УДК 517.946

ОДНОСТОРОННЯЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РЕШЕНИЕ

В. В. Катышев (Кемерово)

В работах [1,2] изучалась односторонняя задача для гиперболического уравнения с ограничением на производную от решения. Целью настоящей работы является постановка и исследование односторонней задачи для гиперболического уравнения в пространствах Соболева с ограничением на решение.

Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $Q=\Omega\times(0,T)$. Через $(\cdot,\ \cdot)$ и $\|\cdot\|$ будем обозначать скалярное произведение и норму в $L_2(Q)$.

В области Q рассмотрим уравнение:

$$Lu \equiv u_{tt} - \Delta u + \Phi(u) = f \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$u\big|_{t=0} = 0,\quad u_t\big|_{t=0} = 0,\quad u\big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0. \tag{2}$$

От известных функций потребуем выполнения следующих условий:

$$\Phi \in C^1(R),\ f \in L_2(Q),\ f_t \in L_2(Q). \tag{3}$$

Постановка задачи: найти функцию $u \in W_2^2(Q)$ такую, что $|u| \le M$ почти всюду (п.в.) в Q, где M - положительное число, и выполнено неравенство:

$$\int_0^T (Lu - f,\ v - u_t) e^{-\lambda t} dt \geqslant 0 \tag{4}$$

для всех $v \in L_2(Q)$ таких, что $\left|\int_0^t v\,d\tau\right| \le M$,

$$u\big|_{t=0} = 0,\quad u_t\big|_{t=0} = 0,\quad u\big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0; \tag{5}$$

Т е о р е м а . Пусть выполнены условия (3) и $\lambda > \sigma > 0$ - постоянная, удовлетворяющая неравенству

$$\lambda > \frac{1}{2} \max_{|\eta| \le M} |\Phi'(\eta)\lambda_0|,$$

где $\lambda_0=\lambda_0(\Omega)$- постоянная в неравенстве Пуанкаре. Тогда существует единственное решение задачи (4)-(5).

Доказательство. Пусть $\{w_j(x)\}$- собственные функции оператора $-\Delta$ с нулевыми граничными условиями. Известно, что система $\{w_j\}$ плотна в $W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Рассмотрим регуляризованное уравнение:

$$Lu_\varepsilon=u_{\varepsilon tt}-\Delta u_\varepsilon+\Phi(\xi(u_\varepsilon))+\frac{1}{\varepsilon}e^{\lambda t}\int_t^T\beta_1(u_\varepsilon)d\tau+$$

$$+\frac{e^{\lambda t}}{\varepsilon}\int_t^T\beta_2(u_\varepsilon)d\tau=f(x,t), \tag{6}$$

$$u_\varepsilon\big|_{t=0}=0,\quad u_{t\varepsilon}\big|_{t=0}=0,\quad u_\varepsilon\big|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0, \tag{7}$$

где

$$\beta_1(\eta)=(M-\eta)^-,\ \beta_2(\eta)=-\beta_1(-\eta),\ \xi(\eta)=\begin{cases}M, & \eta>M,\\ \eta, & -M\le\eta\le M,\\ -M, & \eta<-M.\end{cases}$$

Решение задачи (6)-(7) будем искать в виде

$$u_\varepsilon^N=\sum_{j=1}^N c_{jN}(t)\,w_j(x).$$

В дальнейшем индексы N и ε опустим там, где это не вызовет недоразумений. Коэффициенты $c_{jN}(t)$ определим из системы

$$(L_\varepsilon u^N,w_j)=(f,w_j), \tag{8}$$

$$c_{jN}(0)=0,\quad c'_{jN}(0)=0,\quad j=1,\dots,N. \tag{9}$$

Нетрудно заметить, что задача (8)-(9) разрешима на $(0,T)$.

Получим теперь равномерные оценки $\{u_\varepsilon^N\}$ в $W_2^2(Q)$. Умножив (8) на $e^{-\lambda t}c_j'(t)$, просуммировав по j и затем проинтегрировав на (0,T), получим

$$\int_0^T(L_\varepsilon u,u_t)e^{-\lambda t}dt=\int_0^T(f,u_t)e^{-\lambda t}dt. \tag{10}$$

Первая оценка получается из (10) после интегрирования по частям и применения неравенства Юнга. Здесь мы оценим только интегралы, содержащие оператор штрафа:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\Big(\int_t^T\beta_1(u)d\tau,u_t\Big)dt=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\big(\beta_1(u),u\big)dt=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\big(\beta_1(u),u-M\big)dt+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\big(\beta_1(u),M\big)dt\ge\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\|\beta_1(u)\|^2dt.$$

Аналогично поступаем и с β_2, т.е. имеем

$$\int_0^T (\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2 e^{-\lambda t}dt+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\|\beta_i(u)\|^2 dt\leq C_2, \tag{II}$$

где C не зависит от ε и N.

Умножив теперь (8) на $e^{-\lambda t}\lambda_i C'_{jN}$ и просуммировав по j, получим:

$$-\int_0^T(L_\varepsilon u,\Delta u_t)e^{-\lambda t}dt=-\int_0^T(f,\Delta u_t)e^{-\lambda t}dt.$$

Оценим интегралы, содержащие операторы штрафа и нелинейную функцию:

$$-\int_0^T(\Phi(\xi(u)),\Delta u_t)e^{-\lambda t}dt=-\left(\Phi(\xi(u(T))),\Delta u(T)\right)e^{-\lambda T}-$$

$$-\lambda\int_0^T(\Phi(\xi(u)),\Delta u)e^{-\lambda t}dt+\int_0^T\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\xi(u)),\Delta u\right)e^{-\lambda t}dt\leq$$

$$\leq c+\frac{1}{4}\|\Delta u\|^2(T)e^{-\lambda t}+\frac{\lambda}{4}\int_0^T\|\Delta u\|^2e^{-\lambda t}dt+\varepsilon_1\int_0^T\|\Delta u\|^2e^{-\lambda t}dt,$$

$$-\int_0^T\left(\int_t^T\beta_1(u)d\tau,\Delta u_t\right)dt=-\int_0^T(\beta_1(u),\Delta u)dt=\int_0^T(\nabla\beta_1,\nabla u)dt\geq 0.$$

Аналогично поступим с β_2.

Таким образом, справедлива оценка

$$\int_0^T(\|\nabla u_t\|^2+\|\Delta u\|^2)e^{-\lambda t}dt\leq C, \tag{I2}$$

где C не зависит от ε и N.

Теперь умножив (8) на $e^{-\lambda t}C''_{jN}$ и просуммировав по j, имеем

$$\int_0^T(L_\varepsilon u,u_{tt})e^{-\lambda t}dt=\int_0^T(f,u_{tt})e^{-\lambda t}dt, \tag{I3}$$

но

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\left(\int_t^T\beta_1(u)d\tau,\ u_{tt}\right)dt=\frac{1}{3}\int_0^T(\beta_1(u),u_t)dt= \quad .$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_M^u\beta_1(\xi)d\xi,1\right)dt=\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega\int_0^{u(T)}\beta_1(\xi)d\xi\,dx\geq 0.$$

Аналогично поступим с β_2. Следовательно, если учесть (II) и (I2), то получим

$$\int_0^T\|u_{tt}\|^2e^{-\lambda t}dt\leq C, \tag{I4}$$

где C не зависит от ε и N.

Из найденных оценок следует существование подпоследовательности пос-

ледовательности $\{u_\varepsilon^N\}$ такой, что в (8) можно перейти к пределу и получить уравнение (6), которое справедливо почти всюду в Q .

Ясно, что и для предельной функции $\{u_\varepsilon\}$ будут справедливы оценки (II), (I2),(I4). Поэтому, устремляя ε к нулю в неравенстве

$$\int_0^T (Lu_\varepsilon - f, v - u_t^\varepsilon) e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (\beta_1(u_\varepsilon), u_\varepsilon - \int_0^t v d\tau) dt \geq 0,$$

получаем существование решения задачи (4)-(5).

Единственность показывается обычным образом (см. [I]):

$$\int_0^T (Lu_1 - Lu_2, w_t) e^{-\lambda t} dt \leq 0,$$

где $w = u_1 - u_2$, u_i – два решения задачи (4) - (5).

Так как $\int_0^T (|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)|, |w_t|) e^{-\lambda t} dt \leq \frac{1}{2} \max_{|\xi| \leq M} |\Phi'(\xi)| \times$

$$\times (\lambda_0 \int_0^T \|\nabla w\|^2 e^{-\lambda t} dt + \int_0^T \|w_t\|^2 e^{-\lambda t} dt)$$

и $\lambda > \frac{1}{2} \max |\Phi'(\xi)| \lambda_0$, то $w = 0$, значит, $u_1 = u_2$ п.в. в Q.

Замечание I. Пусть $|u(x,t)| < M$ в $Q_1 \subset Q$. Тогда, полагая $v = \alpha w_t + u_t$, w финитна в Q_1 , а α достаточно мала, имеем

$$\int_{Q_1} (Lu - f) w_t \, dQ_1 = 0$$

для любой функции $w \in L_2(Q)$, $w_t \in L_2(Q)$. Следовательно, $Lu - f = F(x)$ п.в. в Q_1 . Если $Q_1 = \Omega_1 \times (t_0, T)$, $n = 1,2$, то нетрудно видеть, что $Lu = f$ в Q_1 .

Замечание 2. В случае $n = 1,2$ можно показать, что уравнение (I) выполнено почти всюду в окрестности боковой поверхности Q .

Литература

I. Катышев В. В. Эволюционное неравенство для гиперболического нелинейного оператора.- В кн.: Численные методы механики сплошной среды.- Новосибирск, 1983, т. 14, с. 79-86.

2. Ларькин Н. А. О глобальных решениях нелинейных гиперболических неравенств.- Докл. АН СССР, 1980, т. 250, № 4, с. 806-809.