УДК 517.954

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Г. В. Демиденко (Новосибирск)

В работе рассматриваются смешанные задачи в квадранте для одного класса уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени:

$$L(t,\bar{x};\mathcal{D}_t,\mathcal{D}_{\bar{x}})u \equiv L_0(t,\bar{x};\mathcal{D}_{\bar{x}})\mathcal{D}_t^{\ell}u +$$

$$+\sum_{k=0}^{\ell-1} L_{\ell-k}(t,\bar{x};\mathcal{D}_{\bar{x}})\mathcal{D}_t^{k}u = f(t,\bar{x}),\ t>0,\ \bar{x}\in E_n^+, \tag{I}$$

$$B_j(\mathcal{D}_t,\mathcal{D}_{\bar{x}})u\big|_{x_n=0} = 0, \quad j=1,\dots,\mu,$$

$u=0$ при $t<0$.

В этот класс уравнений входят, в частности, уравнение С.Л. Соболева [I], уравнение внутренних волн [2-3], псевдопараболические уравнения [4-6], а исследуемые постановки краевых задач для них включают классические.

Как известно (см., например, [7-8]), краевые задачи для уравнений соболевского типа не всегда имеют решение. В настоящей работе устанавливается достаточное условие на правую часть $f(t,\bar{x})$, при котором смешанная задача (I) (при выполнении условия типа Лопатинского) корректно разрешима в весовых соболевских классах $W^{r}_{p,\gamma}$, $1<p<\infty, \gamma>0$. Таким условием является ортогональность $f(t,\bar{x})$ некоторым полиномам, при этом число полиномов зависит от порядков операторов, размерности пространства n и p. Полученные результаты обобщают соответствующие утверждения из работы автора [9] для случая $p=2$.

В конце статьи (см. § 5) приводятся некоторые теоремы о корректной разрешимости краевых задач в полупространстве для квазиэллиптических уравнений в классах W^{r}_{p}, $1<p<\infty$, которые являются непосредственным следствием выкладок, проведенных при доказательстве основных теорем.

§ I. Определения и формулировка основных результатов

Введем некоторые обозначения:

$$E_n^+ = \{\bar{x} = (x, x_n): \; x \in E_{n-1}, \; x_n > 0\};$$

$$E_{n+1}^{++} = \{(t, \bar{x}): \; t > 0, \; \bar{x} \in E_n^+\};$$

$$\mathcal{D}_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad \mathcal{D}_{\bar{x}}^{\beta} = \mathcal{D}_{x_1}^{\beta_1} \ldots \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n};$$

$$\vec{\alpha} = (0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = (0, \alpha, \alpha_n), \quad \alpha_i > 0;$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i, \quad \beta\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \alpha_i;$$

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), \quad <\xi>^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{2/\alpha_i};$$

$$\Delta L(\mathcal{D}) = L(t^\circ, \bar{x}^\circ; \mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{\bar{x}}) - L(t, \bar{x}; \mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{\bar{x}});$$

$$F_{x \to \xi} u(\cdot, x, \cdot) = \hat{u}(\cdot, \xi, \cdot) = (\sqrt{2\pi})^{1-n} \int_{E_{n-1}} e^{-i\xi x} u(\cdot, x, \cdot) dx.$$

Определим условия, налагаемые на операторы $L(\mathcal{D})$ и $B_j(\mathcal{D})$.

I) Оператор $L(t, \bar{x}; \mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{\bar{x}})$ имеет вид

$$L(t, \bar{x}; \mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{\bar{x}}) = L_0(t, \bar{x}; \mathcal{D}_{\bar{x}}) \mathcal{D}_t^{\ell} + \sum_{k=0}^{\ell-1} L_{\ell-k}(t, \bar{x}; \mathcal{D}_{\bar{x}}) \mathcal{D}_t^{k} =$$

$$= A_m(t, \bar{x}; \mathcal{D}_t) \mathcal{D}_{x_n}^{m} + \sum_{p=0}^{m-1} A_p(t, \bar{x}; \mathcal{D}_t, \mathcal{D}_x) \mathcal{D}_{x_n}^{p}.$$

Будем считать, что коэффициенты гладкие и постоянные вне компакта $\tilde{K} \subset E_{n+1}^{++}$.

2) Предположим, что символ оператора $L(\mathcal{D})$ однороден относительно вектора $\vec{\alpha} = (0, \alpha, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$, т.е.

$$L(t, \bar{x}; i\eta, c^{\alpha} i\xi, c^{\alpha_n} i\lambda) = c L(t, \bar{x}; i\eta, i\xi, i\lambda),$$

причем $L_0(t, \bar{x}; i\xi, i\lambda) \neq 0$ при $(\xi, \lambda) \in E_n \setminus \{0\}$ и $A_m(t, \bar{x}; \tau) \neq 0$ при $Re\, \tau > \gamma_1$.

Из условий I), 2) следует, что существует число $\gamma_2>0$ такое, что уравнение $L(t,\bar{x};\tau,i\xi,i\lambda)=0$ не имеет вещественных корней по λ при $Re\,\tau\geq\gamma_2$, $\xi\in E_{n-1}\setminus\{0\}$. Обозначим через $\lambda_k^+(t,\bar{x};\tau,i\xi)$, $k=1,\dots,\mu$, корни этого уравнения, имеющие $Im\,\lambda_k^+(t,\bar{x};\tau,i\xi)>0$. Положим

$$M^+(t,\bar{x};\tau,\xi,\lambda)=\prod_1^{\mu}(\lambda-\lambda_k^+(t,\bar{x};\tau,i\xi)).$$

3) Граничные операторы $B_j(\mathcal{D})$, $j=1,\dots,\mu$, имеют вид

$$B_j(\mathcal{D}_t,\mathcal{D}_{\bar{x}})=b_j(\mathcal{D}_t)\mathcal{D}_{x_n}^{m_j}+\sum_{k=0}^{m_j-1}B_{kj}(\mathcal{D}_t,\mathcal{D}_x)\mathcal{D}_{x_n}^k,$$

причем символы $B_j(i\eta,i\xi,i\lambda)$ по η имеют степень ℓ_j, $b_j(\tau)\neq0$ при $Re\,\tau\geq\gamma_2$ и $\mathcal{D}_\eta^{\ell_j}b_j(i\eta)\neq0$. Будем считать, что $\ell_j\leq\ell$.

4) Символ оператора $B_j(\mathcal{D})$ однороден относительно вектора $\vec{\alpha}=(0,\alpha,\alpha_n)$ с показателем однородности β_j, где $0\leq\beta_j<1$, т.е.

$$B_j(i\eta,c^{\alpha}i\xi,c^{\alpha_n}i\lambda)=c^{\beta_j}B_j(i\eta,i\xi,i\lambda).$$

5) Предположим, что выполнено условие типа Лопатинского: существует число $\gamma_0\geq max(\gamma_1,\gamma_2)$ такое, что полиномы $B_j(\tau,i\xi,i\lambda)$ как полиномы по λ линейно-независимы по $mod\,M^+(t,\bar{x};\tau,\xi,\lambda)$ при любых $(t,\bar{x})\in E_{n+1}^{++}$, $Re\,\tau\geq\gamma_0$, $\xi\in E_{n-1}\setminus\{0\}$.

Приведем некоторые примеры.

Пример I. Рассмотрим уравнение Соболева

$$\mathcal{D}_t^2\Delta u+\mathcal{D}_{x_n}^2u=0.$$

В этом случае $\alpha_i=1/2$, $i=1,\dots,n$, $\mu=1$. В качестве граничного оператора можно взять, например, $B(\mathcal{D})=1$ (первая краевая задача) или $B(\mathcal{D})=(\mathcal{D}_t^2+I)\mathcal{D}_{x_n}$ (вторая краевая задача). В первом случае $\beta=0$, во втором – $\beta=1/2$. Очевидно, что условия I) – 5) выполнены.

Пример 2. Рассмотрим уравнение внутренних волн

$$\mathcal{D}_t^2\Delta u+N^2(\bar{x})\sum_{k=1}^{n-1}\mathcal{D}_{x_k}^2u=0.$$

Имеем $\alpha_i=1/2$, $i=1,\dots,n$, $\mu=1$. В качестве граничного оператора можно взять $B(\mathcal{D})=1$ или

$$B(\mathcal{D}) = b(\mathcal{D}_t)\mathcal{D}_{x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \mathcal{D}_{x_k}.$$

Условия I) - 5) также выполнены.

Определим весовый соболевский класс функций $W^{r}_{p,\gamma} = W^{r}_{p,\gamma}(E^{++}_{n+1})$, где $r=(r_0, r_1, \dots, r_n)$, $1<p<\infty$; $\gamma>0$: функция $u(t,\bar{x}) \in W^{r}_{p,\gamma}$, если функция $u_\gamma(t,\bar{x}) = e^{-\gamma t} u(t,\bar{x}) \in W^{r}_{p}$. Положим

$$\| u, W^{r}_{p,\gamma} \| = \| u_\gamma, W^{r}_{p} \|.$$

Сформулируем результаты, считая для простоты, что K - носитель функции $f(t,\bar{x})$ по $\bar{x}$ ограничен. Положим

$$d = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i / p', \quad 1/p' + 1/p = 1, \quad \alpha_{min} = \min_{1 \le i \le n-1} \alpha_i.$$

Теорема I. <u>Пусть выполнены условия I)-5), $f \in W^{s}_{p,\gamma}$, где $s=(\ell, 1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)$, причем $\mathcal{D}^{k}_{t} f |_{t=0} = 0$, $k=0,\dots,\ell-1$. Если $d>1$, то существует единственное решение смешанной задачи (I) для уравнения с постоянными коэффициентами $u = Pf \in W^{r}_{p,\gamma}$, где</u>

$r=(2\ell, 2/\alpha_1, \dots, 2/\alpha_n)$, $\gamma > \gamma_0$, <u>и для него выполнена оценка</u>

$$\| u, W^{r}_{p,\gamma} \| \le c \| f, W^{s}_{p,\gamma} \|, \tag{2}$$

<u>где c - константа, зависящая от γ_0 и $diam\, K$. Если $d \le 1$, то дополнительно предположим, что</u>

$$\int_{E_{n-1}} x^{\sigma} f(t,x,x_n)\, dx = 0, \quad |\sigma| = 0,1,\dots,N-1, \tag{3}$$

<u>где N - натуральное число, определяемое из неравенств</u>

$$d + N\alpha_{min} > 1 \ge d + (N-1)\alpha_{min}. \tag{4}$$

<u>В этом случае смешанная задача (I) также имеет единственное решение из класса $W^{r}_{p,\gamma}$, $\gamma > \gamma_0$, и для него выполнена оценка (2).</u>

Теорема 2. <u>Пусть выполнены условия теоремы I и коэффициенты оператора $L_0(t,\bar{x};\mathcal{D}_{\bar{x}})$ достаточно мало отличаются от постоянных. Тогда существует число $\bar{\gamma} > \gamma_0$ такое, что если $d>1$, то смешанная задача (I) для уравнения с переменными коэффициентами имеет единственное решение $u \in W^{r}_{p,\gamma}$, $\gamma > \bar{\gamma}$; и для него справедлива оценка (2). Ес-</u>

ли $d \le 1$ и

$$\int\limits_{E_{n-1}} x^{\sigma}\left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} (\Delta L(\mathcal{D})P)^{\kappa}\right) f(t,x,x_n)\,dx = 0 \tag{5}$$

при $|\sigma| = 0,1,\ldots,N-1$, где N - натуральное число, определяемое неравенством (4), и оператор P определен в предыдущей теореме, то смешанная задача (I) также корректно разрешима в классе $W^{\tau}_{p,\gamma}$, $\gamma > \bar{\gamma}$.

Замечание. Из теорем I и 2 следует, что число дополнительных условий на правую часть f, достаточных для корректной разрешимости смешанной задачи (I) в классе $W^{\tau}_{p,\gamma}$, уменьшается с ростом p. В частности, получаем, что при $n = 3$ первая и вторая краевые задачи для уравнения Соболева и уравнения внутренних волн корректно разрешимы в классе $W^{\tau}_{p,\gamma}$, $\tau = (4,\ldots,4)$, при $p > 3$ для любой финитной $f \in W^{s}_{p,\gamma}$, $s = (2,\ldots,2)$ (так как $d = 3/(2p') > 1$ при $p > 3$).

§ 2. Построение приближенного решения смешанной задачи для уравнений с постоянными коэффициентами

В этом параграфе, как и в [9], мы построим решение смешанной задачи (I) для уравнения с постоянными коэффициентами в приближенной форме, применяя интегральное представление функций $f \in L_p$, полученное С.В. Успенским [I0]:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} (2\pi)^{1-n} \int\limits_{h}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1} \int\limits_{E_{n-1}} \int\limits_{E_{n-1}} exp\left(i\,\frac{x-y}{v^{\alpha}}\,\xi\right) \times$$

$$\times\, G(\xi) f(y)\, d\xi\, dy\, dv, \tag{6}$$

где $G(\xi) = R\langle\xi\rangle^{R} exp(-\langle\xi\rangle^{R})$ и $R = 2K > 0$ можно взять сколь угодно большим. Произвол в выборе R существенно используется при получении априорных оценок приближенного решения в норме $W^{\tau}_{p,\gamma}(E^{++}_{n+1})$.

При построении решения задачи (I) будем использовать следующие контурные интегралы:

$$\mathcal{J}_{+}(\tau,\xi,x_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^{+}} \frac{exp(ix_n\lambda)}{L(\tau,i\xi,i\lambda)}\,d\lambda,$$

$$\mathcal{J}_-(\tau,\xi,x_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^-}\frac{\exp(ix_n\lambda)}{L(\tau,i\xi,i\lambda)}d\lambda,$$

$$\mathcal{J}_j(\tau,\xi,x_n)=\frac{b_j^{-1}(\tau)}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{\exp(ix_n\lambda)}{M^+(\tau,\xi,\lambda)}N_j(\tau,\xi,\lambda)d\lambda,\ j=1,\dots,\mu,$$

где $\xi\in E_{n-1}\setminus\{0\}$, $Re\,\tau=\gamma>\gamma_0$, Γ^+,Γ^- - контуры, содержащие соответственно корни $\lambda_k^+(\tau,i\xi)$ и $\lambda_k^-(\tau,i\xi)$ уравнения $L(\tau,i\xi,i\lambda)=0$, а полиномы $N_j(\tau,\xi,\lambda)$ определяются [II,I2] следующим образом:

$$M^+(\tau,\xi,\lambda)=\prod_{k=1}^{\mu}\left(\lambda-\lambda_k^+(\tau,i\xi)\right)=\sum_{k=0}^{\mu}a_k(\tau,i\xi)\lambda^k,$$

$$M_p^+(\tau,\xi,\lambda)=\sum_{k=0}^{p}a_k(\tau,i\xi)\lambda^{p-k},\quad p=0,\dots,\mu-1,$$

$$N_j(\tau,\xi,\lambda)=\sum_{k=1}^{\mu}b^{kj}(\tau,\xi)M_{\mu-k}^+(\tau,\xi,\lambda),$$

где $b^{kj}(\tau,\xi)$ - элементы обратной матрицы $(b_{jk}(\tau,i\xi))^{-1}$ и

$$b_j(\tau)\left(\sum_{k=1}^{\mu}b_{jk}(\tau,i\xi)(i\lambda)^{k-1}\right)\equiv B_j(\tau,i\xi,i\lambda)\left(mod\,M^+(\tau,\xi,\lambda)\right).$$

Из условий I)-5) и из подготовительной теоремы Вейерштрасса следует, что эти контурные интегралы голоморфны по τ при $Re\,\tau>\gamma_0$. Отметим также необходимые в дальнейшем тождества:

$$\mathcal{D}_{x_n}^k\left[\mathcal{J}_+(\tau,\xi,x_n)+\mathcal{J}_-(\tau,\xi,x_n)\right]\Big|_{x_n=0}=A_m^{-1}(\tau)\delta_m^{k+1}\tag{7}$$

при $k=0,1,\dots,m-1$, $m=1/\alpha_n$,

$$B_k(\tau,i\xi,\mathcal{D}_{x_n})\mathcal{J}_j(\tau,\xi,x_n)\Big|_{x_n=0}=\delta_j^k\tag{8}$$

при $k,j=1,\dots,\mu$.

Для доказательства этих тождеств достаточно повторить соответствующие рассуждения из [II, I2] .

Для проведения оценок решения нам понадобится

Лемма I. Пусть выполнены условия I)-4), тогда имеют место следующие оценки:

$$|\mathcal{D}_{x_n}^{\kappa}\mathcal{D}_{\eta}^{q}\mathcal{D}_{\xi_i}^{p}\mathcal{J}_{+}(\tau,\xi,x_n)|+|\mathcal{D}_{x_n}^{\kappa}\mathcal{D}_{\eta}^{q}\mathcal{D}_{\xi_i}^{p}\mathcal{J}_{-}(\tau,\xi,-x_n)|\leq$$

$$\leq c|\tau|^{-\ell-q}<\xi>^{(\kappa+1)\alpha_n-p\alpha_i-1}\cdot exp(-\delta x_n<\xi>^{\alpha_n}),$$

$$|\mathcal{D}_{x_n}^{\kappa}\mathcal{D}_{\eta}^{q}\mathcal{D}_{\xi_i}^{p}\mathcal{J}_{j}(\tau,\xi,x_n)|\leq c|\tau|^{-\ell_j-q}<\xi>^{\kappa\alpha_n-p\alpha_i-\beta_j}exp(-\delta x_n<\xi>^{\alpha_n}),$$

где $c,\delta>0$ - константы, зависящие от γ_0 .

Доказательство леммы вытекает непосредственно из определения контурных интегралов и условий I)-5).

Перейдем теперь к построению приближенного решения задачи (I). Введем функции:

$$G_{+}(\tau,\xi,z_n)=(\sqrt{2\pi})^{1-n}G(\xi)\mathcal{J}_{+}(\tau,\xi,z_n)\theta(z_n),$$

$$G_{-}(\tau,\xi,z_n)=(\sqrt{2\pi})^{1-n}G(\xi)\mathcal{J}_{-}(\tau,\xi,z_n)\theta(-z_n),$$

$$G_{j}(\tau,\xi,z_n)=(\sqrt{2\pi})^{1-n}G(\xi)\mathcal{J}_{j}(\tau,\xi,z_n),$$

$$j=1,\ldots,\mu,\quad \tau=i\eta+\gamma,\quad \gamma>\gamma_0,$$

где $G(\xi)$ определено в (6), $\xi'=(\xi_1',\ldots,\xi_{n-1}')$, $\xi_\kappa'=\xi_\kappa<\xi>^{-\alpha_\kappa}$, $\theta(z_n)$ - функция Хевисайда.

Определим теперь следующие интегральные операторы:

$$(R_h^{+}(\gamma)+R_h^{-}(\gamma))f=\int_h^{h^{-1}}v^{-|\alpha|-\alpha_n}\int_{E_n}\hat{G}_{+}\left(\tau,\frac{x-y}{v^{\alpha}},\frac{x_n-y_n}{v^{\alpha_n}}\right)\times$$

$$\times\tilde{f}_{\gamma}(\eta,y,y_n)d\bar{y}dv-\int_h^{h^{-1}}v^{-|\alpha|-\alpha_n}\times$$

$$\times \int_{E_n} \hat{G}_-\left(\tau, \frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}, \frac{x_n-y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\tilde{f}_\gamma(\eta, y, y_n)d\bar{y}d\sigma,$$

$$R_{jh}(\gamma)f = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{1-n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n}\int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} exp\left(i\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\xi\right)\times$$

$$\times G_j\left(\tau, \xi, \frac{x_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\langle\xi\rangle^{\alpha_n-1}\left[\int_{E_1} B_j(\tau, i\xi, \sigma^{\alpha_n}\mathcal{D}_{z_n})\circ\right.$$

$$\left.\circ \mathcal{J}_-\left(\tau, \xi', \frac{z_n-y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\Big|_{z_n=0}\tilde{f}_\gamma(\eta, y, y_n)dy_n\right]dyd\xi d\sigma,$$

$$j=1,\dots,\mu,$$

где $\tilde{f}_\gamma(\eta, \bar{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(i\eta+\gamma)\tau}\theta(\tau)\theta(y_n)f(\tau, \bar{y})d\tau.$

Рассмотрим функцию

$$u_h(t, \bar{x}) = u_h^+(t, \bar{x}) + u_h^-(t, \bar{x}) + \sum_{j=1}^{\mu} u_{jh}(t, \bar{x}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\gamma t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta}\left[R_h^+(\gamma) + R_h^-(\gamma) + \sum_{j=1}^{\mu} R_{jh}(\gamma)\right]fd\eta.$$

Имеет место следующая

Л е м м а 2. Пусть выполнены условия теоремы I, тогда для любого $h>0$ функция $u_h(t, \bar{x})$ не зависит от γ при $\gamma>\gamma_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим первое слагаемое $u_h^+(t, \bar{x})$ и покажем, что оно не зависит от γ при $\gamma>\gamma_0$. Обозначим

$$F(i\eta+\gamma, s, y_n) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{1-n}\int_{E_{n-1}} e^{-isy}\tilde{f}_\gamma(\eta, y, y_n)dy. \tag{9}$$

В силу условий теоремы I и определения функции $G(\xi)$ при $\gamma>\gamma_0$ и фиксированном $h>0$ функцию $u_h^+(t, \bar{x})$ можно записать в виде

$$u_h^+(t,\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-\alpha_n} \int_{E_1} \int_{E_{n-1}} exp\left(i\frac{x\xi}{v^\alpha}\right) \times$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta+\gamma)t}\, G_+\left(i\eta+\gamma, \xi, \frac{x_n-y_n}{v^{\alpha_n}}\right) \times \right.$$

$$\left. \times F\left(i\eta+\gamma, \frac{\xi}{v^\alpha}, y_n\right)d\eta \right] d\xi\, dy_n\, dv.$$

Обозначив выражение в квадратных скобках через $K_v(\gamma,t,\xi,x_n,y_n)$, имеем

$$K_v(\gamma,t,\xi,x_n,y_n) = -i\int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} e^{\tau t} G_+\left(\tau,\xi,\frac{x_n-y_n}{v^{\alpha_n}}\right)\times$$

$$\times F\left(\tau,\frac{\xi}{v^\alpha},y_n\right)d\tau = \int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} \Phi_v(\tau,\xi,x_n,y_n)\,d\tau. \tag{10}$$

Из аналитичности контурного интеграла $J_+(\tau,\xi',\frac{x_n-y_n}{v^{\alpha_n}}<\xi>^{\alpha_n})$ по τ при $Re\tau>\gamma_0$ и условий теоремы I на функцию $f(t,\bar{x})$ следует аналитичность $\Phi_v(\tau,\xi,x_n,y_n)$ по τ, $Re\tau>\gamma_0$ и $\Phi_v(\tau,\xi,x_n,y_n)\to 0$, $|\tau|\to\infty$ при почти всех (v,ξ,x_n,y_n). Отсюда, взяв контур $\Gamma(N)$ прямоугольника, образованного прямыми $\gamma=\gamma_1$, $\gamma=\gamma_2$ ($\gamma_i>\gamma_0$, $i=1,2$) и $\eta=\pm N$, почти всюду имеем

$$\int_{\Gamma(N)} \Phi_v(\tau,\xi,x_n,y_n)\,d\tau = 0.$$

Поэтому, устремляя N к ∞, получаем

$$K_v(\gamma_1,t,\xi,x_n,y_n) = K_v(\gamma_2,t,\xi,x_n,y_n)$$

для любых $\gamma_1,\gamma_2>\gamma_0$, т.е. $u_h^+(t,\bar{x})$ не зависит от γ при $\gamma>\gamma_0$. Независимость функций $u_h^-(t,\bar{x})$, $u_{jh}(t,\bar{x})$, $j=1,\dots,\mu$, от γ при $\gamma>\gamma_0$ устанавливается точно так же.

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы I

Доказательство теоремы I разобьем на ряд лемм. В леммах 3-6 будут получены оценки функции $u_h(t,\bar{x})$, построенной в § 2, в норме $W^{r}_{p,\gamma}$, $1<p\leq\infty$, $\gamma>\gamma_0$. В лемме 7 доказывается, что $u_h(t,\bar{x})$ является приближенным решением смешанной задачи (I). В дальнейшем всюду будем предполагать, что выполнены условия теоремы I.

Л е м м а 3 . При $\gamma>\gamma_0$ и $r_k=2/\alpha_k$, $k=1,\dots,n$, имеют место оценки

$$\|\mathcal{D}^{r_k}_{x_k}(u^+_h+u^-_h), L_{p,\gamma}\|\leq c\|f, W^s_{p,\gamma}\|, \tag{II}$$

причем при $h_1,h_2\to 0$ выполнено

$$\left\|\mathcal{D}^{r_k}_{x_k}(u^+_{h_1}+u^-_{h_1})-\mathcal{D}^{r_k}_{x_k}(u^+_{h_2}+u^-_{h_2}), L_{p,\gamma}\right\|\to 0, \tag{I2}$$

где c - константа, зависящая от γ и γ_0, такая что $c=O(\gamma^{-\ell})$ при $\gamma\gg\gamma_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . В дальнейшем интегралы по всему E_{n-1} будем записывать без указания области интегрирования.

Вначале докажем лемму при $k=1,\dots,n-1$. В этом случае достаточно оценить каждое слагаемое отдельно. Рассмотрим, например, первое слагаемое. В силу леммы 2 при любом $\gamma>\gamma_0$ имеем

$$v_\gamma=e^{-\gamma t}\mathcal{D}^{r_k}_{x_k}u^+_h=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\eta}\mathcal{D}^{r_k}_{x_k}R^+_h(\gamma)f\,d\eta.$$

Используя обозначение (9), в силу определения $R^+_h(\gamma)f$ и условий на функцию $f(t,\bar{x})$ это можно записать в виде

$$v_\gamma=c\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}\int e^{ixs}G(s\sigma^{\alpha})\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\eta}\times$$

$$\times\theta(x_n-y_n)s_k^{r_k}J_+(\tau,s,x_n-y_n)F(i\eta+\gamma,s,y_n)dy_n d\eta\Big]ds\,d\sigma,$$

а учитывая, что $(\varphi\cdot\psi)^{\vee}=(\sqrt{2\pi})^{1-n}\check{\varphi}*\check{\psi}$, получаем

$$v_{\gamma h}=c_1\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}\iint exp(i(x-y)\xi)G(\xi\sigma^{\alpha})\times$$

$$\times\left[\int\limits_{E_{n+1}} exp(iys+it\eta)\theta(x_n-y_n)s_k^{\tau_k} J_+(i\eta+\gamma,s,x_n-y_n)\times\right.$$

$$\left.\times F(i\eta+\gamma,s,y_n)dy_n d\eta ds\right]d\xi dy d\sigma.$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через $\Phi_\gamma(t,y,x_n)$. Из интегрального представления (6) следует, что для доказательства (II) и (I2) для функции u_h^+ достаточно получить оценку

$$|\Phi_\gamma,L_p|\leq c\,|f,L_{p,\gamma}|. \tag{I3}$$

При доказательстве этой оценки воспользуемся теоремой о мультипликаторах П.И. Лизоркина [I3], из которой следует, что интегральный оператор

$$Tf(x)=\int\limits_{E_{n+1}} e^{ix\xi}\mu(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

ограничен в $L_p(E_{n+1})$, если функция $\mu=\mu(\xi)$ при $\xi_j\neq 0$, $j=0,1,\ldots,n$, удовлетворяет оценкам:

$$|\xi^\alpha D_\xi^\alpha\mu(\xi)|\leq c \quad \text{, где } \alpha_i=0 \text{ либо } \alpha_i=1 . \tag{I4}$$

Учитывая, что $\varphi*\psi=\sqrt{2\pi}\,F^{-1}(\hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi})$ при $n=1$, имеем

$$\Phi_\gamma(t,y,x_n)=c\int\limits_{E_{n+1}} exp(it\eta+iys+ix_n s_n)\mu_\gamma(\eta,\bar{s})\times$$

$$\times s_k^{1/\alpha_k}\hat{f}_\gamma(\eta,\bar{s})d\bar{s}d\eta,\qquad \bar{s}=(s_1,\ldots,s_n),$$

где $$\hat{f}_\gamma(\eta,\bar{s})=(\sqrt{2\pi})^{-1-n}\int\limits_{E_{n+1}} exp(-i\eta z_0-i\bar{s}\bar{z}-\gamma z_0)\times$$

$$\times\theta(z_0)\,\theta(z_k)f(z_0,\bar{z})dz_0 d\bar{z},$$

$$\mu_\gamma(\eta,\bar{s})=s_k^{1/\alpha_k}\int\limits_0^\infty e^{-is_n y_n} J_+(i\eta+\gamma,s,y_n)dy_n.$$

Покажем теперь, что при $|\eta|>0$, $|s_j|>0$, $j=1,\ldots,n$, выполнены оценки вида (I4) для функции $\mu_\gamma(\eta,\bar{s})$. Рассмотрим случай $\alpha_i=0$, $i=0,\ldots,n$. В силу леммы I при $\gamma>\gamma_0$ имеем

$$|\mu_\gamma(n,\bar{s})|\leq\frac{c}{|\tau|^\ell}|s_k|^{1/\alpha_k}\langle s\rangle^{\alpha_n-1}\int\limits_0^\infty e^{-\delta y_n\langle s\rangle^{\alpha_n}}dy_n<\frac{c}{\gamma^\ell}.$$

Точно так же рассматривается случай, когда $\alpha_n = 0$, а остальные α_i равны либо нулю, либо единице. Пусть теперь $\alpha_n = 1$, $\alpha_i = 0$, $i = 0, \ldots, n-1$. Имеем

$$s_n \mathcal{D}_{s_n} \mu_\gamma(\eta, \bar{s}) = - s_k^{1/\alpha_k} s_n \int_0^\infty e^{-is_n y_n} i y_n \times$$

$$\times \mathcal{J}_+(i\eta + \gamma, s, y_n)\, dy_n = s_k^{1/\alpha_k} \int_0^\infty \mathcal{D}_{y_n}\left[e^{-is_n y_n}\right] \times$$

$$\times y_n \mathcal{J}_+(i\eta + \gamma, s, y_n)\, dy_n =$$

(используя лемму I и интегрируя по частям, получаем)

$$= s_k^{1/\alpha_k} \int_0^\infty e^{-is_n y_n}\Big[-\mathcal{J}_+(i\eta + \gamma, s, y_n) -$$

$$- y_n \mathcal{D}_{y_n} \mathcal{J}_+(i\eta + \gamma, s, y_n)\Big]\, dy_n .$$

Следовательно, при $\gamma > \gamma_0$ из леммы I вытекает нужная нам оценка

$$\left| s_n \mathcal{D}_{s_n} \mu_\gamma(\eta, \bar{s})\right| \leq c \langle s\rangle^{\alpha_n} |\tau|^{-\ell} \Big[\int_0^\infty e^{-\delta y_n \langle s\rangle^{\alpha_n}} dy_n +$$

$$+ \int_0^\infty y_n \langle s\rangle^{\alpha_n} e^{-\delta y_n \langle s\rangle^{\alpha_n}} dy_n \Big] \leq \frac{c_1}{\gamma^\ell} .$$

Последний случай, когда $\alpha_n = 1$, а остальные α_i равны либо 0, либо I, рассматривается точно так же.

Итак, при $\gamma > \gamma_0$ выполнены оценки

$$|\eta^{\alpha_0} \bar{s}^{\alpha} \mathcal{D}_\eta^{\alpha_0} \mathcal{D}_{\bar{s}}^{\alpha} \mu_\gamma(\eta, \bar{s})| \leq c \gamma^{-\ell}, \tag{I5}$$

где $\alpha_i = 0$ либо $\alpha_i = 1$. Следовательно, по теореме Лизоркина получаем неравенство (I3). Отсюда, в силу интегрального представления (6), для функции $u_h^+(t, \bar{x})$ вытекают (II) и (I2) при $k = 1, \ldots, n-1$. Аналогичным образом это устанавливается для функции $u_h^-(t, \bar{x})$.

Докажем теперь (II) и (I2) в случае $k = n$. В силу леммы 2 при любом $\gamma > \gamma_0$ имеем

$$v_\gamma = e^{-\gamma t}\mathcal{D}_{x_n}^{\tau_n}\left[u_h^+ + u_h^-\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta}\mathcal{D}_{x_n}^{\tau_n}\left[R_h^+(\gamma) + R_h^-(\gamma)\right] f d\eta .$$

Прибавляя и вычитая выражение

$$A_h = (2\pi)^{1-n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n}\iint\int_0^{x_n} \exp\left(i\,\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\,\xi\right) G(\xi)\times$$

$$\times\, \mathcal{J}_-\left(\tau,\xi,\,\frac{x_n-y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\tilde{f}_\gamma(\eta,\bar{y})\,d\bar{y}\,d\xi\,d\sigma \tag{16}$$

и учитывая определение $(R_h^+(\gamma)+R_h^-(\gamma))f$, получаем

$$v_{\gamma h} = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta}\mathcal{D}_{x_n}^{\tau_n}\Bigg[\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n}\iint\int_0^{x_n}\exp\left(i\,\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\,\xi\right)\times$$

$$\times\, G(\xi)\left[\mathcal{J}_+\left(\tau,\xi,\,\frac{x_n-y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right) + \mathcal{J}_-\left(\tau,\xi,\,\frac{x_n-y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\right]\times$$

$$\times\, \tilde{f}_\gamma(\eta,\bar{y})\,d\bar{y}\,d\xi\,d\sigma\Bigg]dy - c\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n}\times$$

$$\times \iint\int_0^{\infty}\exp\left(i\,\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\,\xi\right)G(\xi)\mathcal{D}_{x_n}^{\tau_n}\,\mathcal{J}_-\left(\tau,\xi,\,\frac{x_n-y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\times$$

$$\times\,\tilde{f}_\gamma(\eta,\bar{y})\,d\bar{y}\,d\xi\,d\sigma\,d\eta, \qquad c=(2\pi)^{1/2-n}.$$

Отсюда, используя тождества (7), легко получить, что v_γ имеет вид

$$v_{\gamma h} = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-\alpha_n}\iint\exp\left(i\,\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\,\xi\right)G(\xi)\times$$

$$\times\left[\sum_{j=m-1}^{2m-1}\mathcal{D}_{z_n}^{j}\left(\mathcal{J}_+\left(\tau,\xi,\,\frac{z_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)+\mathcal{J}_-\left(\tau,\xi,\,\frac{z_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\right)\right|_{z_n=0}\times$$

$$\times\,\mathcal{D}_{x_n}^{2m-j-1}\tilde{f}_\gamma(\eta,y,x_n) + \int_0^{x_n}\mathcal{D}_{x_n}^{\tau_n}\,\mathcal{J}_+\left(\tau,\xi,\,\frac{x_n-y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\times$$

$$\times \tilde{f}_\gamma(\eta, y, y_n)dy_n - \int_{x_n}^{\infty} \mathcal{D}_{x_n}^{\tau_n} \mathcal{J}_-\left(\tau, \xi, \frac{x_n - y_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right) \times$$

$$\times \tilde{f}_\gamma(\eta, y, y_n)dy_n\Big] dy\, d\xi\, d\sigma\, d\eta = \sum_{j=m-1}^{2m-1} v_{\gamma h}^j + w_{\gamma h}^+ + w_{\gamma h}^- .$$

А поскольку последние два слагаемых оцениваются точно так же, как функции $\mathcal{D}_{x_k}^{\tau_k} u_h^+$ и $\mathcal{D}_{x_k}^{\tau_k} u_h^-$ при $k = 1, \dots, n-1$, то для доказательства (II) и(I2) нам достаточно оценить слагаемые $v_{\gamma h}^j$.

Рассмотрим, например, первое слагаемое $v_{\gamma h}^{m-1}$. В силу тождества (7) имеем

$$v_{\gamma h}^{m-1} = c \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1} \iint exp\left(i \frac{x-y}{\sigma^\alpha} \xi\right) G(\xi) \times$$

$$\times A_m^{-1}(i\eta + \gamma) \mathcal{D}_{x_n}^m \tilde{f}_\gamma(\eta, y, x_n)\, dy\, d\xi\, d\sigma\, d\eta .$$

Отсюда в силу интегрального представления (6) и теоремы о мультипликаторах [I3] при $\gamma > \gamma_0$ получаем

$$\| v_{\gamma, h}^{m-1}, L_p \| \le c(\gamma) \| f, W_{p,\gamma}^s \| , \quad h > 0,$$

и

$$\| v_{\gamma, h_1}^{m-1} - v_{\gamma, h_2}^{m-1}, L_p \| \longrightarrow 0 \qquad \text{при } h_1, h_2 \to 0.$$

Аналогично оцениваются и остальные слагаемые.

Из проведенных выше оценок мы получаем, что при $\gamma > \gamma_0$ выполнены (I1) и (I2). Лемма доказана.

Л е м м а 4 . <u>При</u> $\gamma > \gamma_0$ и $\tau_k = 2/\alpha_k$, $k = 1, \dots, n$, <u>имеют место оценки</u>

$$\| \mathcal{D}_{x_k}^{\tau_k} u_{jh}, L_{p,\gamma} \| \le c \| f, W_{p,\gamma}^s \| , \tag{I7}$$

<u>причем при</u> $h_1, h_2 \to 0$ <u>выполнено</u>

$$\| \mathcal{D}_{x_k}^{\tau_k} u_{jh_1} - \mathcal{D}_{x_k}^{\tau_k} u_{jh_2}, L_{p,\gamma} \| \longrightarrow 0, \tag{I8}$$

<u>где</u> c - <u>константа, зависящая от</u> γ <u>и</u> γ_0 , <u>такая что</u> $c = O(\gamma^{-\ell})$

при $\gamma \gg \gamma_0$.

Доказательство. Поскольку оценки при любом $k=1,\dots,n$ проводятся по одной схеме, то рассмотрим, например, случай $k=1$. В силу леммы 2 при $\gamma>\gamma_0$ имеем

$$v_{\gamma h} = e^{-\gamma t} \mathcal{D}_{x_1}^{r_1} u_{jh} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta} \mathcal{D}_{x_1}^{r_1} R_{jh}(\gamma) f d\eta .$$

В силу определения $R_{jh}(\gamma) f$ и условий на функцию $f(t,\bar{x})$, это можно записать в следующем виде:

$$v_{\gamma h} = c \int_h^{h^{-1}} v^{-1} \iint exp\big(i(x-y)\xi\big) G(\xi v^{\alpha}) \times$$

$$\times \Bigg[\int_{E_n} exp\,(iys+it\eta) \mathcal{J}_j(i\eta+\gamma, s, x_n) s_1^{r_1} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} I_j(i\eta+\gamma, s, y_n) \times$$

$$\times F(i\eta+\gamma, s, y_n) dy_n \Big) d\eta ds \Bigg] d\xi dy dv,$$

где $F(i\eta+\gamma, s, y_n)$ определена в (9) и

$$I_j(i\eta+\gamma, s, y_n) = B_j(i\eta+\gamma, is, \mathcal{D}_{z_n}) \mathcal{J}_-(i\eta+\gamma, s, z_n-y_n)\big|_{z_n=0} .$$

Обозначим выражение, стоящее в квадратных скобках, через $\Phi_\gamma(t,y,x_n)$. В силу интегрального представления (6), как и при доказательстве леммы 3, для получения (I7) и (I8) достаточно показать оценку

$$\|\Phi_\gamma, L_p\| \le c\, \|f, W_{p,\gamma}^{r/2}\|. \tag{I9}$$

Используя лемму I, при любых $\gamma>\gamma_0$, $s \in E_{n-1} \setminus \{0\}$ имеем

$$\mathcal{J}_j(\tau, s, x_n) \int_{-\infty}^{\infty} I_j(\tau, s, y_n) F(\tau, s, y_n) dy_n =$$

$$= - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_{z_n} \big[\mathcal{J}_j(\tau, s, x_n+z_n) I_j(\tau, s, y_n+z_n) \big] F(\tau, s, y_n) dy_n dz_n . \tag{20}$$

Следовательно,

$$-\Phi_\gamma(t,y,x_n) = \Phi_\gamma^1(t,y,x_n) + \Phi_\gamma^2(t,y,x_n) =$$

$$= \int\limits_{E_n} \int\limits_0^\infty exp(iys + it\eta) s_1^{z_1} \Big[\mathcal{D}_{z_n} \mathcal{J}_j (\tau, s, x_n + z_n) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} I_j \big(\tau, s, y_n + z_n\big) F(\tau, s, y_n) dy_n + \mathcal{J}_j (\tau, s, x_n + z_n) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_{z_n} I_j (\tau, s, y_n + z_n) F(\tau, s, y_n) dy_n \Big] dz_n ds d\eta .$$

Оценим первое слагаемое $\Phi_j^1 (t, y, x_n)$. Так как $x_n > 0$, то, используя свойства преобразования Фурье и функцию Хевисайда, имеем

$$\Phi_j^1 (t, y, x_n) = c \int\limits_{E_{n+1}} exp\big(i (t\eta + ys + x_n s_n)\big) s_1^{z_1} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i s_n z_n} \theta(z_n) \mathcal{D}_{z_n} \mathcal{J}_j (\tau, s, z_n) dz_n \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i s_n z_n'} \theta(z_n') \Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_j (\tau, s, y_n + z_n') F(\tau, s, y_n) dy_n \Big] dz_n' d\bar{s} d\eta .$$

В силу леммы I, как и при доказательстве леммы 3, можно показать, что функция

$$\int\limits_0^\infty e^{i s_n z_n} \int\limits_{\Gamma^+} e^{i z_n \lambda <s>^{\alpha_n}} \frac{\lambda <s>^{\alpha_n}}{M^+(\tau, s', \lambda)} N_j (\tau, s', \lambda) d\lambda dz_n \tag{2I}$$

является мультипликатором. Следовательно, используя однородность символов $L(\tau, is, i\lambda)$ и $B_j (\tau, is, i\lambda)$ относительно вектора $\vec{\alpha}$, по теореме П.И. Лизоркина получаем оценку

$$\| \Phi_j^1 , L_p \| \le c \, \Big\| \int\limits_{E_n} exp\big(i (t\eta + ys)\big) s_1^{z_1} < s >^{-\beta_j} \times$$

$$\times \theta(x_n) B_j^{-1}(\tau) \int\limits_{-\infty}^{\infty} I_j (\tau, s, y_n + x_n) F(\tau, s, y_n) dy_n ds d\eta , L_p \Big\| .$$

Обозначим выражение, стоящее под знаком L_p -нормы, через $\mathcal{F}_j (t, y, x_n)$. Учитывая свойства преобразования Фурье и используя функцию Хевисайда, имеем

$$\mathcal{F}_\gamma(t,y,x_n) = c\theta(x_n)\int\limits_{E_{n+1}} exp\left(i(t\eta + ys + x_n s_n)\right)\times$$

$$\times\mu_\gamma(\eta,\bar{s})s_1^{1/\alpha_1}\hat{f}_\gamma(\eta,\bar{s})d\bar{s}d\eta,$$

где

$$\mu_\gamma(\eta,\bar{s}) = s_1^{1/\alpha_1}\int\limits_0^\infty e^{is_n z_n}\frac{<s>^{-p_j}}{b_j(\tau)}I_j(\tau,s,z_n)dz_n.$$

А теперь опять, как и при доказательстве леммы 3, используя лемму I, можно показать, что при $\gamma>\gamma_0$ для функции $\mu_\gamma(\eta,\bar{s})$ выполняется оценка (I5). Следовательно, по теореме о мультипликаторах [I3] получаем

$$|\Phi_\gamma^1, L_p| \leq c\,\|\mathcal{F}_\gamma, L_p| \leq c_1\|f, W_{p,\gamma}^{\tau/2}\|,$$

причем $c_1 = O(\gamma^{-\ell})$ при $\gamma \gg \gamma_0$. Точно так же оценивается функция $\Phi_\gamma^2(t,y,x_n)$. Отсюда следует оценка (I9), а из нее, как уже отмечалось, вытекают (I7) и (I8) при $K=1$. Случай $K\geq 2$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Сделаем теперь одно замечание к леммам 3 и 4, которое существенно будет использовано в дальнейшем. Из доказательств этих лемм следует, что по такой же схеме при $\gamma>\gamma_0$ и $K=0,1,\ldots,\ell$ можно получить следующие оценки:

$$\|\mathcal{D}_t^K\mathcal{D}_{x_j}^{1/\alpha_j}u_h, L_{p,\gamma}\| \leq c\,|f, L_{p,\gamma}\|,\quad j=1,\ldots,n, \tag{22}$$

где C - константа, зависящая от γ и γ_0, такая что $c=O(\gamma^{K-\ell})$ при $\gamma\gg\gamma_0$, причем при $h_1,h_2\to 0$ имеет место сходимость

$$|\mathcal{D}_t^K\mathcal{D}_{x_j}^{1/\alpha_j}(u_{h_1}-u_{h_2}), L_{p,\gamma}\| \to 0. \tag{23}$$

Мы не будем останавливаться на доказательстве (22) и (23), поскольку оно отличается от проведенных выше выкладок лишь незначительными техническими деталями.

В следующих двух леммах мы оценим функции u_h и $\mathcal{D}_t^{\tau_0}u_h$ в норме $L_{p,\gamma}$, $1<p<\infty$, $\gamma>\gamma_0$. Отметим, что при проведении этих оценок существенно будет использоваться тот факт, что в интегральном представлении (6) функцию $G(\xi)=R<\xi>^R exp(-<\xi>^R)$ можно взять со сколь угодно большим $R=2\kappa>0$.

Л е м м а 5. <u>При</u> $\gamma>\gamma_0$ <u>и</u> $\tau_0=2\ell,\ s_0=\ell$ <u>имеют место оценки</u>

$$\|u_h^+ + u_h^-,\ L_{p,\gamma}\|\leq c\,\|f, L_{p,\gamma}\|, \tag{24}$$

$$\|\mathcal{D}_t^{\tau_0}(u_h^+ + u_h^-), L_{p,\gamma}\|\leq c\,\|\mathcal{D}_t^{s_0} f, L_{p,\gamma}\|, \tag{25}$$

<u>причем при</u> $h_1, h_2 \longrightarrow 0$ <u>выполнено</u>

$$\|(u_{h_1}^+ + u_{h_1}^- - u_{h_2}^+ - u_{h_2}^-),\ L_{p,\gamma}\|\longrightarrow 0, \tag{26}$$

$$\|\mathcal{D}_t^{\tau_0}(u_{h_1}^+ + u_{h_1}^-) - \mathcal{D}_t^{\tau_0}(u_{h_2}^+ + u_{h_2}^-),\ L_{p,\gamma}\|\longrightarrow 0, \tag{27}$$

<u>где</u> c - <u>константа, зависящая от</u> $\gamma, \gamma_0, diam\,K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим вначале функцию u_h^+. В силу леммы 2 при $\gamma>\gamma_0$ имеем

$$e^{-\gamma t}u_h^+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta} R_h^+(\gamma) f\, d\eta.$$

Учитывая условия теоремы I и построение оператора $R_h^+(\gamma)$, это можно записать так:

$$e^{-\gamma t}u_h^+ = c\int_{-\infty}^{\infty}\int\int_{-\infty}^{\infty} exp(it\eta + ixs)\left[\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1}G(s\sigma^{\alpha})d\sigma\right]\times$$

$$\times\theta(x_n-y_n)\,\mathcal{J}_+(\tau,s,x_n-y_n)F(\tau,s,y_n)dy_n\,ds\,d\eta =$$

(и так как $\varphi*\psi=\sqrt{2\pi}\,F^{-1}(\hat{\varphi}\hat{\psi})$ при $n=1$, то получаем)

$$=c_1\int_{-\infty}^{\infty}\int\int_{-\infty}^{\infty} exp\big(i(t\eta+xs+x_n s_n)\big)\left[\int_0^{\infty} exp(-is_n z_n)\times\right.$$

$$\left.\times\,\mathcal{J}_+(\tau,s,z_n)dz_n\right]\left[\int_h^{1}\sigma^{-1}G(s\sigma^{\alpha})d\sigma + \int_1^{h^{-1}}\sigma^{-1}G(s\sigma^{\alpha})d\sigma\right]\times$$

$$\times\hat{F}(\tau,s,s_n)ds_n\,ds\,d\eta = \sigma_h + w_h.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Заметим, что для функции

$$\mu_\gamma(\eta,\bar{s}) = \tau^{\ell} < s >^{1-\alpha_n} \left(< s >^{\alpha_n} + i s_n \right) \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-i s_n z_n} \mathcal{J}_+(\tau, s, z_n)\, d z_n , \qquad \tau = i\eta + \gamma ,$$

при $\gamma > \gamma_0$, $s \in E_{n-1} \setminus \{0\}$ выполнена оценка

$$\left| \eta^{\alpha_0} \bar{s}^{\alpha} \cdot \mathcal{D}_\eta^{\alpha_0} \mathcal{D}_{\bar{s}}^{\alpha} \mu_\gamma(\eta,\bar{s}) \right| \leqslant c, \tag{28}$$

где $\alpha_\kappa = 0$ или $\alpha_\kappa = 1$, $\kappa = 0, 1, \ldots, n$. Действительно, при $\alpha_\kappa = 0$ имеем

$$\left|\mu_\gamma(\eta,\bar{s})\right| \leqslant |\tau|^{\ell} < s >^{1-\alpha_n} \Big[< s >^{\alpha_n} \int_0^\infty \left|\mathcal{J}_+(\tau, s, z_n)\right| d z_n +$$

$$+ \left| \int_0^\infty \mathcal{D}_{z_n} (e^{-i s_n z_n}) \mathcal{J}_+(\tau, s, z_n)\, d z_n \right| \Big] \leqslant$$

(интегрируя по частям и используя лемму I, получаем)

$$\leqslant c < s >^{\alpha_n} \int_0^\infty e^{-\delta z_n < s >^{\alpha_n}} d z_n + c \leqslant c_1 .$$

Аналогично доказывается оценка (28) и при любых α_κ.

По теореме о мультипликаторах [I3] из (28) для функции v_h имеем

$$\| v_h, L_p \| \leqslant c \Big\| \int_{-\infty}^{\infty} \int \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(i (t\eta + x s + x_n s_n) \right) \times$$

$$\times \left[\int_h^1 v^{-1} G(s v^{\alpha}) dv \right] < s >^{\alpha_n - 1} \left(< s >^{\alpha_n} + i s_n \right)^{-1} \times$$

$$\times \tau^{-\ell} \hat{F}(\tau, s, s_n)\, d s_n\, d s\, d\eta , L_p \Big\| .$$

Отсюда, используя тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{-\ell} exp\left(it\eta + i x_n s_n \right) \left(< s >^{\alpha_n} + i s_n \right)^{-1} \hat{F}(\tau, s, s_n)\, d s_n\, d\eta =$$

$$= c \int_0^t e^{-\gamma t} (t - t')^{\ell - 1} \int_0^{x_n} e^{-(x_n - y_n) < s >^{\alpha_n}} \hat{f}(t', s, y_n)\, d y_n\, d t', \tag{29}$$

и применяя неравенства Минковского и Юнга, получаем

$$|v_\gamma, L_p| \leq c(\gamma)\int_h^1 v^{-1}\Big\| \int e^{ixs} G(sv^\alpha)<s>^{\alpha_n-1} \times$$

$$\times e^{-x_n<s>^{\alpha_n}} ds; L_1 \Big| dv \| f, L_{p,\gamma}| =$$

(сделав замену $\xi = sv^\alpha$, $\bar{z} = \bar{x}\cdot v^{-\alpha}$, имеем)

$$= c(\gamma)\int_h^1 dv \Big\| \int e^{iz\xi} G(\xi)<\xi>^{\alpha_n-1} e^{-z_n<\xi>^{\alpha_n}} d\xi, L_1 \Big\| \times |f, L_{p,\gamma}|.$$

А поскольку $G(\xi) = R<\xi>^R \exp(-<\xi>^R)$, где $R = 2\kappa > 0$ можно взять сколь угодно большим, то отсюда вытекает оценка

$$\| v_h, L_p| \leq c_1(\gamma) \| f, L_{p,\gamma}|.$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое w_h. Пусть $d = \sum_1^n \alpha_i / p' > 1$, тогда, повторяя предыдущие рассуждения, имеем

$$\| w_h, L_p| \leq c \int_1^{h^{-1}} v^{-1} \Big\| \int_0^t \int_0^{x_n} \iint \exp(i(x-y)s - \gamma(t-t') -$$

$$-(x_n - y_n)<s>^{\alpha_n}) G(sv^\alpha)<s>^{\alpha_n-1}(t-t')^{\ell-1} \times$$

$$\times e^{-\gamma t'} f(t', y, y_n) ds dy dy_n dt', L_p \Big| dv \leq$$

(и применяя неравенство Юнга, получаем)

$$\leq c(\gamma)\int_1^{h^{-1}} v^{-1} \Big\| \int e^{ixs} G(sv^\alpha)<s>^{\alpha_n-1} e^{-x_n<s>^{\alpha_n}} ds, L_p \Big\| dv \times$$

$$\times \| | e^{-\gamma t} f(t, \bar{y}), L_1(E_n^+)|, L_p(E_1^+)\| =$$

(сделав замену $\xi = sv^\alpha$, $\bar{z} = \bar{x} v^{-\alpha}$, имеем)

$$= c(\gamma)\int_1^{h^{-1}} v^{-d} dv \Big\| \int e^{iz\xi} G(\xi)<\xi>^{\alpha_n-1} e^{-z_n<\xi>^{\alpha_n}} d\xi, L_p \Big\| \times$$

$$\times \| \| f(t,\bar{y}), L_1(E_n^+) \|, L_{p,\gamma}(E_1^+) \| .$$

А поскольку $d>1$, то отсюда в силу определения функции $G(\xi)$ вытекает неравенство

$$| w_h, L_p | \leq c_1(\gamma, K) | f, L_{p,\gamma} | .$$

Оценим функцию w_h в случае, когда $d \leq 1$. Пусть $d+N\alpha_{min} > 1 \geq$ $\geq d+(N-1)\alpha_{min}$. Тогда из условий теоремы I (3) следует

$$F(\tau, s, y_n) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \Big[\int_{E_{n-1}} exp(-i\lambda_N \ldots \lambda_1 y s)(-iys)^N \times$$

$$\times \tilde{f}_\gamma(\varrho, y, y_n) dy \Big] \lambda_{N-1} \cdot \lambda_{N-2}^2 \ldots \lambda_1^{N-1} d\lambda_N \ldots d\lambda_1 .$$

Отсюда, повторяя предыдущие рассуждения, имеем

$$|w_h, L_p| \leq c \sum_{|\beta|=N} \int_1^{h^{-1}} \sigma^{-1} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \Big| \int_0^t \int_0^{x_n} \int\int exp(i(x-y\lambda_1 \ldots \lambda_N)s -$$

$$-\gamma(t-t') - (x_n - y_n) \langle s \rangle^{\alpha_n}) G(s\sigma^\alpha) \langle s \rangle^{\alpha_n - 1} \times$$

$$\times (t-t')^{\ell-1} s^\beta y^\beta exp(-\gamma t') f(t', y, y_n) \times$$

$$\times \lambda_{N-1} \lambda_{N-2}^2 \ldots \lambda_1^{N-1} ds dy dy_n dt', L_p \Big| d\lambda_N \ldots d\lambda_1 d\sigma \leq$$

(применяя неравенство Юнга, получаем)

$$\leq c(\gamma) \sum_{|\beta|=N} \int_1^{h^{-1}} \sigma^{-1} \Big| \int e^{ixs} G(s\sigma^\alpha) \langle s \rangle^{\alpha_n - 1} s^\beta \times$$

$$\times e^{-x_n \langle s \rangle^{\alpha_n}} ds, L_p \Big| d\sigma \| | f(t, z, z_n) z^\beta, L_1(E_n^+) |, L_{p,\gamma}(E_1^+) | .$$

Поскольку $G(\xi) = R exp(-\langle \xi \rangle^R) \langle \xi \rangle^R$, где $R = 2K > 0$ можно взять сколь угодно большим, то, сделав замену $\xi = s\sigma^{\alpha}{}'$, $\bar{z} = \bar{x}/\sigma^\alpha$, в силу условия $d+N\alpha_{min} > 1$, получаем

$$| w_h, L_p \| \leq c(\gamma, K) | f, L_{p,\gamma} | .$$

Итак, из проведенных выше оценок следует, что для функции u_h^+ имеет место оценка

$$\| u_h^+, L_{p,\gamma} \| \leq c \| f, L_{p,\gamma} \|.$$

Такую же оценку, проводя аналогичные рассуждения, можно получить для функции u_h^-. Отсюда будет следовать неравенство (24). Точно так же доказывается (26).

При доказательстве (25) и (27), используя условия согласования $\mathcal{D}_t^k f|_{t=0}=0$, $k=0,1,\ldots,\ell-1$, после интегрирования по частям ℓ раз имеем

$$\mathcal{D}_t^{z_0}(u_h^+ + u_h^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta+\gamma t} (i\eta+\gamma)^\ell \big[R_h^+(\gamma) +$$

$$+ R_h^-(\gamma)\big] \varphi \, d\eta \qquad , \text{ где } \varphi(t,\bar{x}) = \mathcal{D}_t^\ell f(t,\bar{x}).$$

Отсюда, повторяя предыдущие рассуждения, легко получить (25) и (27). Лемма доказана.

Л е м м а 6. <u>При</u> $\gamma > \gamma_0$ <u>и</u> $z_0=2\ell$, $s_0=\ell$, $j=1,\ldots,\mu$, <u>имеет место оценка</u>

$$\| u_{jh}, L_{p,\gamma} \| + \| \mathcal{D}_t^{z_0} u_{jh}, L_{p,\gamma} \| \leq$$

$$\leq c_1 \| f, L_{p,\gamma} \| + c_2 \| \mathcal{D}_t^{s_0} f, L_{p,\gamma} \|, \tag{30}$$

<u>причем при</u> $h_1, h_2 \to 0$ <u>выполнено</u>

$$\| (u_{jh_1} - u_{jh_2}), L_{p,\gamma} \| + \| \mathcal{D}_t^{z_0}(u_{jh_1} - u_{jh_2}), L_{p,\gamma} \| \to 0, \tag{31}$$

<u>где</u> c_1, c_2 <u>- константы, зависящие от</u> $\gamma, \gamma_0, \operatorname{diam} K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Оценим функцию u_{jh}. В силу леммы 2 при $\gamma > \gamma_0$, как при доказательстве леммы 4, имеем

$$e^{-\gamma t} u_{jh} = c \int_{E_n} exp(it\eta + ixs) \Big[\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^{\alpha}) d\sigma \Big] \times$$

$$\times \mathcal{J}_j(i\eta+\gamma, s, x_n) \int_{-\infty}^{\infty} I_j(i\eta+\gamma, s, y_n) F(i\eta+\gamma, s, y_n) dy_n \, ds \, d\eta.$$

Обозначим функцию, стоящую в квадратных скобках, через $K_h(s)$. Используя тождество (20), получаем

$$e^{-\gamma t}u_{jh}=c\int\limits_{E_n}\int\limits_0^\infty \exp\left(it\eta+ixs\right)K_h(s)\Big[\mathcal{D}_{z_n}\mathcal{I}_j(\tau,s,x_n+z_n)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_j(\tau,s,y_n+z_n)F(\tau,s,y_n)dy_n+\mathcal{I}_j(\tau,s,x_n+z_n)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}_{z_n}I_j(\tau,s,y_n+z_n)F(\tau,s,y_n)dy_n\Big]dz_n\,ds\,d\eta=\sigma_h+\omega_h.$$

Рассмотрим, например, первое слагаемое. Поскольку $x_n>0$, то, используя свойства преобразования Фурье, имеем

$$\sigma_h=c_1\int\limits_{E_{n+1}}\exp\left(i(t\eta+xs+x_ns_n)\right)K_h(s)\Big[\int\limits_0^\infty \exp\left(is_nz_n\right)\times$$

$$\times\mathcal{D}_{z_n}\mathcal{I}_j(\tau,s,z_n)dz_n\Big]\Big[\int\limits_{\infty}^{\infty}\exp(-is_nz_n')\theta(z_n')\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_j(\tau,s,y_n+z_n')F(\tau,s,y_n)dy_n\,dz_n'\Big]d\bar{s}\,d\eta.$$

Так как функция (21) является мультипликатором, то отсюда, как при доказательстве леммы 4, следует оценка

$$\|\sigma_h,L_p\|\leq c\Big\|\int\limits_{E_n}\exp\left(it\eta+ixs\right)K_h(s)<s>^{-\beta_j}b_j^{-1}(\tau)\theta(x_n)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_j(\tau,s,x_n+y_n)\theta(x_n+y_n)F(\tau,s,y_n)dy_n\,ds\,d\eta,L_p\Big\|.$$

Обозначим выражение, стоящее под знаком L_p -нормы, через $\mathcal{F}_j(t,\bar{x})$. Используя свойства преобразования Фурье, имеем

$$\mathcal{F}_j(t,\bar{x})=c\theta(x_n)\int\limits_{E_{n+1}}\exp\left(it\eta+i\bar{x}\bar{s}\right)\mu_j(\eta,\bar{s})K_h(s)\times$$

$$\times<s>^{\alpha_n-1}\left(<s>^{\alpha_n}+is_n\right)^{-1}\tau^{-\ell}\hat{F}(\tau,\bar{s})d\bar{s}\,d\eta,$$

где

$$\mu_j(\eta,\bar{s})=\frac{\tau^{\ell}<s>^{1-\alpha_n-\beta_j}}{b_j(\tau)}\left(<s>^{\alpha_n}+is_n\right)\int\limits_0^\infty \exp(is_nz_n)\times I_j(\tau,s,z_n)dz_n.$$

Легко показать, что для функции $\mu_\gamma(\eta,\bar{s})$ выполнены оценки (28). Следовательно, в силу теоремы о мультипликаторах получаем

$$\|\mathcal{F}_\gamma, L_p\| \leq C \Big\| \int\limits_{E_{n+1}} exp\,(it\eta + i\bar{x}\bar{s}) K_h(s) <s>^{\alpha_n - 1} \times$$

$$\times (<s>^{\alpha_n} + is_n)^{-1} \tau^{-\ell} \hat{F}(\tau,\bar{s})\, d\bar{s}\, d\eta, L_p\Big\| =$$

(используя тождество (29), имеем)

$$= C_1 \Big\| \int\limits_0^t \int\limits_0^{x_n} \int exp\,(ixs - \gamma t - (x_n - y_n) <s>^{\alpha_n})(t-t')^{\ell-1} \times$$

$$\times \Big[\int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} G(sv^\alpha)\, dv\Big] <s>^{\alpha_n - 1} \hat{f}(t', s, y_n)\, ds\, dy_n\, dt', L_p\Big\|.$$

А интегралы такого типа мы оценивали при доказательстве предыдущей леммы. Поэтому, повторяя аналогичные рассуждения, получаем, что при выполнении условий теоремы I имеет место неравенство

$$\|\mathcal{F}, L_p\| \leq C(\gamma, K) \|f, L_{p,\gamma}\|,$$

откуда

$$\|v_h, L_p\| \leq C(\gamma, K) \|f, L_{p,\gamma}\|.$$

Такая же оценка справедлива для функции w_h. Следовательно,

$$\|u_{jh}, L_{p,\gamma}\| \leq C_1 \|f, L_{p,\gamma}\|.$$

Аналогично можно получить неравенство

$$\|\mathcal{D}_t^{\tau_0} u_{jh}, L_{p,\gamma}\| \leq C_2 \|\mathcal{D}_t^{s_0} f, L_{p,\gamma}\|.$$

Отсюда вытекает (30). Доказательство (3I) проводится точно так же. Лемма доказана.

В следующей лемме утверждается, что функция $u_h(t,\bar{x}) = u_h^+(t,\bar{x}) + u_h^-(t,\bar{x}) + \sum\limits_1^\mu u_{jh}$ является приближенным решением смешанной задачи (I).

Л е м м а 7. <u>При</u> $h \to 0$ <u>имеет место</u>

$$\|L(\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{\bar{x}}) u_h - f, L_{p,\gamma}\| \to 0, \qquad (32)$$

<u>причем почти всюду</u>

$$B_j(\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{\bar{x}}) u_h \big|_{x_n=0} = 0, \quad j=1,\dots,\mu, \tag{33}$$

и

$$u_h = 0 \quad \text{при} \quad t<0. \tag{34}$$

Доказательство. Учитывая тождества (7), легко показать [9], что

$$L(\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{\bar{x}})(u_h^+ + u_h^-) = (2\pi)^{1-n} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1} \times$$

$$\times \iint exp\left(i \frac{x-y}{\sigma^\alpha} \xi\right) G(\xi) f(t,y,x_n) d\xi dy d\sigma,$$

$$L(\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{\bar{x}}) u_{jh} = 0, \quad j=1,\dots,\mu.$$

Отсюда в силу интегрального представления (6) следует (32).

Доказательство (33) вытекает непосредственно из тождества (8).

Докажем (34). Рассмотрим первое слагаемое $u_h^+(t,\bar{x})$. Как отмечалось при доказательстве леммы 2, эту функцию можно представить в виде

$$u_h^+(t,\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_n} \int_{E_1} \int_{E_{n-1}} exp\left(i \frac{x\xi}{\sigma^\alpha}\right) \times$$

$$\times K_\sigma(\gamma, t, \xi, x_n, y_n) d\xi dy_n d\sigma,$$

где $K_\sigma(\gamma,t,\xi,x_n,y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta+\gamma)t} \tilde{\Phi}_\sigma(i\eta+\gamma,\xi,x_n,y_n) d\eta$ определена в (10), причем функция $\tilde{\Phi}_\sigma(i\eta+\gamma,\xi,x_n,y_n)$ аналитична по $\tau = i\eta+\gamma$ при $\gamma>\gamma_0$. В силу условий теоремы 1 на $f(t,\bar{x})$ и определения функции $G_+(\tau,\xi,x_n)$ имеем неравенство

$$|\tilde{\Phi}_\sigma(\tau,\xi,x_n,y_n)| \le c|\tau|^{-2\ell}, \quad Re\,\tau > \gamma_0,$$

где $c>0$ не зависит от τ. Отсюда, учитывая независимость функции $K_\sigma(\gamma,t,\xi,x_n,y_n)$ от γ при $\gamma>\gamma_0$, получаем оценку $|K_\sigma(\gamma,t,\xi,x_n,y_n)| \le ce^{\gamma_1 t}$ при любом $\gamma_1>\gamma_0$. Следовательно, при любом фиксированном $t<0$, устремив γ_1 к $+\infty$, имеем $K_\sigma(\gamma,t,\xi,x_n,y_n)=0$, а значит, и $u_h^+(t,\bar{x})=0$ при $t<0$.

Аналогичным образом можно показать, что $u_h^-(t,\bar{x})$ и $u_{jh}(t,\bar{x})$ обращаются в нуль при $t<0$. Отсюда следует (34). Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы I. Из лемм 3-6 следует, что существует функция $u(t,\bar{x})\in W^{r}_{p,\gamma}(E^{+}_{n+1})$ такая, что $\|u-u_h, W^{r}_{p,\gamma}\|\to 0$ при $h\to 0$, и для нее выполнена оценка (2). А из леммы 7 вытекает, что эта функция является решением смешанной задачи (I) из класса $W^{r}_{p,\gamma}$. Покажем, что решение определено однозначно.

Доказательство единственности решения задачи (I) из класса $W^{r}_{p,\gamma}$ проведем, следуя схеме из работы В.А. Солонникова [I2]. Вначале покажем единственность решения $u\in W^{r}_{p,\gamma}$, имеющего компактный по x носитель. В этом случае, применяя преобразование Фурье-Лапласа, при $f(t,\bar{x})\equiv 0$ получаем, что функция $v(\tau,\xi,x_n)=L_{t\to\tau}F_{x\to\xi}\,u(t,\bar{x})$ является решением краевой задачи

$$L(\tau,i\xi,\mathcal{D}_{x_n})v=0,\quad x_n>0,$$

$$B_j(\tau,i\xi,\mathcal{D}_{x_n})v\big|_{x_n=0}=0,$$

$$|v|\to 0 \quad \text{при } x_n\to+\infty.$$

А поскольку при $Re\,\tau>\gamma_0$ и $\xi\in E_{n-1}\setminus\{0\}$ выполнено условие Лопатинского, то $v(\tau,\xi,x_n)\equiv 0$ при $\xi\neq 0$. Следовательно, в силу непрерывности $v(\tau,\xi,x_n)\equiv 0$ при любом $\xi\in E_{n-1}$. Итак, решение $u(t,x,x_n)$, имеющее компактный носитель по x, единственно. При этом, как следует из замечания к леммам 3 и 4 (см. (22) и (23)), в силу неравенства Стеклова получаем оценку

$$\|u,L_{p,\gamma}\|\le c(K)\|\mathcal{D}_{x_j}^{1/\alpha_j}u,L_{p,\gamma}\|\le c(\gamma,K)\|L(\mathcal{D})u,L_{p,\gamma}\|. \tag{35}$$

Рассмотрим теперь общий случай. Покажем, что на любом компакте $K\subset E_{n-1}$ при $\gamma>\gamma_0$ выполнено $\|u,L_{p,\gamma}(E_2^{++}\times K)\|=0$, если $f(t,\bar{x})\equiv 0$. Так как $u(t,\bar{x})\in W^{r}_{p,\gamma}$, то для любого $\varepsilon>0$ существует функция $u_\varepsilon(t,\bar{x})\in W^{r}_{p,\gamma}$ такая, что носитель $u_\varepsilon(t,\bar{x})$ по x принадлежит K и

$$\|u(t,\bar{x})-u_\varepsilon(t,\bar{x}),W^{r}_{p,\gamma}(E_2^{++}\times K)\|<\varepsilon.$$

Следовательно, учитывая оценку (35), имеем

$$\| u, L_{p,\gamma}(E_2^{++}\times K)\| \leq c\,\| L(\mathcal{D})u_\varepsilon , L_{p,\gamma}(E_2^{++}\times K)\| + \varepsilon =$$

$$= c\,\| L(\mathcal{D})(u-u_\varepsilon), L_{p,\gamma}(E_2^{++}\times K)\| + \varepsilon .$$

А учитывая условия I)-2), по теореме об оценках смешанных производных [I4] получаем

$$\| u, L_{p,\gamma}(E_2^{++}\times K)\| \leq c_1 \| u-u_\varepsilon , W^{\tau}_{p,\gamma}(E_2^{++}\times K)\| + \varepsilon \leq (c_1+1)\varepsilon .$$

Отсюда имеем $\| u, L_{p,\gamma}(E_2^{++}\times K)\| = 0$. Следовательно, в силу произвольности компакта $K\subset E_{n-1}$ получаем единственность решения смешанной задачи (I) из класса $W^{\tau}_{p,\gamma}$.

Теорема I доказана.

§ 4. Решение смешанной задачи для уравнений с переменными коэффициентами

В этом параграфе мы докажем теорему 2. Используя явную конструкцию $u = Pf$ решения смешанной задачи (I) для уравнений с постоянными коэффициентами, докажем существование решения задачи для уравнений с переменными коэффициентами по обычной схеме (см., например, [I5]). Взяв в качестве регуляризатора оператор P , решение задачи (I) сведем к решению операторного уравнения $(I-T)\tilde f = f$, где оператор T мал по норме. Действительно, если мы будем искать решение в виде $u(t,\bar x) = P\tilde f(t,\bar x)$, то, учитывая, что $P\tilde f(t,\bar x) = 0$ при $t<0$, получаем уравнение на неизвестную функцию $\tilde f(t,\bar x)$:

$$L(t,\bar x;\mathcal{D}_t,\mathcal{D}_{\bar x})P\tilde f(t,\bar x) \equiv \tilde f(t,\bar x) -$$

$$-\left[L(t^0,\bar x^0;\mathcal{D}_t,\mathcal{D}_{\bar x}) - L(t,\bar x;\mathcal{D}_t,\mathcal{D}_{\bar x})\right]P\tilde f(t,\bar x) = f(t,\bar x). \tag{36}$$

Обозначим $T = \Delta L(\mathcal{D})P.$

Покажем, что если коэффициенты оператора $L_0(t,\bar x;\mathcal{D}_{\bar x})$ достаточно мало отличаются от постоянных, то существует $\bar\gamma > 0$ такое, что при $\gamma > \bar\gamma$ выполнена оценка

$$\| T\tilde f, W^{s}_{p,\gamma}\| \leq q\,\| \tilde f, W^{s}_{p,\gamma}\| , \tag{37}$$

где $q<1$, $s=(\ell, 1/\alpha_1,\dots,1/\alpha_n)$.

По условию I) имеем

$$\Delta L(\mathcal{D}) = \sum_{\beta\alpha=1} \left(a_\beta(t^\circ,\bar{x}^\circ) - a_\beta(t,\bar{x})\right)\mathcal{D}_t^\ell \mathcal{D}_{\bar{x}}^\beta +$$

$$+ \sum_{\substack{\beta\alpha=1\\ \kappa\le\ell-1}} \left(a_{\kappa\beta}(t^\circ,\bar{x}^\circ) - a_{\kappa\beta}(t,\bar{x})\right)\mathcal{D}_t^\kappa \mathcal{D}_{\bar{x}}^\beta .$$

Введем обозначения: $m = max\{\ell, 1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_n\}$,

$$d_1 = \sum_\beta \|(a_\beta(t^\circ,\bar{x}^\circ) - a_\beta(t,\bar{x})), C^m\|,$$

$$d_2 = \sum_{\beta,\kappa} \|(a_{\kappa\beta}(t^\circ,\bar{x}^\circ) - a_{\kappa\beta}(t,\bar{x})), C^m\|.$$

Напомним, что коэффициенты $a_\beta(t,\bar{x})$ и $a_{\kappa\beta}(t,\bar{x})$ постоянные вне компакта $\tilde{K}\subset E^{++}_{n+1}$. Имеет место следующая

Л е м м а 8. <u>Пусть функция</u> $f(t,\bar{x})\in W^s_{p,\gamma}$, <u>тогда выполнена оценка</u>

$$\|Tf, W^s_{p,\gamma}\| \le c\,(d_1 + d_2\gamma^{-1})\|f, W^s_{p,\gamma}\|,$$

<u>где константа</u> C <u>зависит от</u> γ_0.

Доказательство этой леммы вытекает из определения оператора P и замечания к леммам 3 и 4 (см. (22),(23)).

Из этой леммы следует, что если d_1 и γ^{-1} достаточно малы, то будет справедлива оценка (37). Следовательно, при $f(t,\bar{x})\in W^s_{p,\gamma}$ из уравнения (36) находим $\tilde{f}(t,\bar{x}) = (I-T)^{-1}f(t,\bar{x})\in W^s_{p,\gamma}$. Поэтому если $d=\sum_1^n \alpha_i/p' > 1$, то получаем решение задачи (I) в виде

$$u(t,\bar{x}) = P_\circ(I-T)^{-1}f(t,\bar{x}) \in W^z_{p,\gamma}.$$

Если $d\le 1$, то $u(t,\bar{x})$ будет решением задачи (I) из класса $W^z_{p,\gamma}$ при дополнительном предположении, что выполнено условие (5).

Итак, при выполнении условий теоремы 2 решение смешанной задачи (I) для уравнений с переменными коэффициентами получено, причем для него выполнена оценка (2). Доказательство единственности решения проводится так же, как в [9]. Теорема 2 доказана.

§ 5. Некоторые следствия для квазиэллиптических уравнений

Рассмотрим краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических уравнений

$$L(\bar{x}; \mathcal{D}_{\bar{x}})u = f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in E_n^+,$$
$$B_j(\mathcal{D}_{\bar{x}})u\big|_{x_n=0} = 0, \quad j=1,\dots,\mu. \tag{38}$$

Предположим, что символ оператора $L(\bar{x}; \mathcal{D}_{\bar{x}})$ однороден относительно вектора $\alpha=(\alpha',\alpha_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n), \alpha_i > 0$, т.е.

$$L(\bar{x}; c^{\alpha'}i\xi, c^{\alpha_n}i\lambda) = cL(\bar{x}; i\xi, i\lambda),$$

причем коэффициенты гладкие и постоянные вне компакта $K \subset E_n^+$. В силу квазиэллиптичности и однородности имеем оценку

$$c_1(<\xi>+|\lambda|^m) \leqslant |L(\bar{x}^0; i\xi, i\lambda)| \leqslant c_2(<\xi>+|\lambda|^m), \quad m = 1/\alpha_n,$$

из которой следует, что μ - число корней уравнения $L(\bar{x}; i\xi, i\lambda) = 0$, имеющих $\operatorname{Im}\lambda > 0$, не зависит от $\xi \in E_{n-1} \setminus \{0\}$.

Будем считать, что граничные операторы $B_j(\mathcal{D}_{\bar{x}})$, $j=1,\dots,\mu$, имеют вид

$$B_j(\mathcal{D}_{\bar{x}}) = \mathcal{D}_{x_n}^{m_j} + \sum_{k=0}^{m_j-1} b_{jk}(\mathcal{D}_x)\mathcal{D}_{x_n}^{k},$$

удовлетворяют условию Лопатинского и их символы однородны относительно вектора α с показателем β_j , $0 \leqslant \beta_j < 1$, т.е.

$$B_j(c^{\alpha'}i\xi; c^{\alpha_n}i\lambda) = c^{\beta_j}B_j(i\xi, i\lambda).$$

Мы приведем сейчас теоремы о корректной разрешимости краевых задач (38) в соболевских классах $W_p^r(E_n^+)$, $1<p<\infty$, которые непосредственно вытекают из рассуждений, проведенных при доказательстве теорем I и 2. Для простоты будем считать, что $K = \operatorname{supp} f < \infty$. Напомним обозначения: $d = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i/p'$, $1/p + 1/p' = 1$, $\alpha_{min} = \min(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$.

Т е о р е м а 3. Пусть $f(\bar{x}) \in W_p^s(E_n^+)$, где $s\alpha = m \geqslant 0$ - целое. Если $d > 1$, то краевая задача (38) для уравнения с постоянными коэффициентами имеет единственное решение $u(\bar{x}) = Rf(\bar{x}) \in W_p^r(E_n^+)$, где $r\alpha = m+1$, и для него справедлива оценка

$$\|u, W_p^r\| \leqslant c\,\|f, W_p^s\|, \tag{39}$$

где c - константа, зависящая от $\operatorname{diam} K$. Если $d < 1$ и выполнено условие

$$\int\limits_{E_{n-1}} x^{\sigma} f(x, x_n)\,dx = 0, \quad |\sigma| = 0, \dots, N-1,$$

где N - натуральное число, определяемое из неравенств

$$d + N\alpha_{min} > 1 \geq d + (N-1)\alpha_{min}, \tag{40}$$

то краевая задача (38) также имеет единственное решение в классе $W_p^{r}(E_n^{+})$ и для него выполнена оценка (39).

Т е о р е м а 4 . Пусть выполнены условия теоремы 3 и коэффициенты уравнения достаточно мало отличаются от постоянных. Если $d > 1$, то краевая задача (38) корректно разрешима в классе $W_p^{r}(E_n^{+})$. Если $d \leq 1$, то предположим, что имеет место

$$\int\limits_{E_{n-1}} x^{\sigma} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (\Delta L(\mathcal{D}) R)^{k} \Big) f(x, x_n)\,dx = 0$$

при $|\sigma| = 0, \dots, N-1$, где N определяется неравенством (40), оператор R определен в предыдущей теореме и

$$\Delta L(\mathcal{D}) = L(\bar{x}^{0}; \mathcal{D}_{\bar{x}}) - L(\bar{x}; \mathcal{D}_{\bar{x}}).$$

В этом случае краевая задача (38) также корректно разрешима в классе $W_p^{r}(E_n^{+})$.

Для доказательства теорем 3 и 4 достаточно повторить аналогичные рассуждения, проведенные при доказательстве теорем I и 2 для операторов вида $L(t, \bar{x}; \mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{\bar{x}}) = \mathcal{D}_t^{\ell} L(\bar{x}; \mathcal{D}_{\bar{x}})$ и $B_j(\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{\bar{x}}) = \mathcal{D}_t^{\ell} B_j(\mathcal{D}_{\bar{x}})$, при фиксированном $t > 0$.

З а м е ч а н и е I . Подчеркнем, что в теоремах указаны условия разрешимости в классах W_p^{r}, $1 < p < \infty$, число условий зависит от порядков операторов, размерности пространства n и p, при этом N уменьшается с ростом p. В других классах функций условия разрешимости краевых задач (38) будут, естественно, другими [I2, I5, I6] .

З а м е ч а н и е 2. Влияние условий ортогональности правой части f некоторым полиномам на свойства решений квазиэллиптических уравнений во всем пространстве E_n исследовалось в [I7 - I9].

В заключение автор выражает благодарность профессору С.В. Успенскому за полезные обсуждения работы.

Литература

1. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики.- Изв. АН СССР. Сер.матем., 1954, т. 18, № 1, с.3-50.
2. Физика океана, т.1,2. (Отв. ред. Каменкович В.М., Монин А.С.).- М.: Наука, 1978.
3. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях.- М.: Мир, 1981.
4. Вишик М. И. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения.- Мат. сб., 1956, т.39, № 1, с.51-148.
5. Showalter R.E., Ting T.W. Pseudoparabolic partial differential equations. - SIAM J.Math.Anal., 1970, v.1, No 1, p.1-26.
6. Lagnese J.E. General boundary value problems for differential equations of Sobolev type. - SIAM J.Math.Anal., 1972, v.3, No 1, p.105-119.
7. Гальперн С. А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными.- Тр. Моск. мат. о-ва, 1960, т.9, с.401-423.
8. Масленникова В. Н. Явные представления и априорные оценки решений граничных задач для систем Соболева.- Сиб.мат.журн., 1968, т. 9, № 5, с. 1182-1198.
9. Демиденко Г. В. О смешанных краевых задачах для уравнений типа С.Л. Соболева с переменными коэффициентами.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара академика С.Л. Соболева), 1979, т. 2, с. 52-91.
10. Успенский С. В. О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов.- Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1972, т. 117, с.292-299.
11. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.- М.: ИЛ, 1963.
12. Солонников В.А. О краевых задачах для систем линейных параболических дифференциальных уравнений общего вида.- Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1965, т. 83, с.3-162.
13. Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов и его приложения.- Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1969, т. 105, с. 89-167.
14. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.- М.: Наука, 1975.

15. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.- Успехи мат. наук, 1964, т.19, вып. 3, с. 53-161.

16. Успенский С. В. Об оценках на бесконечности решений общих краевых задач для уравнений квазиэллиптического типа.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск, Наука, 1973, с. 196-201.

17. Успенский С. В. О дифференциальных свойствах решений одного класса псевдодифференциальных уравнений на бесконечности. I - Сиб. мат. журн., 1972, т. 13, № 3, с. 665-678; II - Сиб. мат. журн., т. 13, № 4, с. 903-909.

18. Успенский С. В., Чистяков Б. Н. О выходе на полином решений одного класса псевдодифференциальных уравнений при стремлении $|x| \to \infty$.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара академика С.Л. Соболева), 1979, № 1, с. 119-135.

19. Шмырёв Г. А. О выходе на полином решений одного класса уравнений квазиэллиптического типа при $|x| \to \infty$. В кн.: Теоремы вложения к задачам математической физики (Труды семинара академика С.Л.Соболева), 1983, № 1, с. 134-147.