})>T\tau^{m+\frac{n}{q}}[N(i)]^{m/n};\quad \|w_i^{N(i)}\|_{L_p^m(\Omega)}=1. \tag{20}$$

Пусть $\{\ell^N\}$ - некоторая последовательность функционалов (2) . Определим функционалы $\ell_i^{N(i)}$, $i=\overline{1,S}$:

$$(\ell_i^{N(i)}, f) = c_i^{-1}\Big[\int\limits_{\Omega^{\tau}_{j(i)}} g(x) f(x)dx - \sum_{\substack{i=1\\ x_k^N \in \Omega^{\tau}_{j(i)}}}^{N} c_k^N f(x_k^N)\Big]. \tag{21}$$

По построению, $\ell_i^{N(i)}$ являются функционалами вида (19) . Обозначим через $N(i), i=\overline{1,S}$, количества слагаемых в суммах из правой части (21) ; через $\omega_i^{N(i)}$ - функции из (20) , соответствующие функционалам $\ell_i^{N(i)}$ вида (21) . Положим

$$\omega_N(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} |c_i|^{q/p} \operatorname{sign} c_i \,[N(i)]^{-\frac{qm}{pn}} \omega_i^{N(i)}(x)}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{s} |c_i|^q \,[N(i)]^{-\frac{qm}{n}}\Big)^{1/p}} . \tag{22}$$

Так как $\omega_N(x) = 0$ вне

$$\bigcup_{i=1}^{s} \Omega^{\tau}_{j(i)} ,$$

то

$$(\ell^N, \omega_N) = \sum_{i=1}^{s} (\ell^{N(i)}, \omega_N).$$

Кроме того, равенства, справа в (20) и (22) показывают, что $\|\omega_N\|_{L_p^m(\Omega)} = 1$.

Отсюда, из неравенства слева в (20) и (22) вытекает

$$\|\ell^N\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \geq \sum_{i=1}^{s} c_i (\ell_i^{N(i)}, \omega_N) =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{s} |c_i|^q [N(i)]^{-\frac{qm}{n}}\Big)^{1/p} \sum_{i=1}^{s} |c_i|^q [N(i)]^{-\frac{m}{n}(q-1)} (\ell_i^{N(i)}, \omega_i^{N(i)}) >$$

$$> T\tau^{m+\frac{n}{q}} \Big(\sum_{i=1}^{s} |c_i|^q [N(i)]^{-\frac{qm}{n}}\Big)^{1/q}. \tag{23}$$

С помощью метода Лагранжа исследования задач на условный экстремум можно ус-

тановить, что для $\lambda, \overline{a_1, a_s} > 0$ при условии $\sum_{i=1}^{s} x_i = R > 0$ справедливо

$$\min_{\overline{x_1, x_s} > 0} \left(\sum_{i=1}^{s} a_i x_i^{-\lambda} \right) = R^{-\lambda} \left(\sum_{i=1}^{s} a_i^{1/(1+\lambda)} \right)^{1+\lambda} . \tag{24}$$

Полагая в (24) $\lambda = qm/n, \quad R = \sum_{i=1}^{s} N(i), \quad a_i = |c_i|^q, \quad i = \overline{1,s},$

получаем

$$\sum_{i=1}^{s} |c_i|^q [N(i)]^{-\frac{qm}{n}} \geq \left[\sum_{i=1}^{s} N(i) \right]^{-\frac{qm}{n}} \left(\sum_{i=1}^{s} |c_i|^{\tau} \right)^{1/\tau} \geq$$

$$\geq N^{-\frac{qm}{n}} \left(\sum_{i=1}^{s} |c_i|^{\tau} \right)^{1/\tau} . \tag{25}$$

Сравнивая (25) с (23), находим, что

$$\|\ell^N\|_{L_p^{m*}(\Omega)} > T\tau^{m+\frac{n}{q}} N^{-\frac{m}{n}} \left(\sum_{i=1}^{s} |c_i|^{\tau} \right)^{1/\tau} = T \|g\|_{L_\tau(\Omega)} N^{-\frac{m}{n}} .$$

Следовательно, левое неравенство (1) справедливо с $K_2 = T$.

Перейдем к случаю произвольной $g \in L_q(\Omega)$. Пусть такая g зафиксирована.

Лемма 3. *Если последовательность* $D \subset L_q(\Omega)$ *сходится к* g *в* $L_q(\Omega)$, *то*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \{ \mathcal{J}(g,N) N^{m/n} \} \leq \sup_{\varphi \in D} \{ \overline{\lim_{N\to\infty}} [\mathcal{J}(\varphi,N) N^{\frac{m}{n}}] \} , \tag{26}$$

$$\underline{\lim_{N\to\infty}} \{ \mathcal{J}(g,N) N^{m/n} \} \geq \inf_{\varphi \in D} \{ \lim_{N\to\infty} [\mathcal{J}(\varphi,N) N^{\frac{m}{n}}] \} . \tag{27}$$

Доказательство. Пусть функция g и последовательность D удов-

летворяют условиям леммы, ε - положительное число. Обозначим через B правую часть неравенства (26) . Покажем, что при больших N для всякой $\{\ell^N\}$, где ℓ^N - функционалы (2),

$$\|\ell^N\|_{L_p^{m*}(\Omega)} < BN^{-m/n}(1+\varepsilon). \tag{28}$$

Выберем при больших N числа $N[1]=N[1](N), \lambda>0, N[2]=N[2](N)$, и функцию $\varphi \in D$ так, чтобы

$$[N[1]]^{-m/n} < N^{-m/n}\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right), \quad N[2]=N-N[1]>N\lambda, \tag{29}$$

$$\|\varphi-g\|_{L_q(\Omega)} < \lambda^{m/n} B\varepsilon 2^{-1} K_1^{-1}, \tag{30}$$

где K_1 - постоянная из (11) . Определим функционалы ℓ^n из равенств $\ell^N=\ell_1^{N[1]}+\ell_2^{N[2]}$, где $\ell_1^{N[1]}$, $\ell_2^{N[2]}$ - функционалы из $L_p^{m*}(\Omega)$ вида:

$$(\ell_1^{N[1]}, f) = \int_\Omega \varphi(x) f(x)dx - \sum_{K=1}^{N[1]} c_K^{N[1]} f(x_K^{N[1]}),$$

$$x_1^{N[1]}, \ldots, x_{N[1]}^{N[1]} \in \Omega; \tag{31}$$

$$(\ell_2^{N[2]}, f) = \int_\Omega (g-\varphi)(x) f(x)dx - \sum_{K=1}^{N[2]} a_K^{N[2]} f(\mathcal{J}_K^{N[2]}), \tag{32}$$

$$\mathcal{J}_1^{N[2]}, \ldots, \mathcal{J}_{N[2]}^{N[2]} \in \Omega,$$

$c_1^{N[1]}, \ldots, c_{N[1]}^{N[1]}, a_1^{N[2]}, \ldots, a_{N[2]}^{N[2]}$ - постоянные .

Функционалы $\ell_{N[1]}^{N[1]}$, $\ell_2^{N[2]}$ таковы, что

$$\varlimsup_{N\to\infty} \left\{\|\ell_1^{N[1]}\|_{L_p^{m*}(\Omega)} |N[1]|^{m/n}\right\} < B \tag{33}$$

и при больших $N[2]$

$$\|\ell_2^{N[2]}\|_{L_p^{m*}(\Omega)} < K_1 \|g-\varphi\|_{L_q(\Omega)} [N[2]]^{-m/n} . \tag{34}$$

Функционалы $\ell_1^{N[1]}$ вида (31), удовлетворяющие (33), можно выбрать из определения B. Существование $\ell_2^{N[2]}$ вида (32), удовлетворяющих (34), следует из теоремы 2.

Из (34), (30), правого неравенства (29) имеем

$$\|\ell_2^{N[2]}\|_{L_p^{m*}(\Omega)} < 2^{-1} \varepsilon B N^{-m/n} . \tag{35}$$

Формула (33) и левое неравенство (29) показывают, что при больших N получаем

$$\|\ell_1^{N[1]}\|_{L_p^{m*}(\Omega)} < N^{-m/n} B (1+\varepsilon 2^{-1}). \tag{36}$$

Из (36) и (35) вытекает (28). Так как $\varepsilon > 0$ в (28) произвольно, то (26) справедливо. Второе утверждение леммы - неравенство (27)-доказывается аналогично (26). Следовательно, лемма верна.

Функция $|t|^{\tau/q}$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$, и для всех $\varphi \in L_q(\Omega)$ норма $\|\varphi\|_{L_\tau}(\Omega)$ конечна. Следовательно, по теореме о непрерывности операторов суперпозиции в классах $L_p(\Omega)$, $p > 0$ (см. [10, теорема 17.1, с.346]) вытекает, что если D - последовательность из $L_q(\Omega)$, сходящаяся в $L_q(\Omega)$ к g, то

$$\{\|\varphi\|_{L_\tau(\Omega)}\}_{\varphi \in D} \longrightarrow \|g\|_{L_\tau(\Omega)} . \tag{37}$$

Так как Φ плотно в $L_q(\Omega)$, то в Φ существует последовательность $D \to q$ в $L_q(\Omega)$ и при этом выполняется (37). Поскольку для функций из Φ неравенства (1) доказаны с K_1, $K_2 > 0$, не зависящими от выбора таких функций, то из леммы 3 и (37) следует справедливость (1) для выбранной

нами g . Так как эта $g \in L_q(\Omega)$ произвольна, то теорема 3 верна.

Литература

1. Соболев С.Л. О порядке сходимости кубатурных формул.- Докл.АН СССР, 1965, т. 164, № 2, с.281-284.
2. Бахвалов Н.С. Об оптимальных оценках сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло на классах функций.- В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы.- М.: Наука, 1964, № 4, с.5-63.
3. Половинкин В.И. Некоторые вопросы теории весовых кубатурных формул.- Сиб.мат.журн., 1971, т.12, № 1, с. 177-196.
4. Половинкин В.И. Весовые кубатурные формулы в $L_p^{(m)}(\Omega)$.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1975, вып. 32, с. 99-104.
5. Половинкин В.И. Последовательности кубатурных формул и функционалов с пограничным слоем: Дис. на соиск. учен.степ. д-ра физ.-мат.наук.- (01.01.01).-Ленинград, Б.и., 1979.- 240 с.
6. Шойнжуров Ц.Б. Весовые кубатурные формулы в пространствах С.Л. Соболева $W_p^{(m)}(E_n)$ и $W_p^{(m)}(\Omega)$. - В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики.- Новосибирск, Наука, 1973, с.41-45.
7. Половинкин В.И. Сходимость последовательностей кубатурных формул с пограничным слоем на конкретных функциях.- В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики.- Новосибирск, Наука, 1978, с. 183-191.
8. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974.- 808 с.
9. Половинкин В.И., Дидур Л.И. О порядке сходимости кубатурных формул.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1975, вып. 34, с.3-14.
10. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.- М.: Наука, 1966.- 411 с.