517.956

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М. П. Вишневский (Новосибирск)

В данной работе получен критерий устойчивости решений параболического уравнения. При этом предполагается, что исследуемое на устойчивость решение может зависеть от времени, в частности, быть по времени ω - периодическим. Аналогичный критерий для стационарных решений параболического уравнения рассматривал Т.И. Зеленяк [1,2] . Полученные в настоящей работе результаты применяются при исследовании устойчивости задачи Неймана для нелинейного параболического уравнения, не зависящего явно от пространственных переменных. Показано, что любое непостоянное по пространственным переменным решение этой задачи неустойчиво.

Пусть Ω - ограниченная область в R^n , совпадающая с внутренностью своего замыкания. Граница $\partial\Omega$ принадлежит классу C^3 . Рассмотрим в цилиндре $Q=\Omega\times(\tau,+\infty)$ задачу

$$u_t=\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}+c(x,t)u=\mathcal{L}(x,t)u \tag{1}$$

с граничными условиями

$$B(x,t)u\big|_{\Gamma}=\sum_{i=1}^n \beta_i(x,t)u_{x_i}+\beta(x,t)u \tag{2}$$

и начальными данными при $t=\tau$

$$u(x,\tau)=u_0(x). \tag{3}$$

Здесь

$$a_{ij}(x,t)\in C^{2+\alpha}(Q_\infty),\quad b_i(x,t)\in C^{1+\alpha}(Q_\infty),\quad c(x,t)\in C^{\alpha}(Q_\infty),$$

$$a_1\sum_{i=1}^n \xi_i^2\ge\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\ge a_0\sum_{i=1}^n\xi_i^2,\; x\in\Omega,\quad -\infty<t<+\infty,$$

$\beta_i(x,t)$, $\beta(x,t)$ функции класса $C^{1+\alpha}(\Gamma_\infty)$;

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)\cos(n,x_i) \geq \nu_0 > 0,$$

n - вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$, $Q_\infty = \Omega \times (-\infty,+\infty)$, $\Gamma_\infty = \partial\Omega \times (-\infty,+\infty)$.

Т.И. Зеленяк [1,2] рассматривал задачу (1)-(3) в случае, когда коэффициенты не зависят от времени. Он доказал эквивалентность следующих условий:

1) нулевое решение задачи (1)-(3) асимптотически устойчиво по Ляпунову, т.е.

$$\| u(x,t) \|_B \leq K e^{-\mu t} \| u(x,0) \|_B \qquad (\tau = 0),$$

$\mu > 0$ - постоянная, K не зависит от времени. В качестве пространства B , подчинив u_0 естественным условиям согласования, можно выбрать пространства $C^{k+\alpha}(\Omega)$, $W_2^k(\Omega)$, $k = 0,1,2$;

2) существует функционал Ляпунова, т.е. существуют положительные функции $r_i(x)$, $i=1,2,3$, такие, что для любого решения задачи (1)-(3) выполнено равенство:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega r_1(x) u^2(x,t)\,dx = -\int_{\partial\Omega} r_2(x) u^2(x,t)\,dS -$$

$$-\int_\Omega 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(r_3(x)u(x,t))_{x_i}\,(r_3(x)u(x,t))_{x_j};$$

3) существует положительное решение $\rho(x,t)$ задачи (1) такое, что

$$B(x)\rho_{\partial\Omega} = 1.$$

Отметим, что эквивалентность первого и третьего условий в случае первой краевой задачи доказал В.П. Гаевой.

Т.И. Зеленяк высказал гипотезу о возможности обобщения этого результата на неавтономный случай. В настоящей работе это предположение обосновано и рассмотрены применения доказанного утверждения для изучения качественных свойств решений параболических уравнений. В качестве пространства B , в котором изучается устойчивость задачи (1)-(3), в данной работе рассматривается пространство $C^{2+\alpha}(\Omega)$. Аналогичные утверждения справедливы и для других пространств.

Т е о р е м а. Следующие условия эквивалентны:

1) нулевое решение задачи (1)-(3) асимптотически устойчиво по Ляпунову, т.е. существуют положительные постоянные μ, K такие, что

$$\|u(x,t)\|_{2+\alpha}^{\Omega} \leq K e^{-\mu(t-\tau)} \|u(x,\tau)\|_{2+\alpha}^{\Omega} \quad (t>\tau), \tag{4}$$

где $u(x,\tau)=u_0(x)$, начальные данные задачи (I)-(3) удовлетворяют условиям согласования, обеспечивающим принадлежность решения $u(x,t)$ классу $C^{2+\alpha}(Q_T^\tau)$. Здесь и далее через $C^{2+\alpha}(Q_T^\tau)$ обозначается пространство $C_x^{2+\alpha}{}_t^{\frac{2+\alpha}{2}}(Q_T^\tau)$, а $Q_T^\tau=\Omega\times(\tau,T)$. Постоянные μ, K не зависят от t,τ;

2) существует функционал Ляпунова, т.е. существуют положительные функции $r_i(x,t)$, $i=1,2,3$, такие, что в силу условий задачи (I)-(3) выполнено равенство:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega r_1(x,t)u^2(x,t)dx = -\int_{\partial\Omega} r_2(x,t)u^2(x,t)dS -$$

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)(r_3(x,t)u(x,t))_{x_i}(r_3(x,t)u(x,t))_{x_j}dx. \tag{5}$$

Функции $r_i(x,t)$ будут ω-периодическими или почти-периодическими по времени, если коэффициенты задачи (I)-(3) ω-периодически или почти-периодически зависят от времени;

3) существует положительное решение $\rho(x,t)$ уравнения

$$u_t=\mathcal{L}(x,t)u+\varepsilon u, \qquad B(x,t)u|_\Gamma=1. \tag{6}$$

Здесь ε - некоторое положительное число. Решение $\rho(x,t)$ будет ω-периодическим или почти-периодическим по времени, если коэффициенты задачи (I)-(3) ω - периодически или почти-периодически зависят от времени.

Если $\mathcal{L}$, B зависят от времени ω-периодически, то существование при каком-либо положительном ε ограниченного на всей оси ω-периодического по времени решения задачи

$$u_t=\mathcal{L}(x,t)u+\varepsilon u, \quad B(x,t)u|_\Gamma=1$$

следует из существования положительного ω-периодического решения задачи

$$u_t=\mathcal{L}(x,t)u, \quad B(x,t)u|_\Gamma=1,$$

т.е. в условии (6) можно положить $\varepsilon=0$.

Доказательство разобьем на ряд вспомогательных лемм.

Лемма I. Пусть нуль - асимптотически устойчивое решение задачи (I)-(3). Тогда для любого $\varepsilon, \mu>\varepsilon>0$, существует $q(\varepsilon)$ такое, что как только

$$\|\mathcal{L}_1(x,t)u(x,t)\|_{\alpha}^{Q_T^{\tau}} \le q(\varepsilon)\|u\|_{2+\alpha}^{Q_T^{\tau}}, \quad q(\varepsilon)\to 0 \qquad \text{при } \varepsilon\to 0$$

для любого $T>\tau$, $\mathcal{L}_1(x,t)$ - дифференциальный оператор вида (I), то любое решение задачи

$$u_t = \mathcal{L}(x,t)u + \mathcal{L}_1(x,t)u, \quad B(x,t)u|_{\Gamma}=0, \qquad (7)$$
$$u(x,\tau)=u_0(x),$$

удовлетворяет оценке

$$\|u(x,t)\|_{2+\alpha}^{\Omega} \le Ke^{-(\mu-\varepsilon)t}\|u(x,\tau)\|_{2+\alpha}^{\Omega}.$$

Доказательство. Для задачи (7) выполнены все условия теоремы работы [4], из которой следует требуемое утверждение.

Лемма 2. Пусть нуль - асимптотически устойчивое решение задачи (I)-(3), т.е. выполнено условие (I) теоремы. Рассмотрим неоднородную задачу

$$u_t = \mathcal{L}(x,t)u + f(x,t), \quad B(x,t)u|_{\Gamma}=\varphi(x,t), \quad u(x,\tau)=u_0(x). \qquad (8)$$

Предположим, что коэффициенты задачи (I)-(3) определены в Q_∞,

$$f(x,t)\in C^{\alpha}(Q_\infty), \quad \varphi(x,t)\in C^{1+\alpha}(\Gamma_\infty).$$

Тогда задача (8) при сделанных предположениях имеет единственное ограниченное на всей оси решение $\tilde{u}(x,t)$. Это решение ω-периодично или почти-периодично по времени, если коэффициенты задачи (8) и функции $f(x,t)$, $\varphi(x,t)$ ω-периодичны или почти-периодичны по времени. Если функции $f(x,t)$, $\varphi(x,t)$ положительны, то ограниченное решение $\tilde{u}(x,t)$ тоже положительно.

Доказательство. Вначале докажем единственность ограниченного на всей оси решения. Предположим противное. Пусть $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ - два решения задачи (8), ограниченные в $C^{2+\alpha}(\Omega)$ при $-\infty<t<+\infty$. Тогда $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ - ограниченное в $C^{2+\alpha}(\Omega)$ при $-\infty<t<+\infty$ решение однородной задачи. Докажем, что $u(x,t)\equiv 0$. Пусть ε - произвольное положительное число, $-\infty<t<+\infty$. Тогда

$$\|u(x,t)\|_{2+\alpha}^{\Omega} < \varepsilon.$$

Действительно, если $T>0$ таково, что $KK_1e^{-\mu T}<\varepsilon$, $\|u(x,t)\|_{2+\alpha}^{\Omega}\le K_1$, $-\infty<t<+\infty$, то, применяя на промежутке $(t-T, t)$ оценку (4), получаем

$$\| u(x,t) \|_{2+\alpha}^{\Omega} \leq K e^{-\mu T} \| u(x,t-T) \|_{2+\alpha}^{\Omega} \leq K K_1 e^{-\mu T} < \varepsilon .$$

Значит, $u(x,t) \equiv 0$.

Докажем существование ограниченного на всей оси решения задачи (8).

Пусть $0<\alpha'<\alpha$. Рассмотрим решение задачи (8) с начальными данными при $\tau=-n\omega$, причем $u(x,-n\omega)=u_0(x)$,

$$\| u_0(x) \|_{2+\alpha'}^{\Omega} \leq R .$$

Через M обозначим выражение

$$\| f(x,t) \|_{\alpha}^{Q_\infty} + \| \varphi(x,t) \|_{1+\alpha}^{\Gamma_\infty} .$$

Из (4) следует, что

$$\| u(x,-(n-1)\omega) \|_{2+\alpha'}^{\Omega} \leq K' R e^{-\mu\omega} + K' M$$

может быть с новой постоянной K'. В силу известных оценок, также

$$\| u(x,-(n-1)\omega) \|_{2+\alpha}^{\Omega} \leq K_1 (R+M),$$

поэтому шар радиуса R в $C^{2+\alpha'}(\Omega)$ переходит в замкнутое компактное множество:

$$\left\{ u^n(x,-(n-1)\omega) \,|\, u_0(x)),\ \| u_0(x) \|_{2+\alpha'}^{\Omega} \leq R \right\} .$$

Выберем R,ω таким, что $R \geq K' R e^{-\mu\omega} + K' M$, т.е.

$$R > \frac{K' M}{1-K' e^{-\mu\omega}}, \qquad \omega > \frac{\ln K'}{\mu} .$$

При каждом $n\omega$, $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, начиная с некоторого момента, меньшего чем n, мы получаем последовательность замкнутых, вложенных друг в друга компактных множеств. Эти множества имеют непустое пересечение при каждом n. Обозначим один из элементов пересечения через $\tilde{u}(x,n\omega) \in C^{2+\alpha'}(\Omega)$. Используя известные оценки для параболических уравнений, легко получить, что $\tilde{u}(x,n\omega) \in C^{2+\alpha}(\Omega)$. Покажем, что элемент $\tilde{u}(x,n\omega)$ единствен. Предположим противное: пусть $\tilde{u}_1(x,n\omega)$ тоже принадлежит пересечению построенных компактных множеств. Значит, для любого целого $k<n$ найдутся начальные данные $u^k(x)$, $u_1^k(x)$ такие,

что решение $u(x,t)$ задачи (8) с начальными данными $u^k(x)$, $u_1^k(x)$ при $t=k\omega$ принимает при $t=n\omega$ значение $\tilde{u}(x,n\omega)$, $\tilde{u}_1(x,n\omega)$. Из оценки (4) получаем

$$\|\tilde{u}(x,n\omega)-\tilde{u}_1(x,n\omega)\|_{2+\alpha}^{\Omega} \le Ke^{-(n-k)\mu\omega}\cdot 2R < \varepsilon,$$

если k выбрано так, что

$$(n-k) > \frac{\ln 2KR - \ln\varepsilon}{\mu\omega}, \text{ т.е. } \tilde{u}(x,n\omega)=\tilde{u}_1(x,n\omega).$$

Рассмотрим решение задачи (8) с начальными данными $\tilde{u}(x,n\omega)$. Обозначим это решение через $\tilde{u}(x,t\,|\,\tilde{u}(x,n\omega))$. В силу единственности, $\tilde{u}(x,(n+1)\omega\,|\,\tilde{u}(x,n\omega)) = \tilde{u}(x,(n+1)\omega)$. Значит, можно построить решение $\tilde{u}(x,t)$ задачи (8), определенное при всех $-\infty<t<+\infty$. Это ограниченное на всей оси решение будет удовлетворять оценке

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{2+\alpha}^{\Omega} \le K\left[\|f(x,t)\|_{\alpha}^{Q_\infty}+\|\varphi(x,t)\|_{1+\alpha}^{\Gamma_\infty}\right]. \tag{9}$$

Пусть функции $f(x,t)$, $\varphi(x,t)$ и коэффициенты задачи (8) ω - периодически зависят от времени. Наряду с задачей (8) рассмотрим задачу со сдвигом

$$\begin{aligned} &u_t = \mathcal{L}(x,t+\omega)u + f(x,t+\omega),\\ &B(x,t+\omega)u\big|_{\Gamma_\infty} = \varphi(x,t+\omega). \end{aligned} \tag{8'}$$

Легко видеть, что у этой задачи $\tilde{u}(x,t+\omega)$ - единственное, ограниченное на всей оси решение. Но $\mathcal{L}(x,t+\omega)=\mathcal{L}(x,t)$, $B(x,t+\omega)=B(x,t)$, $\varphi(x,t+\omega)=$ $=\varphi(x,t)$, $f(x,t+\omega)=f(x,t)$, в силу ω-периодичности, поэтому $\tilde{u}(x,t)$ - тоже ограниченное на всей оси решение задачи (8). Ограниченное на всей оси решение единственно, значит, $\tilde{u}(x,t+\omega)=\tilde{u}(x,t)$.

Рассмотрим случай почти-периодических коэффициентов задачи (8). Всегда можно считать, что при любом $\varepsilon>0$ существует относительно плотное множество их общих ε-почти-периодов. Будем говорить, что функция $f(x,t)$ почти-периодична по времени в $C^{k+\alpha}(\Omega)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое положительное число $\ell(\varepsilon)$, что любой отрезок $[a,a+\ell]$ содержит по крайней мере одно число ω, для которого выполнено равенство

$$\|f(x,t+\omega)-f(x,t)\|_{k+\alpha}^{\Omega} < \varepsilon, \quad -\infty<t<+\infty.$$

Покажем, что функция $\tilde{u}(x,t)$ тоже почти-периодична по времени.

Пусть $\varepsilon_1>0$ - произвольное положительное число, $\ell(\varepsilon_1)$ - положитель-

ное число такое, что на любом интервале $[a, a+\ell]$ есть по крайней мере один почти-период функций задачи (8). Рассмотрим задачу

$$u_t = \mathcal{L}(x,t+\omega)u + f(x,t+\omega), \quad B(x,t+\omega)u\big|_\Gamma = \varphi(x,t+\omega), \tag{8''}$$

у которой ограниченное на всей оси решение есть $\tilde{u}(x,t+\omega)$.

Пусть $\sigma(x,t,\omega) = \tilde{u}(x,t+\omega) - \tilde{u}(x,t)$,

$$\sigma_t = \mathcal{L}(x,t)\sigma + [\mathcal{L}(x,t+\omega) - \mathcal{L}(x,t)]u + f(x,t+\omega) - f(x,t),$$

$$B(x,t)\sigma\big|_\Gamma = -[B(x,t+\omega) - B(x,t)]u + \varphi(x,t+\omega) - \varphi(x,t).$$

Используя оценку (9), имеем

$$\|\sigma(x,t,\omega)\|_{2+\alpha}^{\Omega} \leq K_2 \varepsilon_1,$$

поэтому, положив $\varepsilon = K_2\varepsilon_1$, мы получим почти-периодичность по времени в $C^{2+\alpha}(\Omega)$ функций $\tilde{u}(x,t)$.

Докажем последний пункт леммы - положительность ограниченного на всей оси решения в случае положительности функции $f(x,t), \varphi(x,t)$. Действительно, рассматривая множества

$$\{u(x,k\omega|u_0(x)), \quad u(x,-n\omega|u_0(x)) = u_0(x),$$

$$\|u_0(x)\|_{2+\alpha'}^{\Omega} \leq R, \quad u_0(x) \geq 0\}_{k>-n},$$

мы видим, что они компактны, замкнуты и вложены друг в друга, так как из положительности $f(x,t), \varphi(x,t), u_0(x)$ и теорем сравнения для параболического уравнения следует положительность функции $u(x,k\omega|u_0(x))$ при $k>-n$. Пересечение этих компактных, вложенных друг в друга множеств определяет положительное на всей оси ограниченное решение задачи (8), которое из единственности ограниченного на всей оси решения совпадает с $u(x,t)$.

Перейдем к доказательству теоремы. Покажем вначале, что если выполнено условие (4), то у задачи (I)-(3) существует единственное положительное, ограниченное на всей оси решение. Действительно, из леммы 2 получаем, что решение задачи

$$u_t = \mathcal{L}(x,t)u, \quad B(x,t)u\big|_\Gamma = 1,$$

ограниченное на всей оси, существует, единственно и положительно. Обозначим это решение через $\rho(x,t)$. Функция $\rho(x,t)$ будет ω-периодической или почти-периодической, если коэффициенты задачи (I)-(3) ω-периодичны или почти-периодичны по времени. Покажем, что решение $\rho(x,t)$ строго отделено от нуля, т.е. существует $\delta>0$ такое, что $\rho(x,t) \geq \delta > 0$.

Предположим противное. Тогда существует последовательность $\rho(x_i,t_i)\to 0$ при $i\to\infty$. Если t_i ограничены, то, выбирая из этой ограниченной в $C^{2+\alpha}(\Omega)$ и компактной в $C^{2+\alpha'}(e)$ последовательности сходящуюся подпоследовательность, получаем в предельной точке $\rho(x_0,t_0)=0$, что противоречит положительности функции $\rho(x,t)$.

Пусть $t_i\to+\infty$. Рассмотрим последовательность неотрицательных функций $\rho(x,t+1-t_i)$ и последовательность коэффициентов задачи (I)-(3) на промежутке $Q_i=\Omega(t_i-1,t_i)$. Эти последовательности ограничены в $C^{2+\alpha}(Q_i)$ и $C^{\alpha}(Q_i)$ и поэтому компактны в $C^{2+\alpha'}(Q_i)$, $C^{\alpha'}(Q_i)$, где $0<\alpha'<\alpha$. Предельная функция $\rho_0(x,t)$ - неотрицательное решение задачи

$$u_t=\mathcal{L}_0(x,t)u,\quad B_0(x,t)u|_\Gamma,\quad u(x,0)=\rho_0(x,0).$$

Из теорем сравнения получаем $\rho_0(x,1)>0$, но функция $\rho_0(x,t)$ при $t=1$ должна принимать нулевые значения. Полученное противоречие показывает, что $\rho(x,t)\geq\delta$ для некоторого $\delta>0$.

Докажем существование функционала Ляпунова у задачи (I)-(3). Пусть $V(t,\tau)$ ставит в соответствие функции $u_0(x)\in L_2(\Omega)$ функцию $u(x,t)$, где $u(x,t)$ - решение задачи (I)-(3). Сопряженный оператор $V^*(t,\tau)$ ставит в соответствие функции $v(x,t)$ функцию $v(x,\tau)$, где $v(x,t)$ - решение задачи $v_t=-\mathcal{L}^*(x,t)v$, $\beta^*v|_\Gamma=0$, $v(x,t)=v_0(x)$.

Так как

$$\|V(t,\tau)\|\leq K_1e^{-\mu(t-\tau)},$$

то

$$\|V^*(t,\tau)\|\leq K_1e^{-\mu(t-\tau)},$$

или

$$\|v(x,\tau)\|^{\Omega}_{2+\alpha}\leq K_2e^{\mu(\tau-t)}\|v(x,t)\|^{\Omega}_{2+\alpha}.$$

Пусть $u(x,t)=w(x,t)\rho(x,t)$, тогда

$$w_t-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}w_{x_j})_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_iw_{x_i}=Mw,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x,t)\rho w_{x_i}+w|_\Gamma-B_1w|_\Gamma=0,\quad w(x,\tau)=w_0(x).$$

Рассмотрим сопряженную задачу:

$$v_t = -M^* v, \quad B_1^* v\big|_\Gamma = 0, \quad v(x,t) = v_0(x).$$

Для нее выполнено условие (4), поэтому, как показано ранее, существует единственное, ограниченное на всей оси, строго положительное решение задачи

$$v_t = -M^* v, \qquad B_1^* v\big|_\Gamma = 1 .$$

Обозначим это решение через $\sigma(x,t)$. Для любых функций $\xi(x), \eta(x) \in C^2(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int_\Omega \left[\eta(x) M \xi(x) - \xi(x) M^* \eta(x)\right] dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[\eta(x) B_1 \xi(x) - \xi(x) B_1^* \eta(x)\right] dS .$$

Положим $\eta(x) = \sigma(x,t)$, $\xi(x) = w^2(x,t)$. Тогда

$$M(x,t) w^2 = 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} + 2 w M(x,t) w ,$$

$$\int_\Omega (\sigma M w^2 - w^2 M^* \sigma)\, dx = \int_{\partial\Omega} 2 \sigma w^2 dS ,$$

$$\sigma_t = -M^* \sigma , \qquad w_t = M w ,$$

$$2 \int_\Omega [\sigma w w_t + w^2 \sigma_t]\, dx = -2 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} dx - 2 \int_{\partial\Omega} \sigma w^2 dS ,$$

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \sigma w^2 dx = -2 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} dx - 2 \int_{\partial\Omega} \sigma w^2 dS .$$

Обозначим положительные функции $\dfrac{\sigma(x,t)}{\rho^2(x,t)}$, $\dfrac{2\sigma(x,t)}{\rho^2(x,t)}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{\rho(x,t)}$ через $z_1(x,t)$, $z_2(x,t)$, $z_3(x,t)$. Тогда последнее равенство можно переписать в виде (5):

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega z_1 u^2 dx = -\int_{\partial\Omega} z_2 u^2 dS - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (z_3 u)_{x_i} (z_3 u)_{x_j} dx .$$

Если коэффициенты задачи (I)-(3) ω-периодичны или почти-периодичны по времени, то из леммы 2 получаем ω-периодичность или почти-периодичность по времени функций $z_1(x,t)$, $z_2(x,t)$, $z_3(x,t)$.

Пусть выполнено условие 3) теоремы. Покажем, что в этом случае нулевое решение задачи (I)-(3) будет устойчивым по Ляпунову. Действительно, всегда существуют постоянные C_1, C_2 такие, что $-C_2 \rho(x,\tau) < u_0(x) < C_1 \rho(x,\tau)$.

Тогда из теорем сравнения получаем

$$-C_2\rho(x,t)e^{-\varepsilon(t-\tau)}<u(x,t)<C_1\rho(x,t)e^{-\varepsilon(t-\tau)},$$

откуда и следует требуемая оценка. Покажем, что в случае ω -периодических коэффициентов, если у задачи

$$u_t=\mathcal{L}(x,t)u,\quad B(x,t)u\big|_{\Gamma_\infty}=1, \tag{10}$$

есть положительное решение, то положительное решение есть и у задачи $u_t=\mathcal{L}(x,t)u, Bu|_\Gamma=1$ с некоторым $\varepsilon>0$. Действительно, обозначим через $V(\omega)$ оператор сдвига, переводящий функцию $u(x,t)$ в функцию $u(x,t+\omega)$, где $u(x,t)$ - решение задачи (I)-(3). Оператор $V(\omega)$ (см. [3])-вполне непрерывный оператор с дискретным спектром. Легко видеть, что из существования положительного, ω -периодического, ограниченного на всей оси решения $\rho(x,t)$ задачи (I0) следует, что точки спектра оператора $V(\omega)$ не могут лежать вне единичного круга на комплексной плоскости. С другой стороны, самое большое по модулю собственное число оператора $V(\omega)$ - действительное и простое, поэтому оно может быть равно только ± 1 . Значит, у задачи (I)-(3) есть 2ω (или $-\omega$)-периодическое решение, которое мы обозначим через $\varphi(x,t)$. Пусть $\lambda\varphi(x,t)<\rho(x,t)$ при $0<\lambda<\lambda_0$, а при $\lambda=\lambda_0$ есть точка (x_0,t_0) , в которой $\lambda_0\varphi(x_0,t_0)=\rho(x_0,t_0)$. Пусть $v(x,t)=\rho(x,t)-\lambda_0\varphi(x,t)$, тогда $v(x,t)$ - положительное, 2ω -периодическое решение задачи (I)-(3). Заметим, что $v(x,t_0)\geqslant 0$, поэтому $v(x,t)>0$ при $t>0,\ x\in\Omega$, но $v(x_0,t_0+2\omega)=v(t_0,x_0)=0$. Полученное противоречие доказывает, что у $V(\omega)$ нет точек спектра на единичной окружности. Но тогда для задачи (I)-(3) справедлива оценка (4) при некотором $\varepsilon>0$, а значит, существует положительное решение задачи (6) при некотором положительном ε .

И наконец, нам нужно доказать последнее утверждение: если у задачи (I)-(3) есть функционал Ляпунова (5), то нулевое решение будет асимптотически устойчивым.

Действительно, существует $k>0$ такое, что

$$\int_\Omega z_1u^2dx\leqslant k\Big[\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(z_3u)x_i(z_3u)_{x_j}+\int_{\partial\Omega}z_2u^2dS\Big],$$

$$\int_\Omega z_1(x,t)u^2(x,t)dx\leqslant e^{-k(t-\tau)}\int_\Omega z_1(x,\tau)u^2(u,\tau)dx,$$

откуда, используя оценки решений параболического уравнения, получаем неравенство (4).

Из доказанной теоремы вытекает

Л е м м а 3. Пусть нуль - асимптотически устойчивое решение задачи (I)-(3), $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$ - ограниченные на всей оси функции, удовлетворяющие неравенствам:

$$\varphi_t \geq \mathcal{L}(x,t)\varphi, \quad \psi_t \leq \mathcal{L}(x,t)\psi, \quad B\varphi|_{\Gamma_\infty} \geq B\psi|_{\Gamma_\infty} .$$

Тогда $\varphi(x,t) \geq \psi(x,t)$ в Q_∞ .

Действительно, только что сформулированное утверждение отличается от известных теорем сравнения отсутствием начальных данных. Пусть

$$v(x,t)=\varphi(x,t)-\psi(x,t), \quad f_1(x,t)=-\mathcal{L}(x,t)\varphi_t\varphi_t \geq 0,$$

$$f_2(x,t)=-\mathcal{L}(x,t)\psi+\psi_t \leq 0, \quad f(x,t)=f_1(x,t)-f_2(x,t),$$

$$v_t=\mathcal{L}(x,t)v+f(x,t), \quad B(x,t)v|_{\Gamma_\infty} \geq 0.$$

Поэтому $v(x,t) \geq 0$ в силу леммы 2, т.е. $\varphi(x,t) \geq \psi(x,t)$ в Q_∞ .

Рассмотрим нулевое решение задачи (I) с граничными условиями вида

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x,t)u_{x_i}+\beta_1(x,t)u|_\Gamma=B_1u|_\Gamma=0, \tag{II}$$

$$\beta(x,t) \leq \beta_1(x,t).$$

Тогда если нулевое решение задачи (I)-(3) асимптотически устойчиво, то асимптотически устойчиво и решение с граничным условием вида (I0) при $\beta \leq \beta_1$. Если рассмотреть задачу (I)-(3) в области $\Omega' \subset \Omega$ с границей класса C^3 , то из асимптотической устойчивости нулевого решения задачи (I)-(3) следует асимптотическая устойчивость новой задачи. Действительно, условие 3) теоремы эквивалентно существованию строго положительного, ограниченного на всей оси решения, удовлетворяющего уравнению $u_t=\mathcal{L}(x,t)u+\varepsilon u$ и неравенству $Bu|_\Gamma>0$ в случае не первой краевой задачи. Заметим, что функция $\rho(x,t)$, существование которой доказано в п.3 теоремы, удовлетворяет условию

$$B\rho|_{\Gamma_\infty}=1+(\beta_1-\beta)\rho|_{\Gamma_\infty}>1 \text{ или } \rho(x,t)|_{\Gamma'_\infty}=1,$$

где $\Gamma'_\infty=\partial\Omega'\times(-\infty,+\infty)$, откуда следует асимптотическая устойчивость задачи с граничными условиями (II) или в области $\Omega' \subset \Omega$.

Рассмотрим снова задачу (I)-(3). Здесь мы не будем предполагать, что нуль - устойчивое решение, т.е. выполнена оценка (4). Пусть $\rho(x,t) \geq \delta>0$ - положительная функция из класса $C^{2+\alpha}(\Omega)$, причем $B\rho|_{\Gamma_\infty}>0$. Если

$$\lambda_1 = \min_{Q_\infty} \frac{\mathcal{L}(x,t)\rho - \rho_t}{\rho},$$

то решение задачи (I)-(3) удовлетворяет оценке типа (4) с постоянной $\mu = \lambda_1 + \mu_0$ (в этом случае постоянная μ не обязательно положительна), $\mu_0 > 0$.

Если $\mathcal{L}(x,t), B(x,t)$ зависят от времени ω-периодически, то и функцию $\rho(x,t)$ можно выбирать ω-периодически зависящей от времени и вместо цилиндра Q_∞ рассматривать цилиндр $\tilde{Q}_\omega$; если $\mathcal{L}(x), B(x)$ не зависят явно от времени, то функцию $\rho(x)$ можно выбирать не зависящей от времени и вместо цилиндра Q_∞ рассматривать область Ω.

Действительно, $\rho_t \geq \mathcal{L}(x,t)\rho - \lambda_1\rho$, $B\rho|_{\Gamma_\infty} > 0$. Значит, из леммы 3 получаем, что нуль - асимптотически устойчивое решение задачи

$$v_t = \mathcal{L}(x,t)v - (\lambda_1 - \varepsilon_1)v, \quad B(x,t)v\big|_\Gamma = 0, \quad v(x,\tau) = v_0(x).$$

Поэтому найдется K такое, что

$$\|v(x,t)\|^{\Omega}_{2+\alpha} \leq K e^{-\varepsilon(t-\tau)} \|v(x,\tau)\|^{\Omega}_{2+\alpha}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Заметим, что $v(x,t)e^{(\lambda_1-\varepsilon_1)(t-\tau)} = u(x,t)$, и поэтому $u(x,t)$ удовлетворяет (4) с постоянной $\mu = \lambda_1 - \varepsilon_1 + \varepsilon = \lambda_1 + \mu_0$. Верно и обратное утверждение. Пусть любое решение $u(x,t)$ задачи (I)-(3) удовлетворяет оценке (4). Тогда если $\mu_0 > 0$, $\lambda_1 = \mu - \mu_0$, то найдется положительная функция $\rho(x,t) \geq \delta > 0$ такая, что $B(x,t)\rho|_{\Gamma_\infty} = 1$, $\lambda_1\rho = \mathcal{L}(x,t)\rho - \rho_t$.

Если $\mathcal{L}(x,t)$, $B(x,t)$ по времени ω-периодичны, то функцию $\rho(x,t)$ можно выбрать ω-периодической по времени. Если $\mathcal{L}(x), B(x)$ не зависят от времени, то функцию $\rho(x)$ можно выбрать не зависящей от времени.

Для любых дважды непрерывно дифференцируемых по x функций $\xi(x)$, $\eta(x)$ справедливо тождество

$$\int_\Omega \left[\eta(x)\mathcal{L}\xi(x) - \xi(x)\mathcal{L}^*\eta(x)\right]dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[\eta(x)B\xi(x) - \xi(x)B^*\eta(x)\right]dS.$$

Положим

$$\xi(x) = u^2(x,t), \quad \eta(x,t) = \sigma(x,t),$$

$$\mathcal{L}(x,t)u^2=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(u^2)_{x_i})_{x_j}+\sum b_i(u^2)_{x_i}+cu^2=$$

$$=2u\left[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+cu\right]+2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}-cu^2.$$

Поэтому, так как $u_t=\mathcal{L}(x,t)u$, получаем

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \sigma u^2dx=-2\left[\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\sigma u_{x_i}u_{x_j}-\frac{1}{2}c\sigma u^2\right)dx+\right.$$

$$\left.+\int_\Omega\left[\frac{\mathcal{L}^*(x,t)\sigma-\sigma_t}{\sigma}\right]\sigma u^2dx-\int_{\partial\Omega}(B^*\sigma+\beta\sigma)u^2dS\right].$$

Рассмотрим однородную задачу

$$v_t=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}v_{x_j})_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}(bv)_{x_i}-2\mu_0 v,$$

$$B^*v|_\Gamma=0,$$

которая удовлетворяет (4) при $\mu<2\mu_0$, если $\beta(x,t)\geq 0$. Пусть $\sigma(x,t)$ - единственное ограниченное на всей оси положительное решение задачи

$$v_t=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}v_{x_j})_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}(bv)_{x_i}-2\mu_0 v,$$

$$B^*v|_\Gamma=1.$$

Тогда

$$\mathcal{L}^*(x,t)\sigma-\sigma_t=(c+2\mu_0)\sigma.$$

Значит,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\sigma u^2=-2\left[\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\sigma u_{x_i}u_{x_j}-(c+\mu_0)\sigma u^2\right)dx-\int_{\partial\Omega}(1+\beta\sigma)u^2dS\right].$$

Если обозначить через $\lambda_1(t)$ минимум по $\xi(x)\in W_2^1(\Omega)$ выражения

$$\frac{\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_{x_i}\xi_{x_j}-[c(x,t)+\mu_0]\xi^2\right)\sigma dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(1+\beta\sigma)u^2dS}{\int_\Omega\sigma u^2dx},$$

то

откуда $$\frac{d}{dt}\int_\Omega\sigma(x,t)u^2(x,t)dx\leq-2\lambda_1(t)\int_\Omega\sigma(x,t)u^2(x,t)dx,$$

$$\int_\Omega \sigma(x,t)u^2(x,t)dx \le e^{-2\int_\tau^t \lambda_1(\tau)d\tau} \int_\Omega \sigma(x,\tau)u^2(x,\tau)d\tau.$$

Значит, если $\mathcal{L}(x,t)$, $B(x,t)$ зависят ω-периодически от времени, то достаточное условие устойчивости состоит в том, что $\int_0^\omega \lambda_1(\tau)d\tau < 0$.

Рассмотрим ограниченное на всей оси решение задачи

$$u_t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,u,Du)u_{x_i x_j} + f(t,u,Du), \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad u(x,0) = u_0(x).$$

Здесь Du - градиент функции $u(x,t)$ по пространственным переменным область Ω дополнительно к ранее сделанным предположениям, предполагается односвязной и выпуклой. Функции $a_{ij}(t,u,Du)$, $f(t,u,Du)$ предполагаются трижды непрерывно дифференцируемыми по всем аргументам. Предполагается, что выполнено условие параболичности

$$a_1\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \ge \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,u,p_1,\dots,p_n)\xi_i\xi_j \ge a_0\sum_{i=1}^n \xi_i^2,$$

$$-\infty < t, u, p_i < +\infty, \quad i = 1,\dots,n.$$

Пусть $\varphi(x,t)$ - ограниченное на всей оси решение задачи (12). Докажем следующее утверждение: любое асимптотически устойчивое решение задачи (12) постоянно по пространственным переменным. Пусть $\varphi(x,t) \in C^{3+\alpha}(Q_\infty)$ - ограниченное на всей оси решение задачи (11), непостоянное по пространственным переменным, т.е. такое, что

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2 \not\equiv 0.$$

Покажем, что решение $\varphi(x,t)$ по первому приближению не будет асимптотически устойчиво по Ляпунову. Задача (12), линеаризованная на решении $\varphi(x,t)$, имеет вид:

$$u_t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,\varphi,D\varphi)u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i,j,k}^n a_{iju_{x_k}}(t,\varphi,D\varphi) \times$$

$$\times \varphi_{x_i x_j} \cdot u_{x_k} + \sum_{i,j=1}^n a_{iju}(t,\varphi,D\varphi)\varphi_{x_i x_j} u +$$

$$+ \sum_{i=1}^n f_{u_{x_i}}(t,\varphi,D\varphi)u_{x_i} + f_u(t,\varphi,D\varphi)u = \mathcal{L}(x,t)u,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad u(x,0) = u_0(x).$$

Предположим, что нуль - асимптотически устойчивое по Ляпунову решение линеаризованной задачи. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что нуль является асимптотически устойчивым решением задачи

$$v_t = \mathcal{L}(x,t)v + \varepsilon v, \quad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad v(x,0) = v_0(x).$$

Пусть $\rho(x,t)$ - строго положительное ограниченное на всей прямой решение задачи

$$\rho_t = \mathcal{L}(x,t)\rho + \varepsilon\rho, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 1.$$

В [6] показано, что при выполнении сделанных выше предположений на область Ω для любой трижды гладкой функции $w(x)$ такой, что

$$\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{справедливо} \quad \frac{\partial}{\partial n}\Big(\sum_{i=1}^{n} w_{x_i}^2\Big) \le 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Так, если

$$\varphi(x,t) \in C^{3+\alpha}(\Omega), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial n}\Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^2\Big) \le 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Обозначим через $\psi(x,t)$ функцию

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^2.$$

Продифференцировав уравнение (I2) по x_k, получаем, что

$$(\varphi_{x_k})_t = \mathcal{L}(x,t)\varphi_{x_k}.$$

Умножим это равенство на $2\varphi_{x_k}$, в результате имеем

$$(\varphi_{x_k}^2)_t = 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\varphi_{x_k}(\varphi_{x_k})_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n}(b_i\varphi_{x_k}^2)_{x_i} + 2c\varphi_k^2.$$

Заметим, что

$$(\varphi_{x_k}^2)_{x_i x_j} = 2\varphi_{x_k}(\varphi_{x_k})_{x_i x_j} + 2(\varphi_{x_k})_{x_j}(\varphi_{x_k})_{x_i},$$

поэтому

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\psi_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\psi_i + 2c\psi - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\varphi_{x_k})_{x_i}(\varphi_{x_k})_{x_j}.$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \rho^2_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i (\rho^2)_{x_i} + 2(c+\varepsilon)\rho - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \rho_{x_i} \rho_{x_j} .$$

Рассмотрим положительную функцию $\eta(x,t)$ такую, что $\psi(x,t) = \eta(x,t)\rho^2(x,t)$. Тогда $\eta(x,t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\eta_t = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \eta_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \eta_{x_i} - 2\varepsilon\eta -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left[(\varphi_{x_k})_{x_i} (\varphi_{x_k})_{x_j} + \rho_{x_i} \rho_{x_j} \right].$$

На границе Γ выполняется $\frac{\partial \psi}{\partial n} \leq 0$, поэтому

$$\rho^2 \frac{\partial \eta}{\partial n}\Big|_\Gamma \leq 2\rho\eta\Big|_\Gamma \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial n}\Big|_\Gamma \leq -\frac{2\eta}{\rho}\Big|_\Gamma .$$

Положительная функция $\eta(x,t)$ должна достигать внутри области $Q^{\tau}_{T+\tau}$ положительного максимума. Из принципа максимума получаем, что точка, в которой достигается положительный максимум, лежит на Γ. При $t=\tau$ положительный максимум не может быть достигнут, так как вместо области $Q^{\tau}_{T+\tau}$ можно рассмотреть область $Q^{\tau-1}_{T+\tau-1}$, в которой точки $\Omega \times \tau$ являются внутренними точками области. Но на границе в точке положительного максимума $\frac{\partial \eta}{\partial n}(x_0,t_0) \leq -\frac{2\eta(x_0,t_0)}{\rho(x_0,t_0)} < 0$, что противоречит принципу Жиро-Зарембы. Значит, $\psi(x,t) \equiv 0$, т.е. $\varphi(x,t)$ не зависит от пространственных переменных.

Рассмотрим случай, когда функции $a_{ij}(t,u,Du)$, $f(t,u,Du)$ ω-периодически зависят от времени или когда задача (I2) автономна. В этом случае естественно изучить устойчивость ω-периодических или стационарных решений задачи (I2). В работах [3] для стационарных решений и в [7] для периодических решений дано обоснование метода линеаризации. Поэтому из асимптотической устойчивости или неустойчивости нулевого решения линеаризованного уравнения следует асимптотическая устойчивость или неустойчивость периодического или стационарного решения нелинейной задачи (I2). Таким образом, все устойчивые периодические решения задачи (I2) являются устойчивыми периодическими решениями задачи $u_t = f(t,u,0)$.

Если задача (I) автономна, то устойчивые стационарные решения являются решениями уравнения $u_t = f(u,0)$, причем если $f'_u(u_0,0) > 0$, то u_0 - неустойчивое стационарное решение, а если $f'_u(u_0,0) < 0$, то оно

устойчивое.

Из результатов работы [8] следует, что если $f(u_i,0)=0$, $i=1,2,3$, $u_1<u_2<u_3$, и $f(u,0)\neq 0$ при $u\in(u_1,u_2)\cup(u_2,u_3)$, то u_1, u_3 - устойчивые, а u_2 - неустойчивые стационарные решения. Если $u_1\leq u_0(x)\leq u_2$, $u_0(x)\not\equiv u_2$, то решение задачи (I2) с начальными данными $u_0(x)$ сходится в $C^{2+\alpha}(\Omega)$ к u_1, а если $u_2\leq u_0(x)\leq u_3$, $u_0(x)\not\equiv u_2$, то решение задачи (I2) с начальными данными $u_0(x)$ сходится к u_3. Отметим работы [5,6], в которых изучалась задача

$$u_t=\Delta u+f(u), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0, \quad u(x,0)=u_0(x). \qquad (I2')$$

Там показано, что любое непостоянное решение задачи (I2′) неустойчиво, если область Ω односвязна, совпадает с внутренностью своего замыкания, выпукла. При этом наиболее существенным требованием в [5,6] была самосопряженность линеаризованного уравнения. Отметим также, что в работе [6] построены невыпуклые области Ω, в которых непостоянное решение задачи (I2) устойчиво.

В заключение автор благодарит Т.И. Зеленяка за внимание к работе и обсуждение результатов.

Литература

I. Белоносов В.С., Зеленяк Т.И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. НГУ, 1975.- с.154.

2. Зеленяк Т.И. О качественных свойствах решений квазилинейных смешанных задач для уравнений параболического типа.- Мат.сб.,1977,т.104,№3, с. 486-510.

3. Белоносов В.С., Вишневский М.П. Об устойчивости стационарных решений нелинейных параболических систем.- Мат.сб., 1977, т.104, № 4, с.535-558.

4. Вишневский М.П. Интегральные множества нелинейных параболических систем.- В кн.: Математические методы механики сплошных сред, 1982, вып. 54, с.74-84.

5. Casten R., Holland C. Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions. - J.Different. Equations, 1978, v.27, No 2, p.266-273.

6. Matano H. Asymptotic behaviour and stability of solutions of semilinear diffusion equations. - Publ.Res.Inst.Math.Sci., Kyoto University, 1979, v.15, No 2, p.401-454.

7. В и ш н е в с к и й М.П. Периодические и близкие к ним решения нелинейных параболических систем.- Сиб.мат.журн., т.22, № 6, с.208-209, 1981, деп. в ВИНИТИ за 1167-81 Деп.

8. Б е л о н о с о в В.С., В и ш н е в с к и й М.П., З е л е н я к Т.И., Л а в р е н т ь е в - мл. М.М. О качественных свойствах решений параболических уравнений. Новосибирск. Б.и., 1983, 20 с. (Препринт ВЦ СО АН СССР; 466).