УДК 517.946

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ И ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А. И. Кожанов (Новосибирск)

В теории краевых задач для нелинейных параболических уравнений высокого порядка можно выделить два направления. Первое связано с методом монотонности и его обобщениями и дает фактически лишь обобщенные решения. Основы метода монотонности заложены в работах Г.Минти, М.И. Вишика, Ф.Е. Браудера (подробная библиография и изложение результатов имеется в монографиях [1,2]). Второе направление связано с получением регулярных решений, т.е. решений, обладающих всеми производными, входящими в уравнение. Отметим здесь работы [3,4] , где на основе оценок для линейного в главной части параболического уравнения высокого порядка получены теоремы о локальной разрешимости (т.е. в малом по времени), а также упомянутую выше работу [2] , в которой доказано, в частности, существование регулярных решений для уравнений

$$u_t + \varphi(Lu) = f(x,t),$$

где L - линейный эллиптический оператор порядка $2m$, функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет условию

$$(-1)^m \xi \cdot \varphi(\xi) \geq c_0 |\xi|^p, \quad c_0 > 0, \quad p > 1.$$

Существование регулярных решений для одномерных уравнений недивергентного вида

$$(-1)^{m+1} u_t = a(x,t,u,\dots,D_x^{2m-1}u) D_x^{2m} u + f(x,t,u,D_x u,\dots,D_x^{2m-1}u)$$

изучалось в работе [5] , в которой основным условием было условие подчинения функции $f(x,t,\dots)$, т.е. условие типа условий Бернштейна .

В настоящей работе будем рассматривать нелинейные параболические уравнения вида

$$Lu = u_t + (-1)^m D_x^m \varphi(x,t,u,\dots,D_x^m u) + \psi(x,t,u,\dots,D_x^{2m-1} u) = f(x,t),$$

для простоты в случае $m=2$, т.е. уравнения дивергентного вида; при этом если данное уравнение записать в недивергентном виде, то условие из [5] выполнено не будет. В различных случаях, не сводящихся к малым возмущениям линейного в главной части уравнения, будут доказаны теоремы о глобальной разрешимости.

Пусть $Q=\{(x,t): 0<x<1,\ 0<t<T<+\infty\}$. Рассмотрим в Q уравнение

$$Lu = u_t + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx}) - \psi(u,u_x,u_{xx}) = f(x,t) \tag{1}$$

(зависимость функций φ, ψ от x, t для простоты опущена) и краевые задачи: найти решение уравнения (I), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \tag{3}$$

либо условию (2) и условию

$$u(0,t) = u(1,t) = u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0. \tag{4}$$

В дальнейшем функцию $\psi(\xi,\eta,\zeta)$ будем предполагать непрерывно дифференцируемой на любом компакте из R^3 , а функцию $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ - предполагать трижды непрерывно дифференцируемой на любом компакте. Всюду далее буквами $C, K, M, \ell, m, \dots$ будем обозначать постоянные, не зависящие от элементов рассматриваемого множества (т.е. от решения). В разных формулах и условиях эти постоянные, вообще говоря, различны.

Л е м м а I. Пусть выполнены условия:

для всех $(\xi,\eta,\zeta)\in R^3$ имеют место

$$\zeta\cdot\varphi(\xi,\eta,\zeta) \geq k_0\zeta^2 - \varphi_0(\xi,\eta,\zeta),\ k_0>0,\ |\varphi_0(\xi,\eta,\zeta)| \leq k_1\xi^2 + k_2\eta^2 + k_3,$$
$$k_i \geq 0,\quad k_0 - k_2 > 0,$$
$$|\psi(\xi,\eta,\zeta)| \leq C(1+|\xi|+|\eta|+|\zeta|),\quad C\geq 0.$$

Тогда если $f(x,t)\in L_2(Q), u_0(x)\in L_2(0,1)$, то для любого гладкого решения задачи (I),(2),(4) справедлива оценка

$$\int_0^1 u^2(x,t)\,dx + \int_0^t\int_0^1 (u^2+u_x^2+u_{xx}^2)\,dx\,d\tau \leq M, \tag{5}$$

где $t\in[0,T]$, постоянная M зависит лишь от $u_0(x), f(x,t)$ и от постоянных из условий леммы. Если дополнительно $\varphi(\xi,\eta,0)\equiv 0$, то такая же оценка справедлива и для гладких решений задачи (I),(2),(3).

Оценки леммы I представляют собой первое энергетическое неравенство для решений уравнения (I) и доказываются стандартным методом с использованием теорем вложения и леммы Гронуолла.

Замечание I. Условия леммы I дают некоторые достаточные условия справедливости оценки (5); теоремы вложения, условия монотонности, наложенные на функцию ψ, могут дать другие достаточные условия.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы I и, кроме того, для всех $(\xi,\eta,\zeta)\in R^3$ имеют место

$$|\varphi(\xi,\eta,\zeta)|\leq C(1+|\xi|+|\eta|+|\zeta|),$$

$$\frac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta}\geq \ell_0>0,\quad \left|\frac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi}\right|\leq \ell_1,\quad \left|\frac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta}\right|\leq \ell_2,$$

$$\left|\frac{\partial\psi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi}\right|+\left|\frac{\partial\psi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta}\right|+\left|\frac{\partial\psi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta}\right|\leq C.$$

Тогда если $f(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(0,1))$, $f_t\in L_2(Q)$, $u_0(x)\in C^4(0,1)$, то для гладких решений задач (I),(2),(3), (I),(2),(4) справедлива оценка

$$\int_0^t\int_0^1\left(u_\tau^2+u_{xx\tau}^2\right)dxd\tau+\int_0^1\left\{u_x^2+u_{xx}^2+\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\right]^2\right\}dx\leq M_1,$$

где $t\in[0,T]$, постоянная M_1 зависит лишь от функций $u_0(x)$, $f(x,t)$ и постоянных из условий лемм I,2.

Доказательство. Для гладких решений соответствующих краевых задач рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot u_\tau dxd\tau=\int_0^t\int_0^1 fu_\tau dxd\tau.$$

После интегрирования по частям имеем

$$\int_0^t\int_0^1\left\{u_\tau^2+u_{xx}u_{xx\tau}-u_{xx}u_\tau\right\}dxd\tau=\int_0^t\int_0^1 u_\tau f dxd\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1\left[\varphi(u,u_x,u_{xx})-u_{xx}\right]u_{xx\tau}dxd\tau+\int_0^t\int_0^1\left[\psi(u,u_x,u_{xx})-u_{xx}\right]u_\tau dxd\tau,$$

откуда в силу условий леммы и оценки (5) получим

$$\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2dxd\tau+\int_0^1\left[u_x^2(x,t)+u_{xx}^2(x,t)\right]dx\leq\delta\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2dxd\tau+M(\delta), \tag{6}$$

где $\delta>0$ - произвольная постоянная, постоянная $M(\delta)$, помимо δ, зависит также от функций $u_0(x), f(x,t)$ и постоянных из условий лемм I и 2.

Из равенства

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot u_{xx\tau}\,dx\,d\tau = \int_0^t\int_0^1 f u_{xx\tau}\,dx\,d\tau$$

в силу оценки (5) вытекает неравенство

$$\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dx\,d\tau \le \delta_1 \int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau + M(\delta_1)\int_0^t\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\right]^2 dx\,d\tau + M_1(\delta_1), \qquad (7)$$

где $\delta_1>0$ - произвольная постоянная.

Интегрируя по частям в равенстве

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\,dx\,d\tau = \int_0^t\int_0^1 f\,\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\,dx\,d\tau,$$

получаем

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\right]^2 dx + \int_0^t\int_0^1 \varphi_{u_{xx}}(u,u_x,u_{xx})u_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u_0,u_0',u_0'')\right]^2 dx - \int_0^t\int_0^1 \varphi_u(u,u_x,u_{xx})u_\tau u_{xx\tau}\,dx\,d\tau -$$

$$-\int_0^t\int_0^1 \varphi_{u_x}(u,u_x,u_{xx})u_{x\tau}u_{xx\tau}\,dx\,d\tau - \int_0^t\int_0^1\Big[\psi_u(u,u_x,u_{xx})u_\tau + \psi_{u_x}(u,u_x,u_{xx})u_{x\tau} +$$

$$+\psi_{u_{xx}}(u,u_x,u_{xx})u_{xx\tau}\Big]\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\,dx\,d\tau + \int_0^1\psi(u,u_x,u_{xx})\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\,dx -$$

$$-\int_0^1\psi(u_0,u_0',u_0'')\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u_0,u_0',u_0'')\,dx - \int_0^t\int_0^1 f_\tau\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\,dx\,d\tau +$$

$$+\int_0^1 f(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\,dx - \int_0^1 f(x,0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u_0,u_0',u_0'')\,dx.$$

Двойные интегралы в правой части в силу неравенств (6) и (7) и условий леммы оцениваются величиной

$$\delta_0\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau + K(\delta_0)\int_0^t\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\right]^2 dx\,d\tau + K_1(\delta_0),$$

где $\delta_0>0$ - произвольная постоянная; интегралы по сечению можно оценить величиной

$$\nu_0\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\right]^2 dx + K(\nu_0)\int_0^1(u_x^2+u_{xx}^2)\,dx + K$$

и далее, в силу неравенства (6), - величиной

$$\nu_0\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\right]^2 dx + \delta K(\nu_0)\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau + K(\delta,\nu_0)$$

($\nu_0>0$ – произвольная постоянная).

Таким образом, получим неравенство

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\right]^2dx+\ell_0\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau\le\left[\delta_0+\delta K(\nu_0)\right]\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\nu_0\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\right]^2dx+K(\delta_0)\int_0^t\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\right]^2dx\,d\tau+M_2.$$

Подбирая ν_0 достаточно малой, а затем по ν_0 выбирая δ_0,δ малыми, получаем возможность применить лемму Гронуолла, что вместе с неравенствами (6) и (7) завершает доказательство леммы.

Замечание 2. Если функции $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ и $\psi(\xi,\eta,\zeta)$ имеют вид

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\varphi_1(\xi)+\varphi_2(\xi,\eta,\zeta),\quad \psi(\xi,\eta,\zeta)=\psi_0(\eta)\xi+\psi_1(\xi,\eta,\zeta)$$

при выполнении соответствующих условий роста и знакоопределенности, то доказательство упрощается.

Лемма 3. <u>Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для гладких решений задачи (I),(2),(3) справедливы оценки</u>

$$\max_{\bar G}\left(|u|+|u_x|+|u_{xx}|\right)\le M_4,$$

$$\int_0^1 u_{xxx}^2\,dx+\int_0^t\int_0^1 u_{xxxx}^2\,dx\,d\tau\le M_5,$$

<u>где постоянные</u> M_4, M_5 <u>зависят от постоянных условий лемм I,2 и функций</u> $u_0(x)$, $f(x,t)$.

Доказательство. Интегрируя по частям в равенстве

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(u,u_x,u_{xx})\,dx\,d\tau=\int_0^t\int_0^1 f\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(u,u_x,u_{xx})\,dx\,d\tau$$

и учитывая условия роста и оценку леммы 2, получаем

$$\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi(u,u_x,u_{xx})\right]^2dx\le K_1,$$

откуда

$$\int_0^1\left[\varphi_{u_{xx}}(u,u_x,u_{xx})\right]^2dx=\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi(u,u_x,u_{xx})-\varphi_u(u,u_x,u_{xx})u_x-\varphi_{u_x}(u,u_x,u_{xx})u_{xx}\right]^2dx\le$$

$$\le k\left\{\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi(u,u_x,u_{xx})\right]^2dx+\int_0^1\varphi_u^2(u,u_x,u_{xx})u_x^2\,dx+\int_0^1\varphi_{u_x}^2(u,u_x,u_{xx})u_{xx}^2\,dx\right\}\le K_2$$

или

$$\int_0^1 u_{xxx}^2\,dx\le K_3.$$

Далее, из равенства

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot u_{xxxx}\,dx\,d\tau = \int_0^t\int_0^1 f u_{xxxx}\,dx\,d\tau$$

вследствие предыдущей оценки получим

$$\int_0^t\int_0^1 u_{xxxx}^2\,dx\,d\tau \le K_4 \int_0^t\int_0^1 u_{xxx}^2 |u_{xxxx}|\,dx\,d\tau + K_5 .$$

В силу мультипликативных неравенств [6] , имеем

$$\max_{0\le x\le 1} |u_{xxx}| \le C\left(\int_0^1 u_{xxx}^2\,dx\right)^{\frac14}\left(\int_0^1 u_{xxxx}^2\,dx\right)^{\frac14},$$

откуда

$$\int_0^t\int_0^1 u_{xxxx}^2\,dx\,d\tau \le K_4 \int_0^t \max_{0\le x\le 1}|u_{xxx}|\left(\int_0^1 u_{xxx}^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_0^1 u_{xxxx}^2\,dx\right)^{\frac12} d\tau + K_5 \le$$

$$\le K_6 \int_0^t \left(\int_0^1 u_{xxxx}^2\,dx\right)^{\frac34} d\tau + K_5 \le \delta \int_0^t\int_0^1 u_{xxxx}^2\,dx\,d\tau + K_7 ,$$

где $\delta > 0$ - произвольная постоянная. Полученное неравенство позволяет завершить доказательство леммы.

Т е о р е м а I. Если выполнены условия лемм I,2 и относительно функций $u_0(x), f(x,t)$ выполнены условия согласования, то всегда существует функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (I) почти всюду в Q и принимающая начальные и краевые условия (2),(3); при этом для функции $u(x,t)$ будут справедливы оценки лемм I,2,3.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Введем оператор L_ε и для этого оператора рассмотрим задачу: найти решение уравнения

$$L_\varepsilon u \equiv Lu + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u, u_x, u_{xx}) = f(x,t), \tag{I'}$$

удовлетворяющее условиям (2),(3).

Нетрудно показать, что для гладких решений задачи (I'),(2),(3) справедливы все оценки лемм I-3 и, кроме того, оценка

$$\varepsilon \int_0^t\int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u,u_x,u_{xx})\right]^2 dx\,d\tau \le M. \tag{8}$$

Заметим, что при фиксированном ε эти оценки справедливы для функции $f(x,t)$ из $L_2(Q)$. Это означает, что к уравнению (I') применим метод продолжения по параметру, т.е. что при фиксированном $\varepsilon > 0$ задача (I'),(2), (3) имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$, для которого справедливы оценки лемм I-3 и оценка (8) (по поводу существования решения задачи (I'),(2),(3) см. также [7]). Далее, условие $f(x,t)\in L_\infty(0,T; L_2(0,1)), f_t \in L_2(Q)$ позволяет получить оценки и для семейства $\{u^{\varepsilon}(x,t)\}$, которые не зависят от ε . Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, нетрудно завершить доказательство теоремы.

Условия леммы 2 таковы, что всякое дифференцирование функций φ и ψ понижает порядок роста на единицу. Пусть теперь это не имеет места. Рассмотрим уравнение

$$Lu = u_t + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(u) = f(x,t), \tag{9}$$

где $\lambda \geq 0$ - постоянная.

Лемма 4. Пусть выполнены условия:
для всех $(\xi,\eta)\in R^2$ имеют место

$$\frac{\partial\Phi(\xi,\eta)}{\partial\eta} \geq \ell_0 > 0, \quad \left|\frac{\partial\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right| \leq \ell_1 = \ell_1' + \ell_1'', \quad \Phi_\xi(0,\eta) \equiv 0,$$

$$\Phi(\xi,\eta) = \Phi_0(\eta) + \Phi_1(\xi,\eta), \quad \Phi_0'(\eta) \geq m_0 > 0, \quad |\Phi_1(\xi,\eta)| \leq C(1+|\xi|+|\eta|),$$

$$0 < \tau_0 \leq \Psi'(\xi) \leq \tau_1, \quad \Psi(0)=0, \quad \ell_0\tau_0 > \max\left(\frac{\ell_1^2}{2}, \ell_1'^2, \ell_1''^2\right).$$

Тогда если $f(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(0,1)), f_t\in L_2(Q), u_0(x)\in C^4$, то для гладких решений задачи (9),(2),(3) справедлива оценка

$$\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dx\,d\tau + \int_0^1\left\{u_x^2 + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2\right\}dx \leq N,$$

где $t\in[0,T]$, постоянная N зависит лишь от функций $u_0(x), f(x,t)$ и постоянных из условий леммы.

Доказательство. Заметим, что для гладких решений задачи (9),(2),(3) справедлива оценка леммы I. Далее в силу условий леммы $\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x) = 0$ при $x=0$, $x=1$. Учитывая это и интегрируя по частям в равенстве

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x) - \Psi(u)\right]dx\,d\tau = \int_0^t\int_0^1 f\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x) - \Psi(u)\right]dx\,d\tau,$$

получаем

$$\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\Phi_{u_x}(u,u_x)\,dx\,d\tau + \int_0^t\int_0^1 \psi'(u)u_\tau^2\,dx\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2 dx +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)\right]^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\Psi(u)\right]^2 dx = N_0 - \int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}u_\tau\Phi_u(u,u_x)\,dx\,d\tau +$$

$$+\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\Psi(u)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\,dx + \lambda\int_0^t\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)\cdot\Psi'(u)u_\tau\,dx\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)\cdot f_\tau dxd\tau - \int_0^t\int_0^1 \psi(u)f_\tau dxd\tau - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)fdx +$$

$$+\int_0^1 \psi(u)fdx + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\Phi(u_0,u_0')f(x,0)dx - \int_0^1 \psi(u_0)f(x,0)dx,$$

где N_0 - сумма интегралов по отрезку [0,I] , стоящих слева и взятых при $t=0$, т.е. при $u=u_0$. Применяя условия леммы, неравенство Юнга и оценку леммы I, получаем

$$\ell_0\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2 dxd\tau + \tau_0\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2 dxd\tau + \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2 dx +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)\right]^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\psi(u)\right]^2 dx \leqslant \frac{\delta_0^2}{2}\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2 dxd\tau +$$

$$+\frac{\ell_1'^2}{2\delta_0^2}\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2 dxd\tau + \frac{\delta_1^2}{2}\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2 dxd\tau + \frac{\ell_1''^2}{2\delta_1^2}\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2 dxd\tau +$$

$$+\frac{\delta_2^2}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2 dx + \frac{\tau_1^2}{2\delta_2^2}\int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\lambda\delta_3^2}{2}\int_0^t\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)\right]^2 dxd\tau +$$

$$+\frac{\lambda\tau_1^2}{2\delta_3^2}\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2 dxd\tau + \frac{\delta_4^2}{2}\int_0^t\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)\right]^2 dxd\tau + \frac{\delta_5^2}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)\right]^2 dx +$$

$$+\frac{\delta_6}{2}\int_0^1 u^2 dx + N_1, \qquad (10)$$

где $\delta_i>0$, $i=0,\dots,6$, - произвольные постоянные, постоянная N_1 зависит от постоянных условий леммы 4, функций $u_0(x), f(x,t)$ и от постоянных $\delta_4,\delta_5,\delta_6$. Выберем $\delta_0=\sqrt{\ell_0}$, $\delta_1=\sqrt{\tau_0}$, $\delta_3=\sqrt{\frac{\lambda\tau_1^2}{\tau_0}}$. Так как справедливо неравенство

$$\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)\right]^2 dx \leqslant \int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2 dx,$$

то вследствие условий леммы из (10) получаем

$$\alpha_0\left\{\int_0^t\int_0^1 (u_{x\tau}^2+u_\tau^2)dxd\tau + \int_0^1\left(\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2+\lambda\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial x}\psi(u)\right]^2\right)dx\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\delta_2^2}{2}+\frac{\delta_5^2}{2}\right)\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2 dx + \frac{\tau_1^2}{2\delta_2^2}\int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\delta_6^2}{2}\int_0^1 u^2 dx +$$

$$+N_2\int_0^t\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2 dxd\tau + N_3, \qquad (11)$$

где $\alpha_0>0$.

Пусть $v(x,t)$ есть решение задачи $v_{xx}=u$, $v(0,t)=v(1,t)=0$.

Из равенства

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot v_\tau\,dx d\tau = \int_0^t\int_0^1 f v_\tau\,dx d\tau$$

следует

$$\int_0^t\int_0^1 v_{x\tau}^2\,dx d\tau + \int_0^1 u_x^2\,dx + \int_0^1 u^2 dx \le \gamma \int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dx d\tau + N(\gamma), \tag{12}$$

где $\gamma > 0$ - произвольная постоянная. Неравенство (12) позволяет из (11) получить

$$\alpha_0\left\{\int_0^t\int_0^1 (u_{x\tau}^2 + u_\tau^2)\,dx d\tau + \int_0^1\left(\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2 + \lambda\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x}\psi(u)\right]^2\right)dx\right\} \le$$

$$\le \left(\frac{\delta_2^2}{2} + \frac{\delta_5^2}{2}\right)\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2 dx + \frac{\gamma \tau_1^2}{2\delta_2^2}\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dx d\tau + \frac{\delta_6^2}{2}\gamma\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dx d\tau +$$

$$+ N_2\int_0^t\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2 dx d\tau + N_4 .$$

Выберем δ_2 и δ_5 так, чтобы выполнялось $\delta_2^2 + \delta_5^2 < 2\alpha_0$. Зафиксировав δ_2, выберем γ и δ_6 малыми так, чтобы выполнялись $2\gamma\tau_1^2 < \delta_2^2\alpha_0$, $2\delta_6^2\gamma < \alpha_0$. В результате получится неравенство

$$\alpha_1\left\{\int_0^t\int_0^1 (u_{x\tau}^2 + u_\tau^2)\,dx d\tau + \int_0^1\left(\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2 + \lambda\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x}\psi(u)\right]^2\right)dx\right\} \le$$

$$\le N_2\int_0^t\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(u,u_x)\right]^2 dx d\tau + N_5 ,$$

где $\alpha_1 > 0$. Применяя лемму Гронуолла, окончательно получаем требуемую оценку.

Л е м м а 5. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда для гладких решений задачи (9),(2),(3) справедливы оценки:

$$\max_{\bar Q}(|u| + |u_x| + |u_{xx}|) \le N_6 ,$$

$$\int_0^t\int_0^1 (u_{xxx}^2 + u_{xxxx}^2)\,dx d\tau \le N_7 ,$$

где постоянные N_6, N_7 зависят от постоянных условий леммы 4, функций $u_0(x)$ и $f(x,t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из оценки леммы 4 следует

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x)\right| \le C_1 ,$$

откуда

$$\left|\Phi_{u_x}(u,u_x)u_{xx}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u,u_x) - \Phi_u(u,u_x)u_x\right| \le C_1 + C_2|u_x| .$$

Возводя в квадрат полученное неравенство и интегрируя по отрезку (0,1), получаем

$$\int_0^1 u_{xx}^2 dx \le C_4,$$

откуда

$$|u_x| \le C_5,$$

а значит,

$$|u_{xx}| \le C_6.$$

Учитывая полученную оценку, из равенств

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot u_{xx}dxd\tau = \int_0^t\int_0^1 fu_{xx}dxd\tau$$

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot u_{xxxx}dxd\tau = \int_0^t\int_0^1 fu_{xxxx}dxd\tau$$

нетрудно получить оставшиеся оценки.

Т е о р е м а 2. Если выполнены условия леммы 4 и выполнены условия согласования, то всегда существует функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (9) почти всюду в Q и принимающая начальные и краевые условия (2), (3); при этом для функции $u(x,t)$ будут справедливы оценки лемм 1,4,5.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы, как и теоремы I, проводится методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Рассмотрим теперь уравнение

$$Lu = u_t + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{\Phi}(u) + \tilde{\Psi}(u) = f(x,t), \tag{13}$$

где $\tilde{\Phi}(0)=0$, $\lambda \geqslant 0$ - постоянная.

Л е м м а 6. Пусть выполнены условия: для всех $\xi \in R$ имеют место

$$\tilde{\Phi}'(\xi) \ge \ell_0 > 0,\quad \tilde{\Phi}''(0)=0,\quad |\tilde{\Psi}(\xi)| \le C(1+|\xi|),\quad |\tilde{\Psi}'(\xi)| \le C.$$

Тогда если $f(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(0,1))$, $f_t \in L_2(Q)$, $u_0(x) \in C^4(0,1)$, то для гладких решений задачи (13),(2),(3) справедлива оценка

$$\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2 dxd\tau + \int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{\Phi}(u)\right]^2 dxd\tau \le R,$$

где $t \in [0,T]$, постоянная R зависит лишь от функций $u_0(x), f(x,t)$ и постоянных из условий леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma(x,t)$ есть функция, введенная при доказательстве леммы 4. Из равенства

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot\sigma dxd\tau \doteq \int_0^t\int_0^1 f\sigma dxd\tau$$

следует

$$\int_0^t\int_0^1 (u^2+u_x^2)\,dx\,d\tau \le R_0. \tag{14}$$

Далее, обозначим через $w(x,t)$ функцию, являющуюся решением задачи

$$w_{xxxx}=u,$$
$$w(0,t)=w(1,t)=w_{xx}(0,t)=w_{xx}(1,t)=0.$$

Из равенства

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot w_\tau\,dx\,d\tau = \int_0^t\int_0^1 f\,w_\tau\,dx\,d\tau$$

и оценки (14) вытекает

$$\int_0^1 u^2\,dx \le R_1. \tag{15}$$

Из равенства

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde\Phi(u)\,dx\,d\tau = \int_0^t\int_0^1 f\,\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde\Phi(u)\,dx\,d\tau$$

следует

$$\int_0^t\int_0^1 \tilde\Phi'(u)u_\tau^2\,dx\,d\tau+\frac12\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde\Phi(u)\right]^2dx+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\tilde\Phi(u)\right]^2dx\le$$

$$\le R_2+\delta_1\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dx\,d\tau+M(\delta_1)\int_0^t\int_0^1\left[\tilde\Phi(u)\right]^2dx\,d\tau+\delta_2\int_0^1\left[\tilde\Phi(u)\right]^2dx+M(\delta_2)\int_0^1 u^2\,dx.$$

Подбирая δ_1,δ_2 малыми и учитывая (15), получаем

$$\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dx\,d\tau+\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde\Phi(u)\right]^2dx< R_3+\int_0^t\int_0^1\left[\tilde\Phi(u)\right]^2dx\,d\tau. \tag{16}$$

Справедливы неравенства

$$\int_0^1\left[\tilde\Phi(u)\right]^2dx\le\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\tilde\Phi(u)\right]^2dx\le\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde\Phi(u)\right]^2dx. \tag{17}$$

Следовательно, неравенство (16) мы можем продолжить, а затем применить лемму Гронуолла.

Л е м м а 7. При выполнении условий леммы 6 для гладких решений задачи (13),(2),(3) справедливы оценки

$$\max_{\bar Q}|u|+\max_{\bar Q}|u_x|+\max_{\bar Q}|u_{xx}|\le R_4,$$
$$\int_0^t\int_0^1(u_{xxx}^2+u_{xxxx}^2)\,dx\,d\tau\le R_5,$$

где $t\in[0,T]$, постоянные R_4,R_5 зависят от постоянных условий леммы 6, функций $u_0(x)$ и $f(x,t)$.

Доказательство. Оценка

$$\max_{\bar{Q}} |u| + \max_{\bar{Q}} |u_x| \leq \tilde{R}_4$$

следует из оценки леммы 6 и неравенств (I7). Из равенства

$$\int_0^t \int_0^1 Lu \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{\Phi}(u) dx d\tau = \int_0^t \int_0^1 f \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{\Phi}(u) dx d\tau$$

можно получить неравенство

$$\int_0^t \int_0^1 u_{x\tau}^2 dx d\tau + \int_0^1 \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} \tilde{\Phi}(u)\right]^2 dx d\tau \leq C,$$

откуда так же, как и при доказательстве леммы 5, можно получить оценку

$$\max_{\bar{Q}} |u_{xx}| \leq C.$$

В результате полученных выше оценок из равенств

$$\int_0^t \int_0^1 Lu \cdot u_{xx} dx d\tau = \int_0^t \int_0^1 f u_{xx} dx d\tau,$$

$$\int_0^t \int_0^1 Lu \cdot u_{xxxx} dx d\tau = \int_0^t \int_0^1 f u_{xxxx} dx d\tau$$

следуют оставшиеся оценки.

Теорема 3. Если выполнены условия леммы 6, условия согласования, то всегда существует функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (I3) почти всюду в Q и принимающая начальные и краевые условия (2),(3); при этом для функции $u(x,t)$ будут справедливы оценки лемм 6,7.

Замечание 3. При выполнении условий теорем I и 2 функция f может зависеть и от $u(x,t), u_x(x,t)$, если будут выполнены условия

$$|f(x,t,\xi,\eta)| \leq f_1(x,t) + C(|\xi| + |\eta|), \quad \left|\frac{\partial f(x,t,\xi,\eta)}{\partial t}\right| \leq f_2(x,t) + C(|\xi| + |\eta|),$$

$$\left|\frac{\partial f(x,t,\xi,\eta)}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial f(x,t,\xi,\eta)}{\partial \eta}\right| \leq C,$$

где $f_1(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(0,1))$, $f_2(x,t) \in L_2(Q)$, $C \geq 0$.

С помощью аналогичной схемы получения априорных оценок можно исследовать задачу с условиями (2),(3) и для некоторых других классов параболических уравнений, в частности для вырождающихся уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = u_t + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(u_{xx}) - \psi(u, u_x, u_{xx}) = f(x,t). \tag{I8}$$

Т е о р е м а 4. Пусть выполнены условия: $\varphi(0)=0$; при всех $\zeta\in R$ $0<k_0\leq\varphi'(\zeta)<+\infty$, причем если $|\zeta|\leq M$, то $\varphi'(\zeta)\leq k(M)<+\infty$, и при всех $(\xi,\eta,\zeta)\in R^3$ справедливы

$$|\psi(\xi,\eta,\zeta)|\leq C\left[1+|\xi|+|\eta|+|\zeta|+\left(\int_0^\xi\varphi(y)dy\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\left|\frac{\partial\psi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi}\right|+\left|\frac{\partial\psi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta}\right|\leq C,$$

$$\left|\frac{\partial\psi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta}\right|\leq C\left[1+\varphi'^{\,1/2}(\zeta)\right].$$

Тогда если $u_0(x)\in C^4(0,1)$, $f(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(0,1))$, $f_t\in L_2(Q)$ и выполнены условия согласования, то всегда существует функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (18) почти всюду в Q, принимающая начальные и краевые условия (2),(3), причем для функции $u(x,t)$ справедливы оценки лемм 1,2,3.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы проводится методом срезок, подобно тому, как это было сделано в [8]. Иными словами, теорема будет доказана, если будет доказана оценка

$$\max_{\bar Q}|u_{xx}|\leq C \tag{19}$$

для любого гладкого решения задачи (18),(2),(3). Требуемая же оценка получается так же, как и при доказательстве леммы 3.

Т е о р е м а 5. Пусть выполнены условия: $\varphi(0)=0$, $\psi=\psi(\xi,\zeta)$; при всех $\zeta\in R$ $0<\varphi'(\zeta)\leq k_1<+\infty$, причем если $|\zeta|\leq M$, то $\varphi'(\zeta)\geq k(M)>0$, $|\varphi(\zeta)|\leq M$ влечет $|\zeta|\leq M_1$.

$$|\psi(\xi,\zeta)|\leq C\left[1+|\xi|+\left(\int_0^\xi\varphi(y)dy\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\left|\frac{\partial\psi(\xi,\zeta)}{\partial\xi}\right|\leq C,\quad\left|\frac{\partial\psi(\xi,\zeta)}{\partial\zeta}\right|\leq C\varphi'(\zeta).$$

Тогда если $u_0(x)\in C^4(0,1)$, $f(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(0,1))$, $f_t\in L_2(Q)$ и выполнены условия согласования, то всегда существует функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (18) почти всюду в Q и принимающая начальные и краевые условия (2),(3), причем для функции $u(x,t)$ справедливы оценки лемм 1,2,3.

Для доказательства этой теоремы также достаточно доказать оценку (19).

Рассмотрим теперь уравнение (9).

Т е о р е м а 6. Пусть функции $\Phi(\xi,\eta)$, $\Psi(\xi)$ таковы, что выполнены условия: при $(\xi,\eta)\in R^2$

$\Phi(\xi,\eta)=\Phi_0(\eta)+\Phi_1(\xi,\eta)$, $\Phi_0'(\eta)>0$, причем если $|\eta|<M$, то $\Phi_0'(\eta)\geq\ell(M)>0$, $|\Phi_0(\eta)|\leq M$ влечет $|\eta|\leq M_1$,

$$\left|\frac{\partial\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right|^2 \le \ell_1\Phi_0'(\eta), \quad \left|\frac{\partial\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right| \le \ell_2\Phi_0'(\eta), \quad \Phi_\xi(0,\eta)=0,$$

$$0<\tau_0\le\Psi'(\xi)\le\tau_1, \quad \Psi(0)=0, \quad 1-\ell_2-\frac{\ell_1}{2\tau_0}>0.$$

Тогда если выполнены условия теоремы 2 относительно функций $u_0(x)$ и $f(x,t)$, то всегда существует функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (9) почти всюду в Q, принимающая начальные и краевые условия (2),(3), причем для функции $u(x,t)$ справедливы оценки лемм 4,5.

Для доказательства этой теоремы также применим метод срезок; оценкой, позволяющей это сделать, является оценка

$$\max_{\bar Q}|u_x|\le C,$$

которую можно получить тем же путем, что и в лемме 5.

С помощью теорем I-3 можно изучать также некоторые классы уравнений с вырождением при конечных значениях решения или его производных. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$Lu=u_t+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u_{xx})-\frac{\partial}{\partial x}\psi(u,u_x)=f(x,t). \tag{20}$$

Л е м м а 8. Пусть выполнены условия:

для всех $\xi\in R$, $\eta\in R$, $\zeta\in R$ справедливо

$$\eta\cdot\psi(\xi,\eta)\ge c_0|\xi|^\alpha|\eta|^\beta, \quad \varphi'(\zeta)\ge c_1|\zeta|^{\gamma-2},$$

$$c_2|\xi|^\alpha|\eta|^{\beta-2}\le\frac{\partial\psi(\xi,\eta)}{\partial\eta}\le c_3|\xi|^\alpha|\eta|^{\beta-2},$$

$$\left|\frac{\partial\psi(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right|\le c_4|\xi|^{\alpha-1}|\eta|^{\beta-1}, \quad \varphi(0)=\psi(0,0)=0,$$

постоянные c_0,c_2,c_3,c_4 неотрицательны, $c_1>0$, $\alpha\ge2$, $\gamma>2$, $\beta\ge2$, $\alpha+\beta\le\frac{\gamma}{2}+1$. Тогда если $f(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(0,1))$, $f_t\in L_2(Q)$, $u_0(x)\in C^4(0,1)$, то для гладких решений задачи (20),(2),(3) справедливы оценки:

$$\int_0^t\int_0^1\left(u_\tau^2+|u|^\alpha|u_x|^{\beta-2}u_{x\tau}^2+|u_{xx}|^{\gamma-2}u_{xx\tau}^2\right)dxd\tau+\int_0^1\left\{|u_{xx}|^\gamma+\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u_{xx})\right]^2\right\}dx\le M_1,$$

$$\max_{\bar Q}|u|+\max_{\bar Q}|u_x|+\max_{\bar Q}|u_{xx}|+\max_{\bar Q}|u_{xx}|^{\gamma-2}|u_{xxx}|\le M_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Первое энергетическое неравенство для уравнения (20) дает оценку

$$\int_0^1 u^2dx+\int_0^t\int_0^1\left(|u_{xx}|^\gamma+|u|^\alpha|u_x|^\beta\right)dxd\tau\le N_1.$$

Далее, интегрируя по частям в равенстве

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot u_\tau\,dx\,d\tau = \int_0^t\int_0^1 f u_\tau\,dx\,d\tau$$

и применяя условия леммы, получаем

$$\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dx\,d\tau + \int_0^1 |u_{xx}(x,t)|^\gamma dx \leq C\left[\int_0^t\int_0^1 \left(|u|^{\alpha-1}|u_x|^\beta|u_\tau| + |u|^\alpha |u_x|^{\beta-2}|u_{xx}||u_\tau|\right)dx\,d\tau + 1\right].$$

В силу неравенства Юнга, имеем

$$\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dx\,d\tau + \int_0^1 |u_{xx}(x,t)|^\gamma dx \leq \delta\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dx\,d\tau + C(\delta)\int_0^t\int_0^1 \Big(|u|^{2(\alpha-1)}|u_x|^{2\beta} +$$

$$+ |u_{xx}|^\gamma + |u|^{\frac{2\alpha\gamma}{\gamma-2}}\cdot|u_x|^{\frac{2\gamma(\beta-2)}{\gamma-2}}\Big)dx\,d\tau + C_1$$

(здесь считается, что $\gamma > 2$, т.е. уравнение (20) вырождается).

Неравенства, доказанные в [9] , позволяют продолжить оценки

$$\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dx\,d\tau + \int_0^1 |u_{xx}(x,t)|^\gamma dx \leq \delta\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dx\,d\tau + C(\delta)\left[\int_0^t\int_0^1 \Big(|u_x|^{2\alpha+2\beta-2} +\right.$$

$$+|u_x|^{\frac{2\alpha\gamma+2\gamma(\beta-2)}{\gamma-2}} + |u_{xx}|^\gamma\Big)dx\,d\tau + C_1 \leq \delta\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dx\,d\tau +$$

$$+ C(\delta)\int_0^t\int_0^1 \Big(|u_{xx}|^{2\alpha+2\beta-2} + |u_{xx}|^{\frac{2\alpha\gamma+2\gamma(\beta-2)}{\gamma-2}} + |u_{xx}|^\gamma\Big)dx\,d\tau + C_1 .$$

Условие на показатели α, β, γ означает, что справедливо неравенство

$$\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dx\,d\tau + \int_0^1 |u_{xx}(x,t)|^\gamma dx \leq \delta\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dx\,d\tau + C_2\int_0^t\int_0^1 |u_{xx}|^\gamma dx\,d\tau + C_3,$$

откуда

$$\begin{gathered}\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dx\,d\tau + \int_0^1 |u_{xx}|^\gamma dx \leq N_2,\\ \max_{\bar{Q}}|u| + \max_{\bar{Q}}|u_x| \leq N_3.\end{gathered} \tag{21}$$

Равенство

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u_{xx}) - \frac{\partial}{\partial x}\psi(u,u_x)\right)dx\,d\tau = \int_0^t\int_0^1 f\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u_{xx}) - \frac{\partial}{\partial x}\psi(u,u_x)\right)dx\,d\tau$$

позволяет получить неравенство

$$\int_0^t\int_0^1 \left(|u_{xx}|^{\gamma-2}u_{xx\tau}^2 + |u|^\alpha|u_x|^{\beta-2}u_{x\tau}^2\right)dx\,d\tau + \int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u_{xx})\right]^2 dx \leq$$

$$\leq C\left\{\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\psi(u,u_x)\right]^2 dx + \int_0^t\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u_{xx})\right]^2 dx\,d\tau + \int_0^t\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\psi(u,u_x)\right]^2 dx\,d\tau +\right.$$

$$+\int_0^t\int_0^1 |u|^{\alpha-1}|u_x|^{\beta-1}|u_\tau||u_{x\tau}|dxd\tau+1\Big\}.$$

В силу оценок (21) первое и третье слагаемые в правой части ограничены; четвертое слагаемое оценивается так:

$$\int_0^t\int_0^1 |u|^{\alpha-1}|u_x|^{\beta-1}|u_\tau||u_{x\tau}|dxd\tau=\int_0^t\int_0^1 |u|^{\frac{\alpha}{2}}|u_x|^{\frac{\beta-2}{2}}|u_{x\tau}||u|^{\frac{\alpha}{2}-1}|u_x|^{\frac{\beta}{2}}dxd\tau\le$$

$$\le\delta\int_0^t\int_0^1|u|^{\alpha}|u_x|^{\beta-2}u_{x\tau}^2dxd\tau+C(\delta)\int_0^t\int_0^1|u|^{\alpha-2}|u_x|^{\beta}u_\tau^2dxd\tau\le$$

$$\le\delta\int_0^t\int_0^1|u|^{\alpha}|u_x|^{\beta-2}u_{x\tau}^2dxd\tau+C_1(\delta).$$

Окончательно (после подбора постоянной δ и применения леммы Гронуолла) получим оценку

$$\int_0^t\int_0^1\left(|u_{xx}|^{\gamma-2}u_{xx\tau}^2+|u|^{\alpha}|u_x|^{\beta-2}u_{x\tau}^2\right)dxd\tau+\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u_{xx})\right]^2dx\le N_4,$$

откуда вытекают и остальные требуемые оценки. Лемма доказана.

Т е о р е м а 7. <u>Пусть выполнены условия леммы 8 и условия согласования. Тогда всегда существует функция $u(x,t)$, принимающая начальные и краевые условия (2),(3) и удовлетворяющая интегральному тождеству</u>

$$\int_0^T\int_0^1\left[u_t\eta-\varphi'(u_{xx})u_{xxx}\eta_x-\frac{\partial}{\partial x}\psi(u,u_x)\cdot\eta\right]dxdt=\int_0^T\int_0^1 f\eta\,dxdt$$

<u>для любой гладкой функции $\eta(x,t)$ такой, что $\eta(0,t)=\eta(1,t)=0$.</u>

Д о к а з а т е л ь с т в о . Поскольку оценки леммы 8 позволяют применить метод срезок, то рассмотрим регуляризацию уравнения (20)

$$L_\varepsilon u=u_t+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_\varepsilon(u_{xx})-\frac{\partial}{\partial x}\psi_\varepsilon(u,u_x)=f(x,t), \tag{22}$$

где $\varphi_\varepsilon(\zeta)=\varepsilon\zeta+\varphi(\zeta)$, $\psi_\varepsilon(\xi,\eta)=\varepsilon\eta+\psi(\xi,\eta)$, $\varepsilon>0$.

Задача (22),(2),(3) при $\varepsilon>0$ имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$, удовлетворяющее неравенствам лемм 1-3 (это доказывается так же, как доказываются теоремы 1 и 4). Повторяя доказательство леммы 8, нетрудно для семейства $\{u^\varepsilon\}$ получить оценки

$$\int_0^T\int_0^1\left(u_t^{\varepsilon^2}+|u_{xx}^\varepsilon|^{\gamma-2}u_{xxt}^{\varepsilon^2}\right)dxdt+\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_\varepsilon(u_{xx}^\varepsilon)\right]^2dx\le K_0, \tag{23}$$

где постоянная K_0 не зависит от ε. Отсюда, в частности, следует

$$\max_{\bar{Q}}\left|\frac{\partial}{\partial x}\varphi_\varepsilon(u_{xx}^\varepsilon)\right|\le K_1$$

или

$$\max_{\bar{Q}} |\varepsilon + \varphi'(u^{\varepsilon}_{xx}) u^{\varepsilon}_{xxx}| \le K_1,$$

откуда

$$\max_{\bar{Q}} \left| |u^{\varepsilon}_{xx}|^{\gamma-2} u^{\varepsilon}_{xxx} \right| \le K_1, \quad \max_{\bar{Q}} |u^{\varepsilon}_{xx}| \le K_2. \tag{24}$$

Кроме того, из равенства

$$\int_0^T \int_0^1 L u^{\varepsilon} \cdot u^{\varepsilon}_{xx} dx dt = \int_0^T \int_0^1 f u^{\varepsilon}_{xx} dx d\tau$$

вытекает

$$\varepsilon \int_0^T \int_0^1 u^{\varepsilon^2}_{xxx} dx dt \le K_3. \tag{25}$$

Оценки (23) и (24) означают, что семейство $\{|u^{\varepsilon}_{xx}|^{\gamma-2} u^{\varepsilon}_{xx}\}$ принадлежит ограниченному множеству в $W_2^1(Q)$, а это дает существование функции $u(x,t)$ такой, что для некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon_m\}$

$$u^{\varepsilon_m}_t \longrightarrow u_t \qquad \text{слабо в } L_2(Q),$$

$$u^{\varepsilon_m}_{xx} \longrightarrow u_{xx} \qquad \text{почти всюду в } Q,$$

$$|u^{\varepsilon_m}_{xx}|^{\gamma-2} u^{\varepsilon_m}_{xx} \longrightarrow |u_{xx}|^{\gamma-2} u_{xx} \qquad \text{почти всюду в } Q,$$

$$|u^{\varepsilon_m}_{xx}|^{\gamma-2} u^{\varepsilon_m}_{xxx} \longrightarrow |u_{xx}|^{\gamma-2} u_{xxx} \qquad \text{слабо в } L_2(Q).$$

Кроме того, из оценки (25) вытекает, что

$$\sqrt{\varepsilon_m}\, u^{\varepsilon_m}_{xxx} \longrightarrow 0 \qquad \text{слабо в } L_2(Q).$$

В силу указанных сходимостей, в частности, имеем

$$\int_0^T \int_0^1 \varphi'(u^{\varepsilon_m}_{xx}) u^{\varepsilon_m}_{xxx} \eta_x dx dt = -\int_0^T \int_0^1 \varphi(u^{\varepsilon_m}_{xx}) \eta_{xx} dx dt \longrightarrow$$

$$\longrightarrow -\int_0^T \int_0^1 \varphi(u_{xx}) \eta_{xx} dx dt = \int_0^T \int_0^1 \varphi'(u_{xx}) u_{xxx} \eta_x dx dt,$$

откуда следует, что для функции $u(x,t)$ справедливо требуемое интегральное тождество. Теорема доказана.

Хотя теоремы существования, полученные выше, относятся к случаю задачи с краевыми условиями вида (3), тем не менее ряд оценок (т.е. ряд лемм) справедлив и для решений задачи с краевыми условиями (4), но в этом случае удается получить лишь весовые оценки их решений, а из последних и теоремы существования обобщенных решений. Проиллюстрируем сказанное примером. Рассмотрим уравнение

$$Lu = u_t + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(u_{xx}) - \psi(u, u_x, u_{xx}) = f(x,t).$$

Л е м м а 9. Если выполнены все условия леммы 2 на функции φ, ψ, f, u_0, то для гладких решений задачи (I),(2),(4) справедливы оценки

$$\max_{\bar{Q}}|u| + \max_{\bar{Q}}|u_x| + \max_{\bar{Q}}\sqrt{\eta(x)}\,|u_{xx}| \le M,$$

$$\int_0^1 \eta(x)u_{xxx}^2\,dx \le M,$$

где постоянная M зависит лишь от постоянных, определенных в условиях лемм I и 2, функций $u_0(x), f(x,t)$; функция $\eta(x)$ - гладкая и такая, что $\eta(x) > 0$ при $0 < x < 1$, $\eta(0)=\eta(1)=0$, $|\eta'(x)| \le C\sqrt{\eta(x)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы следует из равенства

$$\int_0^t\int_0^1 Lu\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(u_{xx})\cdot\eta(x)\,dx\,d\tau = \int_0^t\int_0^1 f\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(u_{xx})\cdot\eta(x)\,dx\,d\tau.$$

Т е о р е м а 8. Если выполнены условия лемм I,2 и относительно функций $u_0(x), f(x,t)$ выполнены условия согласования, то всегда существует функция $u(x,t)$, удовлетворяющая краевым условиям (2),(4) и интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^1\left[u_t v - \varphi'(u_{xx})u_{xxx}v_x - \psi(u,u_x,u_{xx})v\right]dx\,dt = \int_0^T\int_0^1 f v\,dx\,dt$$

для любой функции $v(x,t)$, удовлетворяющей условиям (4).

Аналогичным образом исследуются и уравнения типа (9),(I3).

Л и т е р а т у р а

I. Л и о н с Ж . - Л . Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.- М.: Мир, I972.-587 с.

2. Д у б и н с к и й Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения.- В кн.: Серия "Современные проблемы математики". М., I976, т.9, с.5-I30.

3. Б е л о н о с о в В. С., З е л е н я к Т . И . Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений, Новосибирск, изд-во НГУ, I975.- I55 с.

4. Б е л о н о с о в В. С. Оценки решений параболических систем в ве-

совых классах Гёльдера и некоторые их приложения.- Математический сборник, 1979, т. 110, № 2, с. 163-188.

5. Кружков С.Н. Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными.- Труды семинара им. И.Г. Петровского, М., изд-во МГУ, вып. 5, 1979, с. 217-272.

6. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.- М.: Наука, 1973.- 576 с.

7. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа.- Новосибирск, Наука, 1983.- 269 с.

8. Кожанов А.И., Ларькин Н.А., Яненко Н.Н. Смешанная задача для некоторых классов уравнений третьего порядка.- Новосибирск, Б.и., 1980.- 36 с.- (Препринт/ Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР; № 5.)

9. Дубинский Ю.А. Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений.- Мат. сб., 1964, т.64, № 3, с.458-480.