УДК 517.946

ОДНА ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

М.Д. Рамазанов (Уфа)

В области $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$, $\Omega' = \left\{(x_1, x_2)/x_1 \in (r_1, r_2),\ x_2 \in \left(\frac{\theta}{2} - \pi,\ \frac{\theta}{2} + \pi\right)\right\}$,

$$\Omega'' = \left\{(x_1, x_2)/x_1 \in [r_2, r_3),\ x_2 \in (0, \theta)\right\},$$

повторенной по переменной x_2 периодически с периодом 2π, для эллиптического уравнения

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u - \frac{\partial}{\partial x_2}u = f \qquad (1)$$

решается задача Дирихле $u/_{\partial\Omega} = \varphi$. Решение предполагается периодическим по x_2 с периодом 2π, так что естественнее представлять (x_1, x_2) полярными координатами на плоскости. Пусть $f(x,\varepsilon) = \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k f_k(x)$,

$\varphi(x,\varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \varphi_k(x)$,

$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_5$

(см. рис. 1), $\varphi^{(j)} = \varphi/_{\Gamma_j}$.

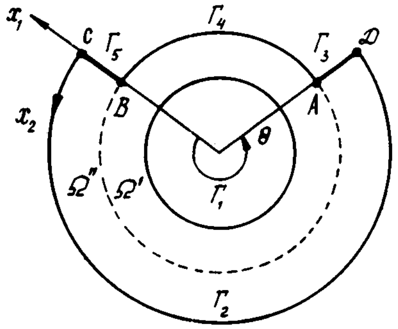

Рис. 1

Требуется получить асимптотическое разложение решения по степеням малого параметра ε, равномерное во всей области Ω. Отдельно для Ω' и Ω'' задача была решена в [1,2]. Сейчас наше внимание сосредоточено на поведении решения в окрестности общей границы областей Ω', Ω'' и сингулярностях решения в окрестностях точек $A(r_2, \theta)$ и $B(r_2, 0)$. Благодаря принципу максимума достаточно построить равномерно асимптотическое решение - равномерно асимптотические ряды по степеням ε, решающие поставленную задачу с невязками в уравнении и граничных условиях, убывающими быстрее любой степени ε. В § 1 описываются те этапы построения асимптотического решения, которые являются простыми следствиями известных работ. Формулируется содержащая основные трудности данной проблемы задача о сращивании разложений вдоль линии $x_1 = \tau_2$, и дается схема ее решения. В § 2 строится асимптотическое решение этой задачи.

Специальный вид уравнения и области может быть обобщен на операторы

$$\varepsilon \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + a_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2} + a(x)$$

с обычным условием эллиптичности

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall \xi \in R^2, \ \forall x \in \bar{\Omega} \quad \text{имеет место} \quad \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma (\xi_1^2 + \xi_2^2)$$

и области Ω такие, что векторное поле $(a_1(x), a_2(x))$ не вырождается в $\bar{\Omega}$, а его характеристики или замкнуты, или пересекают границу $\partial\Omega$ под ненулевым углом. Все данные задачи предполагаются бесконечно дифференцируемыми по своим аргументам, все возникающие ряды - асимптотическими и почленно дифференцируемыми; δ - всегда будет некоторой положительной постоянной, различной в разных местах текста, τ_+ будет функцией, равной τ при $\tau > 0$ и нулю при $\tau < 0$. Удобно будет обозначить

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad \text{и} \quad \mathcal{M} \equiv \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - \frac{\partial}{\partial y_2} .$$

§ I. Схема построения асимптотического решения

В Ω' задача решается отдельно для

$$f^0(x_1, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx_2 f(x, \varepsilon) \quad \text{и} \quad f'(x, \varepsilon) = f(x, \varepsilon) - f^0(x_1, \varepsilon).$$

Для f^0 решение ищем в виде функции, не зависящей от x_2 . Это дает

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u^0(x_1, \varepsilon) = f^0(x_1, \varepsilon) \quad , \text{где}$$

$$u^0(x_1, \varepsilon) = \tilde{u}^0(x_1, \varepsilon) + c(\varepsilon) \cdot (x_1 - \tau_1),$$

$$\tilde{u}^0(x_1, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau_1}^{x_1} d\eta f^0(\eta, \varepsilon) \cdot (x_1 - \eta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx_2 \varphi^{(1)}(x_2, \varepsilon),$$

а $c(\varepsilon)$ - произвольная пока постоянная по x_1' , x_2 . Здесь мы удовлетворили также граничному условию

$$u^0(x_1, \varepsilon)|_{\Gamma_1} = \varphi^{(1)0}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx_2 \varphi^{(1)}(x_2, \varepsilon).$$

Для $f'(x,\varepsilon) = \sum\limits_{\kappa\geq 1} \varepsilon^\kappa f'_\kappa(x)$ однозначно определяется решение, имеющее нулевое среднее по x_2,

$$u'(x,\varepsilon) = \sum_{\kappa\geq 1} \varepsilon^\kappa u'_\kappa(x).$$

Функции $u'_n(x)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} u'_\kappa = \Delta u'_{\kappa-1} - f'_\kappa \, (u'_0 \equiv 0), \quad x_1 \in (\tau_1, \tau_2), \quad x_2 \in R,$$

$$u'_\kappa(x_1, x_2 + 2\pi) = u'_\kappa(x_1, x_2), \quad \int\limits_0^{2\pi} dx_2 u'_\kappa(x) = 0.$$

Если $u'_\kappa(x) = \sum\limits_{\ell\neq 0} u'_{\kappa\ell} e^{i\ell x_2}$, $\Delta u'_{\kappa-1}(x) - f'_\kappa(x) \equiv h_\kappa(x) = \sum\limits_{\ell\neq 0} h_{\kappa\ell}(x_1) e^{i\ell x_2}$,

то $u'_{\kappa\ell}(x_1) = h_{\kappa\ell}(x_1)/_{i\ell}$, $\forall \kappa \geq 0$, $\forall \ell \neq 0$.

В итоге в $\Omega' \, u(x,\varepsilon) = u^0(x_1,\varepsilon) + u'(x,\varepsilon)$.

В Ω'' решение задачи ищем в виде ряда

$$u''(x,\varepsilon) = \sum_{\kappa\geq 0} \varepsilon^\kappa u''_\kappa(x),$$

получая для определения u''_κ условия

$$\frac{\partial}{\partial x_2} u''_\kappa = \Delta u''_{\kappa-1} - f_\kappa, \; (u''_{-1} = f_0 = 0), \quad x_1 \in (\tau_2, \tau_3), \quad x_2 \in [0, \theta],$$

$$u''_\kappa(x_1, 0) = \varphi^{(5)}_\kappa(x_1).$$

Это дает $u''_0(x) = \varphi^{(5)}_0(x_1)$, и при $\kappa \geq 1$ имеет место

$$u''_\kappa(x) = \varphi^{(5)}_\kappa(x_1) + \int\limits_0^{x_2} d\eta \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u''_{\kappa-1}(x_1,\eta) - f_\kappa(x,\eta)\right] + \frac{\partial}{\partial x_2} u''_{\kappa-1}(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} u''_{\kappa-1}(x_1, 0).$$

Итак, граничные условия удовлетворяются пока только на участке $\Gamma_5 = \{(x_1,x_2)/x_1 \in (\tau_2,\tau_3), \; x_2 = 0\}$ и, кроме того, в предлагаемой формуле решения имеется разрыв на линии $x_1 = \tau_2$.

В окрестности границы $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2)/x_1 = \tau_1, \; x_2 \in (0, 2\pi]\}$ построим пограничный слой-функцию

$$u^{(1)}\left(\frac{x_1 - \tau_1}{\sqrt{\varepsilon}}, x_2, \varepsilon\right) = \sum_{\kappa\geq 0} \varepsilon^{\kappa/2} u^{(1)}_\kappa\left(\frac{x_1-\tau_1}{\sqrt{\varepsilon}}, x_2\right).$$

Замена $\dfrac{x_1 - \tau_1}{\sqrt{\varepsilon}} = \xi$ приводит уравнение (I) (с $f = 0$) к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}u_\kappa^{(1)}(\xi,x_2)=0.$$

Для определения $u_\kappa^{(1)}$ получаются задачи

$$\mathcal{L}u_\kappa^{(1)}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)u_\kappa^{(1)}=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u_{\kappa-2}^{(1)}\left(u_{-1}^{(1)}=u_{-2}^{(1)}=0\right),\ \xi>0,\ x_2\in R,$$

$u_\kappa^{(1)}(\xi,x_2+2\pi)=u_\kappa^{(1)}(\xi,x_2)$, $u_\kappa^{(1)}(0,x_2)=0$, если κ нечетное, и

$u_\kappa^{(1)}(0,x_2)=\varphi_{\kappa/2}^{(1)}(x_2)-\varphi_{\kappa/2}^{(1)}(0)$, если κ четное, $u_\kappa^{(1)}(\xi,x_2)=O(e^{-\delta\xi})$

при $\xi\to+\infty$.

При нечетных κ все $u_\kappa^{(1)}=0$. При четных κ задачи однозначно решаются и для решений выполняются оценки

$$\forall\kappa\ \exists C_\kappa\ |u_\kappa^{(1)}(\xi,x_2)|\leq C_\kappa e^{-\xi/2}.$$

Таким образом, ряд функций $u^{(1)}(\xi,x_2,\varepsilon)$ равномерно асимптотический.

В окрестности границы $\Gamma_2=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1=\tau_3,x_2\in(0;\theta)\}$ пограничный слой зададим функцией

$$u^{(2)}\left(\frac{x_1-\tau_3}{\sqrt{\varepsilon}},x_2,\varepsilon\right)=\sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}u_\kappa^{(2)}\left(\frac{x_1-\tau_3}{\sqrt{\varepsilon}},x_2\right),$$

приходя к следующим условиям для определения функций $u_\kappa^{(2)}(\xi,x_2)$, $\xi=\dfrac{x_1-\tau_3}{\sqrt{\varepsilon}}$:

$$\mathcal{L}u_\kappa^{(2)}=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u_{\kappa-2}^{(2)}\ \ (u_{-1}^{(2)}=u_{-2}^{(2)}=0),\ \xi>0,\ x_1\in(0,\theta];$$

$u_\kappa^{(2)}(0,x_2)=0$, если κ нечетное, и

$u_\kappa^{(2)}(0,x_2)=\varphi_{\kappa/2}^{(2)}-u''_{\kappa/2}(\tau_3,x_2)$, если κ четное, (2)

$u_\kappa^{(2)}(\xi,0)=0$, $u_\kappa^{(2)}(\xi,x_2)=O(e^{\delta\xi})$ при $\xi\to-\infty$.

При нечетных κ все $u_\kappa^{(2)}=0$. При четных κ задача однозначно решается в классе ограниченных функций, если правая часть уравнения является гладкой функцией в замыкании области определения. Однако все $u_\kappa^{(2)}$ будут бесконечно дифференцируемыми функциями при $\xi\leq 0$, $x_2\in[0;\theta]$ тогда и только тогда, когда в точке $C(\xi=0,x_2=0)$ будут выполнены условия согласования всех порядков производных функций $u_\kappa^{(2)}(\xi,0)$, $u_\kappa^{(2)}(0,x_2)$:

$$\forall\ell\geq 0\ \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^\ell\left[\varphi_{\kappa/2}^{(2)}(x_2)-u''_{\kappa/2}(\tau_3,x_2)\right]\Big|_{x_2=0}=$$

$$= \sum_{j=0}^{e-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial \xi^2}\right)^{e-1-j} u_{k-2}^{(2)}(\xi, x_2)\Big|_{\substack{\xi=0\\ x_2=0}} .$$

При соблюдении этих условий решения задач (2) удовлетворяют оценкам

$$\forall k \geq 0 \quad \exists C_k \quad |u_k^{(2)}(\xi, x_2)| \leq C_k e^{\xi},$$

а ряд функций $u^{(2)}(\xi, x_2, \varepsilon)$ становится равномерно асимптотическим. Заметим, что условия согласования рекуррентно разрешаются, принимая более простую форму

$$\forall \ell \geq 0 \ \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\ell} \left[\varphi_{k/2}^{(2)}(x_2) - u_{k/2}''(z_3, x_2)\right]\Big|_{x_2=0} = 0. \tag{3}$$

Освободимся от условия (3). В окрестности точки $C(x_1 = z_3, x_2 = 0)$ решение основной задачи (I) будем искать в виде суммы

$$u''(x, \varepsilon) + u^c\left(\frac{x_1 - z_3}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \varepsilon\right),$$

в окрестности Γ_2 ее решение будем искать в виде:

$$u^{(2)}(\xi, x_2, \varepsilon) = u^{c2}(\xi, x_2, \varepsilon) + \begin{cases} u^c(y, \varepsilon) \text{ при } & y_1 = \frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}}, \ y_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}; \\ y_2 \leq \varepsilon^{\gamma - 1}, & 0 < \gamma < 1; \\ u^{c1}(\xi, x_2, \varepsilon) \text{ при } & x_2 \geq \varepsilon^{1-\nu}, \ \nu + \gamma < 1. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда для функции

$$u^{c2}(\xi, x_2, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2} u_k^{c2}(\xi, x_2)$$

получаем задачу (2) с выполненным условием (3), решенную нами выше.

В окрестности границы $\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in (z_2, z_3), x_2 = \theta\}$ построим пограничный слой-функцию

$$u^{(3)}\left(x_1, \frac{x_2 - \theta}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k u_k^{(3)}(x_1, y_2, \varepsilon), y_2 = \frac{x_2 - \theta}{\varepsilon}.$$

Для функций $u_k^{(3)}$ получаем задачи

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial y_2}\right) u_k^{(3)} = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_{k-2}^{(3)} \left(u_{-1}^{(3)} = u_{-2}^{(3)} = 0\right), x_1 \in [z_2, z_3], y_2 \leq 0,$$

$$u_k^{(3)}(x_1, 0) = \varphi_k^{(3)}(x_1) - u_k''(x_1, \theta), \ u_k^{(3)} = 0 \ (e^{\delta y_2}) \text{ при } y_2 \to -0.$$

Имеем

$$u_k^{(3)}(x_1,y_2)=e^{y_2}\left[\varphi_k^{(3)}(x_1)-u_k''(x_1,\theta)\right]-\int_{-\infty}^{0}dy\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_{k-2}^{(3)}(x_1,y)\begin{cases}e^{y_2}-1 & \text{при } y<y_2,\\ \\ e^{y_2}(1-e^{-y}) & \text{при } y>y_2.\end{cases} \tag{5}$$

По индукции легко показывается убывание $u_k^{(3)}$ при $y_2\to-\infty$ порядка $O(e^{y_2/2})$. Ряд, представляющий $u^{(3)}$, всюду равномерно асимптотический, в частности, он остается таким и после переразложений в переменных $\xi=\frac{x_1-\tau_2}{\sqrt{\varepsilon}}$, y_2 в области $0\le\xi\le\varepsilon^{\delta-\frac{1}{2}}$ и в переменных $y_1=\frac{x_1-\tau_2}{\varepsilon}$, y_2 в области $0\le y_1\le\varepsilon^{\delta-1}$.

Следует отметить, что функция $u^{(3)}$ нарушает выполнение граничного условия на Γ_2 в окрестности точки $\mathcal{D}(x_1=\tau_3,\ x_2=\theta)$. А именно возникает невязка

$$u^{(3)}(\tau_3,y_2,\varepsilon)\le\sum_{k\ge0}\varepsilon^k u_k^{(3)}(\tau_3,y_2)$$

с $u_k^{(3)}(\tau_3,y_2)=O(e^{y_2/2})$ при $y_2\to-\infty$. Для погашения этой невязки в окрестности точки $\mathcal{D}$ построим эллиптический пограничный слой-функцию

$$u^{\mathcal{D}}\left(\frac{x_1-\tau_3}{\varepsilon},\ \frac{x_2-\theta}{\varepsilon},\ \varepsilon\right)=\sum_{k\ge0}\varepsilon^k u_k^{\mathcal{D}}(y_1,y_2),\ y_1=\frac{x_1-x_3}{\varepsilon},\ y_2=\frac{x_2-\theta}{\varepsilon}.$$

Функции $u_k^{\mathcal{D}}$ являются решениями задач

$$\mathcal{M}u_k^{\mathcal{D}}=0,\ y_1<0,\ y_2<0,\ u_k^{\mathcal{D}}(0,y_2)=O(e^{y_2/2}),\ y_2\to-\infty,\ u_k^{\mathcal{D}}(y_1,0)=0.$$

Легко показывается однозначная разрешимость этих задач в классе убывающих на бесконечности функций, причем оказывается, что $u_k^{\mathcal{D}}(y)=O(e^{\delta(y_1+y_2)})$. В частности, ряд функции $u^{\mathcal{D}}$ является равномерно по y асимптотическим.

Для построения полного асимптотического решения основной задачи нам остается удовлетворить граничному условию на

$$\Gamma_4=\left\{(x_1,x_2)/x_1=\tau_2,\ x_2\in\left(\frac{\theta}{2}-\pi,0\right)\cup\left(\theta,\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right\}$$

и согласовать разложения в окрестности линии

$$\Gamma_0=\left\{(x_1,x_2)/x_1=\tau_2,\ x_2\in[0,\theta]\right\}.$$

В окрестности линии $\Gamma_0\cup\Gamma_4$ перейдем к координатам $\xi=\frac{x_1-\tau_2}{\sqrt{\varepsilon}}$, $x_2=t$, и для функции $V(\xi,t,\varepsilon) \equiv u(\tau_2+\xi\sqrt{\varepsilon};\, t,\varepsilon)$ в области $\tilde{R}=R^2\setminus\{(\xi,t)/\xi\geq 0, t-2\pi e\in[0,2\pi], e=0,\pm1,\pm2,\dots\}$ получим следующую задачу:

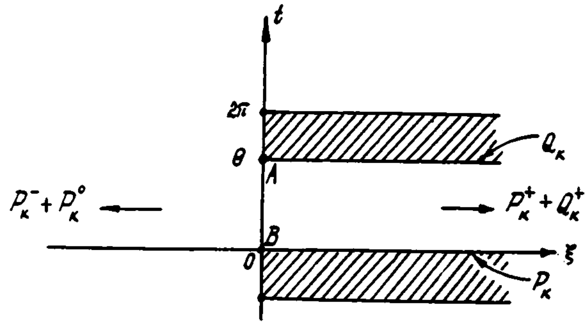

Рис. 2

$$\left(\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)V(\xi,t,\varepsilon)=\sum_{\kappa\geq 1}\varepsilon^{\frac{\kappa}{2}}F_\kappa(\xi,t)=\sum_{\kappa\geq 1}\varepsilon^{\frac{\kappa}{2}}\sum_{\ell=0}^{[\kappa/2]}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\kappa-2\ell}f_\kappa(\tau_2,t)\xi^{\kappa-2\ell}/(\kappa-2\ell)!; \tag{6.1}$$

$$V(\xi,t+2\pi,\varepsilon)=V(\xi,t,\varepsilon); \tag{6.2}$$

при $t\in(\theta,2\pi]$

$$V(0,t,\varepsilon)=\sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^\kappa\varphi_\kappa^{(4)}(t); \tag{6.3}$$

при $\xi\geq 0$
$$V(\xi,0,\varepsilon)=\sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}P_\kappa(\xi),\quad P_\kappa(\xi)=\sum_{\ell=0}^{[\kappa/2]}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\kappa-2\ell}\varphi_\ell^{(5)}(\tau_2)\xi^{\kappa-2\ell}/(\kappa-2\ell)!; \tag{6.4}$$

$$V(\xi,\theta,\varepsilon)=\sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}Q_\kappa(\xi),\quad Q_\kappa(\xi)=\sum_{\ell=0}^{[\kappa/2]}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\kappa-2\ell}\varphi_\ell(\tau_2)\xi^{\kappa-2\ell}/(\kappa-2\ell)!; \tag{6.5}$$

при $\xi\to+\infty$ выполняется

$$V(\xi,t,\varepsilon)-\sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}\left[P_\kappa^+(\xi,t)+Q_\kappa^+\left(\xi,\frac{t-\theta}{\varepsilon}\right)\right]=O(e^{-\delta\xi}), \tag{6.6}$$

где
$$P_\kappa^+(\xi,t)=\sum_{\ell=0}^{[\kappa/2]}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\kappa-2\ell}u_\ell''(\tau_2,t)\xi^{\kappa-2\ell}/(\kappa-2\ell)!;$$

$$Q_\kappa^+(\xi,y_2)=\sum_{\ell=0}^{[\kappa/2]}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\kappa-2\ell}u_\ell^{(s)}(\tau_2,y_2)\xi^{\kappa-2\ell}/(\kappa-2\ell)!; \tag{6.7}$$

при $\xi\to-\infty$ имеет место

$$V(\xi,t,\varepsilon)-\sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}\left[P_\kappa^-(\xi,t)+\tilde{P}_\kappa(\xi)+c_{\kappa-1}\xi+c_\kappa(\tau_2-\tau_1)\right]=O(e^{\delta\xi}),$$

где

$$P_\kappa^-(\xi,t)=\sum_{\ell=0}^{[\kappa/2]}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\kappa-2\ell}u_\ell'(\tau_2,t)\xi^{\kappa-2\ell}/(\kappa-2\ell)!;$$

$$\tilde{P}^{o}_{\kappa}(\xi) = \sum_{\ell=-1}^{[\kappa/2]} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\kappa-2\ell} \tilde{u}^{o}_{\ell}(z_2)\xi^{\kappa-2\ell}/(\kappa-2\ell)! \;;$$

$$c_{-1} = 0, \quad \sum_{\kappa\geq 0} \varepsilon^{\kappa/2} c_{\kappa} \equiv c(\varepsilon).$$

Задачу (6.I)-(6.7) сведем к более простому варианту введением новой неизвестной функции

$$V'(\xi,t,\varepsilon) = V(\xi,t,\varepsilon) - \zeta(\xi)\sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}\left[P^{+}_{\kappa}(\xi,t) + Q^{+}_{\kappa}\left(\xi,\frac{t-\theta}{\varepsilon}\right)\right] -$$

$$- \left[1-\zeta(\xi)\right]\sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}\left[P^{-}_{\kappa}(\xi,t) + \tilde{P}^{o}_{\kappa}(\xi) + c_{\kappa-1}\xi\right],$$

где

$$\zeta \in C^{\infty}(R), \; \zeta(\xi)=0 \text{ при } \xi\leq 1 \quad \text{и } \zeta(\xi)=1 \text{ при } \xi\geq 2. \tag{7}$$

Мы получаем

$$\left(\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)V'(\xi,t,\varepsilon) = \sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2} g_{\kappa}(\xi,t). \tag{8.I}$$

Здесь $g_{\kappa}\in C^{\infty}$, g_{κ} финитны по ξ, $\operatorname{supp}_{\xi} g_{\kappa} \subset [1,2]$;

$$V'(\xi,t+2\pi,\varepsilon) = V'(\xi,t,\varepsilon); \tag{8.2}$$

при $t\in(\theta,2\pi]$ $\qquad V'(0,t,\varepsilon) = \sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}\varphi'_{\kappa}(t);$ (8.3)

$$\varphi'_{2m}(t) = \varphi^{(4)}_{m}(t) - P^{-}_{m}(0,t), \quad \varphi_{2m+1}(t) = 0;$$

при $\xi>0$

$$V'(\xi,0,\varepsilon) = \sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}\psi'(\xi) \equiv \sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}\left[1-\zeta(\xi)\right]\left[P_{\kappa}(\xi) - P'_{\kappa}(\xi,0) - \tilde{P}^{o}_{\kappa}(\xi) - c_{\kappa-1}\xi\right], \tag{8.4}$$

$$V'(\xi,\theta,\varepsilon) = \sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}\psi''_{\kappa}(\xi) \equiv \sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}\left[1-\zeta(\xi)\right]\left[Q_{\kappa}(\xi) - P^{-}_{\kappa}(\xi,\theta) - \tilde{P}^{o}_{\kappa}(\xi) - c_{\kappa-1}\xi\right]; \tag{8.5}$$

при $\xi\to+\infty$ $\qquad V'(\xi,t,\varepsilon) = o(e^{\delta\xi});$ (8.6)

при $\xi\to-\infty$ $\qquad V'(\xi,t,\varepsilon) - \sum_{\kappa\geq 0}\varepsilon^{\kappa/2}c_{\kappa}(z_2-z_1) = O(e-\delta\xi).$ (8.7)

Функцию, удовлетворяющую условиям (8.I)-(8.4),(8.6),(8.7), ищем отдельно в виде ряда

где функции $U_\kappa(\xi,t)$ должны быть решениями таких задач

$$\mathcal{L} U_\kappa = \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_{\kappa-2} - g_\kappa \qquad (U_{-2} = U_{-1} = 0), \quad (\xi,t) \in \tilde{R};$$

$$U_\kappa(\xi,t+2\pi) = U_\kappa(\xi,t), \; U_\kappa(\xi,0) = \psi'_\kappa(\xi)\,(\xi>0), \; U_\kappa(0,t) = \varphi'_\kappa(t); \qquad (9)$$

$$(t \in (\theta, 2\pi]);$$

$$U_\kappa(\xi,t) = O(e^{-\delta\xi}) \text{ при } \xi \to +\infty, \qquad U_\kappa(\xi,t) - C_\kappa(\tau_2 - \tau_1) = O(e^{\delta\xi}) \text{ при } \xi \to -\infty.$$

Далее будем считать все $\varphi'_\kappa(t) \equiv 0$. Это не ограничивает общности рассмотрения: ненулевое φ'_κ можно было бы снять, решив предварительную периодическую задачу для уравнения (9) при $\xi < 0$ с экспоненциально убывающими при $\xi \to -\infty$ решениями, а затем, гладко продолжив эти решения на значения $\xi > 0$, срезать их домножением на функцию $[1 - \chi(\xi)]$.

Мы получили периодические параболические задачи (9) для вычисления пограничного слоя в окрестности Γ_0 , Γ_1 . Решения выписанной рекуррентной цепочки необходимо будут иметь особенности в точках $A\,(0,\theta)$, $B\,(0,0)$, так как мы не заботимся о непрерывности производных от решений в этих точках, и входящие в правые части уравнений члены $\frac{\partial^2}{\partial t^2} U_{\kappa-2}$ будут приобретать особенности нарастающих по κ порядков. Неединственность решения этих задач приводит нас к необходимости подробнее рассмотреть свойства нужных нам U_κ в окрестностях точек A , B . Будем искать U_κ в классе функций бесконечно дифференцируемых в $\bar{\bar{R}} \setminus (A \cup B)$, имеющих в окрестности точек A и B асимптотические разложения вида:

$$\tau^{-[\frac{\kappa}{2}]} \sum_{j\ge 0} \tau_+^{j/2} \Phi_{\kappa j}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right) + \sum_{\alpha,\beta\ge 0} U_{\kappa\alpha\beta}\, \xi^\alpha \tau^\beta . \qquad (10)$$

Здесь начало координат помещено в соответствующую точку A или B , τ равно либо $t-\theta$, либо t , $U_{\kappa\alpha\beta}$ - некоторые постоянные, $\Phi_{\kappa j}(\sigma) = O(e^{\delta\sigma})$ при $\sigma \to -\infty$. Для точки A имеем $\Phi_{\kappa j} \in C^\infty$ $(\sigma \le 0)$, для точки B имеем $\Phi_{\kappa j} \in C^\infty(R)$, $\Phi_{\kappa j}(\sigma) = O(e^{-\delta\sigma})$ $(j - 2[\kappa/2] < 0)$ при $\sigma \to +\infty$, $\Phi_{\kappa j}(\sigma) = O(\sigma^{j-2[\kappa/2]})$ при $\sigma \to +\infty$, $j - 2[\kappa/2] \ge 0$.

Для выполнения всех условий (8.1)-(8.7) надо удовлетворить и граничному условию (8.5). Поэтому полное решение ищем в виде

$$V'(\xi,t,\varepsilon)=v(\xi,t,\varepsilon)+w\left(\xi,\frac{t-\theta}{\varepsilon},\varepsilon\right)+z^A\left(\frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}},\frac{t-\theta}{\varepsilon},\varepsilon\right)+z^B\left(\frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}},\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon\right), \quad (10)$$

считая t изменяющимся на одном периоде, $t\in\left(\frac{\theta}{2}-\pi,\frac{\theta}{2}+\pi\right)$. Здесь w будет пограничным слоем вблизи границы $\Gamma_3\cap\tilde{R}$, z^A, z^B - эллиптические пограничные слои в окрестностях точек A и B. В формуле (10) разные слагаемые имеют разные области определения. Это будут

$$\mathcal{D}_{z^A}=\omega^A(\nu_1,\nu_2)\equiv\{(\xi,t,\varepsilon)\,|\,|\xi|<\varepsilon^{\nu_1},\ |t-\theta|<\varepsilon^{\nu_2}\},$$

$$\mathcal{D}_{z^B}=\omega^B(\nu_1,\nu_2)\equiv\{(\xi,t,\varepsilon)\,|\,|\xi|<\varepsilon^{\nu_1},\ |t|<\varepsilon^{\nu_2}\},$$

$$\mathcal{D}_w=\{(\xi,t,\varepsilon)\,|\,\varepsilon^{\nu_3}<\xi,\ \ 0<\theta-t<\varepsilon^{\nu_2}\},$$

$\mathcal{D}_v$ - периодически повторенное по t множество

$$(\bar{\bar{R}}\cap\{(\xi,t,\varepsilon)\,|\,\tfrac{\theta}{2}-\pi<t\leqslant\tfrac{\theta}{2}+\pi\})\setminus[\omega^A(\nu_3,\nu_4)\cup\omega^B(\nu_3,\nu_4)],$$

где $0<\nu_1<\nu_3<\frac{1}{2}$, $0<\nu_2<\nu_4<1$.

В общей части областей $\mathcal{D}_{z^A}$ и $\mathcal{D}_v$ (или $\mathcal{D}_{z^B}$ и $\mathcal{D}_v$) должны будут совпадать асимптотические разложения z^A и $v+w$ (или z^B и v), и в формуле (10) следует оставить только одно из них.

Функция w должна снимать граничные условия с Γ_3 при $\xi>\varepsilon^{\nu_3}$. Мы ищем ее в виде

$$w\left(\xi,\frac{t-\theta}{\varepsilon},\varepsilon\right)=\sum_{k\geqslant0}\varepsilon^{\frac{k}{2}}w_k(\xi,y_2),\quad y_2=\frac{t-\theta}{\varepsilon}.$$

Тогда w_k должны удовлетворять условиям:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}-\frac{\partial}{\partial y_2}\right)w_k=-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}w_{k-2}\,(w_{-2}=w_{-1}=0),\ \xi>0,\ y_2\leqslant0,$$

$$w_k\in C^\infty(\{(\xi,y_2)/y_2\leqslant0,\ \xi>0\}),\quad w_k(\xi,0)=\psi_k''(\xi)-v_k(\xi,\theta), \quad (12)$$

$$w_k(\xi,y_2)=O(e^{\delta y_2})\qquad\text{при}\quad y_2\to-\infty.$$

Такую задачу мы решали для функции $u_k^{(3)}$, так что формула ее решения (5) дает и функцию w_k.

В окрестности точки A введем переменные $y_1=\frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $y_2=\frac{t-\theta}{\varepsilon}$. Мы приходим к следующей задаче для z^A:

$$\mathcal{M}z^A(y,\varepsilon)=\sum_{k\geqslant0}\varepsilon^{\frac{k}{2}+1}g_k(\sqrt{\varepsilon}y_1,\theta+\varepsilon y_2)\ \text{в}\ R^2\setminus\{y\,(y_1\geqslant0,\ y_2>0\},$$

$$z^A(0,y_2,\varepsilon)=\sum_{k\geq 0}\varepsilon^{\frac{k}{2}}\varphi'(\theta+\varepsilon y_2),\quad z^A(y_1,0,\varepsilon)=\sum_{k\geq 0}\varepsilon^{\frac{k}{2}}\psi''(\sqrt{\varepsilon},y_1),$$

(13)

$$z^A(y,\varepsilon)-\left[v(\sqrt{\varepsilon}y_1,\theta+\varepsilon y_2,\varepsilon)+\omega(\sqrt{\varepsilon}y_1,y_2,\varepsilon)\right]=O(e^{-\delta|y|})\text{ в }\mathcal{D}_{z^A}\cup\mathcal{D}_v .$$

Естественно положить

$$z^A(y,\varepsilon)=\sum_{k\geq 0}\varepsilon^{\frac{k}{2}}z_k^A(y).$$

Тогда

$$\mathcal{M}z_k^A(y)=\sum_{\alpha+2\beta\leq k-2}\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial\xi^\alpha\partial t^\beta}g_{k-\alpha-2\beta-2}(0,\theta)y_1^\alpha y_2^\beta/\alpha!\beta!\equiv 0$$

$$\text{в}\quad R^2\setminus\{y\,|\,y_1\geq 0,\ y_2\geq 0\},\tag{14}$$

$$z_k^A(0,y_2)=0,\ z_k^A(y_1,0)=\sum_{0\leq\alpha\leq k}\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}v_{k-\alpha}(0,\theta-0)y_1^\alpha/\alpha!+\sum_{0\leq\alpha\leq k}\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\omega_{k-\alpha}(0,0)y_1^\alpha/\alpha!$$

Из переразложения (13) по степеням ε получим поведение z_k^A на бесконечности:

$$z_k^A(y)-\left[P_k^A(y)+Q_k^A(y)+R_k^A(y)+S_k^A(y)\right]=O(e^{-\delta|y|})\quad\text{при } |y|\to\infty,\tag{15}$$

где

$$P_k^A(y)=\sum_{\substack{\alpha,\beta\geq 0\\ \alpha+2\beta\leq k}}v^A_{k-\alpha-2\beta,\alpha,\beta}y_1^\alpha y_2^\beta,\quad Q_k^A(y)=\sum_{0\leq\alpha\leq k}\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\omega_{k-\alpha}(0,y_2)y_{1+}^\alpha/\alpha!,$$

$$R_0^A(y)+S_0^A(y)=\sum_{j\geq 0}y_{2+}^{-j}\cdot\Phi^A_{2j,0}(y_1/\sqrt{y_2}),$$

для $k\geq 1$

$$R_k^A(y)+S_k^A(y)=\sum_{j\geq 0}y_{2+}^{\frac{k-j}{2}}\Phi^A_{j,k-j+2[\frac{j}{2}]}(y_1/\sqrt{y_2}),$$

$$R_k^A\equiv\sum_{0\leq j\leq k},\qquad S_k^A\equiv\sum_{j\geq k+1}.$$

Отметим, что неубывающие члены асимптотики $P_k^A+Q_k^A+R_k^A$ полностью определяются значениями v_ℓ, ω_ℓ с $\ell\leq k$, причем регулярными - ограниченными при $(\xi,t)\to A$ - членами асимптотик этих функций.

Л е м м а I. Задача (I4) с дополнительным условием

$$z_\kappa^A(y) - \left[P_\kappa^A(y) + Q_\kappa^A(y) + R_\kappa^A(y)\right] \longrightarrow 0 \qquad (16)$$

при $|y| \longrightarrow \infty$ однозначно разрешима.

Подобным же образом ставится задача в окрестности точки B в переменных $y_1 = \frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $y_2 = \frac{t}{\varepsilon}$ для функции

$$z^B(y,\varepsilon) = \sum_{\kappa\geq 0} \varepsilon^{\frac{\kappa}{2}} z_\kappa^B(y).$$

А именно полагаем

$$\mathcal{M} z_\kappa^B = 0 \quad \text{в} \quad R^2 \setminus \{y \mid y_1 \geq 0,\ y_2 < 0\},$$

$$z_\kappa^B(0,y_2) = 0, \quad z_\kappa^B(y_1,0) = \sum_{0\leq\alpha\leq\kappa} \frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha} \psi'_{\kappa-\alpha}(0) y_1^\alpha/\alpha!, \qquad (17)$$

$$z_\kappa^B(y) - \left[P_\kappa^B(y) + R_\kappa^B(y) + S_\kappa^B(y)\right] = O(e^{-\delta|y|}) \quad \text{при} \quad |y| \longrightarrow \infty, \qquad (18)$$

с соответствующими P_κ^B, R_κ^B, S_κ^B (отметим, что в их разложениях $\sigma_{\kappa,0,\beta}^B = \phi_{0,0}^B = \phi_{1,0}^B = 0$ из-за того, что σ_0, σ_1 непрерывны и обращаются в нуль в точке B). Члены P_κ^B, R_κ^B определяются значениями σ_ℓ с $\ell \leq \kappa$ и считаются заданными при постановке задачи для z_κ^B .

Л е м м а 2. Задача (I7) с дополнительным условием

$$z_\kappa^B(y) - \left[P_\kappa^B(y) + R_\kappa^B(y)\right] \longrightarrow 0 \qquad (19)$$

при $|y| \longrightarrow \infty$ однозначно разрешима.

Л е м м а 3. Найденные z_κ^A, z_κ^B имеют на бесконечности асимптотики вида (I5), (I8) соответственно.

Выполнение асимптотических равенств (I5),(I8) означает теперь дополнительные условия на поведение $\{\sigma_\kappa\}$ в $\mathcal{D}_\sigma \cap \mathcal{D}_{z^A}$ и $\mathcal{D}_\sigma \cap \mathcal{D}_{z^B}$. Для отдельного σ_κ это задает сингулярные члены разложений (I0) в окрестностях точек A и B :

$$\tau^{-\left[\frac{\kappa}{2}\right]} \sum_{0\leq j\leq 2\left[\frac{\kappa}{2}\right]-1} \tau_+^{\frac{j}{2}} \phi_{\kappa j}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right), \quad \tau^A = t - \theta, \quad \tau^B = t. \qquad (20)$$

Л е м м а 4. Задача (9),(20) для неизвестных функций σ_κ и постоянных c_κ однозначно разрешима в классе функций, имеющих в точках A и B особенности вида (I0).

§ 2. Построение пограничных слоев

Удлиним цепочку соотношений (9), (20), (I2), (I4), (I6), (I7), (I9) на значения индекса $K=-1,-2$, условно добавив v_K, w_K, z_K^A, z_K^B $(K=-1,-2)$, все равные нулю. Добавленные значения можно взять за базу индукции. Индуктивный переход от v_ℓ, w_ℓ, z_ℓ^A, z_ℓ^B с индексами $\ell \leq K$ к v_{K+1}, w_{K+1}, z_{K+1}^A, z_{K+1}^B, v_{K+2}, w_{K+2}, z_{K+2}^A, z_{K+2}^B получается последовательным применением лемм 4,I,2.

Основной результат нашей работы - асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи (I) - дает следующая

Т е о р е м а . Задача (8.I)-(8.7) имеет равномерно асимптотическое решение, описывающееся формулами (II),(9), (20), (I2), (I4), (I6), (I7), (I9).

Для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость всех лемм.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы I. В задаче для z_K^A функции P_K^A, Q_K^A по отдельности удовлетворяют однородному уравнению $\mathcal{M} z_K = 0$. Сумма $R_K^A + S_K^A$ также удовлетворяла бы этому уравнению, но члены разложения S_K^A нам неизвестны. Построим функцию $\tilde{S}_K^A$ так, чтобы $P_K^B(y) + Q_K(y)\zeta(y_1) + R_K^A(y)\zeta(|y|) + \tilde{S}_K^A(y)$ было решением задачи для z_K^A. Нетрудно проверить, что это приводит к следующим условиям для функции $\tilde{S}_K^A$:

$$\mathcal{M}\tilde{S}_K^A(y) = h_K^A(y) = g_K(y) + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\left(\left[\Phi^A_{K,2\left[\frac{K}{2}\right]}\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_2}}\right) + y_2^{\frac{1}{2}}\,\Phi^A_{K-1,1+2\left[\frac{K-1}{2}\right]}\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_2}}\right)\right]\zeta(|y|)\right),$$

$$g_K(y) = o(e^{-\delta|y|}),$$

$\tilde{S}_K^A(0,y_2)$ и $\tilde{S}_K^A(y_1,0)$ - финитные функции. Сделаем еще одну замену $a(y) = \tilde{S}_K^A(y)e^{\alpha y_1 + \beta y_2}$. Уравнение для a имеет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)a - 2\alpha\frac{\partial a}{\partial y_1} - (1-\beta)\frac{\partial a}{\partial y_2} - \frac{2\beta-\beta^2+4\alpha^2}{4}a = he^{\alpha y_1+\beta y_2}.$$

Если выбрать $\beta \leq 0$, $|\alpha| + |\beta| \leq \frac{\delta}{2}$, $|\beta| < \alpha^2 < 1$, то коэффициент при a будет отрицательным, а правая часть уравнения все еще будет убывать на бесконечности. Поэтому к задаче для функции a можно применить принцип максимума и с его помощью установить однозначную разрешимость этой задачи в классе функций, убывающих на бесконечности. Из формулы замены $\tilde{S}_K^A$ на a получаем $\tilde{S}_K^A(y) = O(e^{-\delta|y_1| + \delta y_2})$ при $|y_1|, -y_2 \to +\infty$ и $\tilde{S}_K^A(y) \to 0$ при $y_2 \to +\infty$.

Доказательство леммы 2. Сначала положим

$$z_\kappa^B(y) = P_\kappa^B(y) + R_\kappa^B(y)\cdot \chi(|y|) + \tilde{S}_\kappa^B(y)$$

, затем

$b(y) = \tilde{S}_\kappa^B(y) e^{\alpha y_1 + \beta y_2}$. Подобно доказательству леммы I получим существование $b(y)$ как решения соответствующей задачи в классе функций, стремящихся к нулю на бесконечности. В результате имеем

$$\tilde{S}_\kappa^B(y) = O\left(e^{-\delta|y_1| + \delta y_2}\right) \quad \text{при } |y_1|, -y_2 \to +\infty$$

и

$$\tilde{S}_\kappa^B(y) \to 0 \quad \text{при } |y| \to \infty.$$

Доказательство леммы 3. Нам нужно дать асимптотические разложения функций $\tilde{S}_\kappa^A(y)$, $\tilde{S}_\kappa^B(y)$ на бесконечности. В постановках задач для этих функций изменим данные на величины $O(e^{-\delta|y|})$ при $|y| \to \infty$, упростив их выражения:

$$\mathcal{M} S_\kappa = h_\kappa,$$

$$h_\kappa(y) \equiv \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\left[\Phi_{\kappa, 2\left[\frac{\kappa}{2}\right]}\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_2}}\right) + y_2^{\frac{1}{2}} \Phi_{\kappa-1, 1+2\left[\frac{\kappa-1}{2}\right]}\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_2}}\right)\right], \text{ если } \kappa \geq 1,$$

$$h_0(y) \equiv 0,$$

$$S_\kappa^A(y_1, 0) = S_\kappa^A(0, y_2) \quad \text{при } y_1 < 0,\ y_2 > 0,$$

$$S_\kappa^B(y, 0) = 0 \quad \text{при } y_1 \neq 0.$$

Замечая, что $\Phi^A_{\kappa-1, 1+2\left[\frac{\kappa-1}{2}\right]}(0) = 0$, продолжим h_κ^A нечетной функцией на значения $y_1 \geq 0$. Как и в случае точки B, для S_κ^A имеем теперь задачу в полупространстве.

Решение будем искать в виде

$$S_\kappa = \sum_{j \geq \kappa+1} Z_j, \quad Z_j(y) = y_2^{\frac{\kappa-j}{2}} \psi_j\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_2}}\right), \tag{2I}$$

$$\psi_j \in C^\infty, \quad \psi_j(\sigma) = O(e^{-\delta|\sigma|}) \quad \text{при } |\sigma| \to +\infty.$$

Тогда для нахождения Z_j мы должны решить рекуррентную систему уравнений

$$\mathcal{L} Z_j = \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} Z_{j-2} . \tag{22}$$

Мы не можем прямо записать Z_j в виде свертки правой части уравнения с фундаментальным решением уравнения теплопроводности из-за того, что $\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} Z_{j-2}$ имеет сингулярности в начале координат. Но, заметив, что

$$\mathcal{L}^{\left[\frac{j-k+1}{2}\right]} Z_j = \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^{2\left[\frac{j-k+1}{2}\right]} Z_{j-2\left[\frac{j-k+1}{2}\right]} ,$$

$$Z_{j-2\left[\frac{j-k+1}{2}\right]}(y) = \begin{cases} y_2^{\frac{1}{2}} \Phi_{k-1,1+2\left[\frac{k-1}{2}\right]}\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_2}}\right) & \text{при } j-k \text{ нечетном,} \\ \Phi_{k,2\left[\frac{k}{2}\right]}\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_2}}\right) & \text{при } j-k \text{ четном,} \end{cases}$$

мы предлагаем для Z_j формулу

$$Z_j(y) = \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^{2m} \left[\frac{y_{2+}^{m-\frac{3}{2}}}{(m-1)!\, 2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{4y_2^2}} * Z_{j-2m} \right] ,$$

$$m = \left[\frac{j-k+1}{2}\right] , \qquad * \text{ - означает свертку.}$$

Нетрудно проверить, что уравнение удовлетворяется. Выполнение нулевых начальных условий следует из заданной асимптотики функций ψ_j. Остается обосновать эту асимптотику. Если в свертке в интеграле по y_1 перейти к переменной $\sigma = y_1/\sqrt{y_2}$, то вид асимптотики (21) устанавливается из подсчета порядков однородностей по y_2 функций, участвующих в формуле

$$Z_j(y) = \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^{2m} y_2^{\frac{k}{2}-1} \int_0^1 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, e^{-\frac{(\sigma-\eta\sqrt{\tau})^2}{4(1-\tau)}} \cdot \frac{(1-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \tau^{\frac{k-j}{2}+m} \psi_{k-2m}(\eta) .$$

При этом $\psi_j(\sigma) = Z_j(\sigma, 1)$. Рекуррентно устанавливается, что $Z_j(\sigma,1) = O(e^{-\delta|\sigma|})$ при $|\sigma| \to \infty$ как решение неоднородного уравнения теплопроводности (2.2) с таким же поведением правых частей. Остается проверить, что $h_k(\sigma,1) = O(e^{-\delta|\sigma|})$ при $|\sigma| \to \infty$. Для задачи в точке $\mathcal{A}$ это следует из такого поведения при $\sigma \to -\infty$ и нечетного продолжения функции h_κ^A на значения $\sigma>0$. Для задачи в точке B это можно вывести из доказательства леммы 2. Действительно, $h_\kappa^B(y) = \mathcal{M}\tilde{S}_\kappa^B(y)+O(e^{-\delta|y|}) = O(e^{-\delta|y_1|})$ при $|y_1|\to\infty$ и фиксированном y_2. В частности,

$$h_\kappa^B(\sigma,1) = O(e^{-\delta|\sigma|}) \qquad \text{при } |\sigma|\to\infty.$$

Теперь представим $\tilde{S}_\kappa$ в виде $\tilde{S}_\kappa(y)=S_\kappa(y)\cdot\chi(|y|)+T(y)$, получая для T задачу

$$\mathcal{M}T_\kappa(y)=O(e^{-\delta|y|}) \qquad \text{при } |y|\to\infty,\ y>0,$$

$$T_\kappa(y_1,0)=O(e^{-\delta|y_1|}) \qquad \text{при } |y_1|\to\infty.$$

Сделав вычисления, подобные проделанным в доказательствах лемм I и 2, но без ограничения на знак параметра β, придем к результату $T_\kappa(y)=O(e^{-\delta|y|})$ при $|y|\to\infty$.

Доказательство леммы 4. Мы строим $v_{\kappa+1} = v_{\kappa+1}^s + v_{\kappa+1}^z$ как сумму ее сингулярной и регулярной частей. Функция $v_{\kappa+1}^s(\xi,t)$ определяется при $t-\theta\geq 0$ (или $t\geq 0$) переразложением $S_\kappa(y)$ в переменных (ξ,t) как коэффициент при $\varepsilon^{\kappa+1/2}$. Результат в окрестности точек A или B записывается формулами (20), в которых $\Phi_{\kappa j}$ определяются асимптотикой функций $S_\ell(y)$ с $\ell\leq\kappa$. Срезав полученные функции финитными в окрестностях точек A и B функциями и продолжив результат срезки периодически на все $\tilde{R}$, получим полную функцию $v_{\kappa+1}^s(\xi,t)$. Для $v_{\kappa+1}^z(\xi,t)$ получаем теперь задачу (9) в классе ограниченных функций. Докажем ее разрешимость.

Сначала вместо периодической задачи поставим непериодическую, заменив условие периодичности решения на задание некоторого начального условия на линии $\{(\xi,t)/\xi<0,\ t=0\}$, $w|_{t=0}=\varphi(\xi)$. Через w мы обозначили здесь решение поставленной задачи. Задача с начальным условием однозначно разрешима при $t\geq 0$ в классе функций, ограниченных по (ξ,t) в любой полосе $0\leq t\leq T$. Покажем, что это решение равномерно ограничено при всех $t\geq 0$.

Функцию w можно оценить решением той же задачи, но с заменой правой части уравнения g на $|g|$ и φ на $|\varphi|$. Поэтому при получении оценки для w будем считать

$$g \geq 0, \quad \varphi \geq 0, \quad w \geq 0.$$

Для доказательства равномерной ограниченности w построим барьер-такую ограниченную функцию, которая оценит w сверху. Положим $w = w_1 + w_2$, где w_1 - решение однородного уравнения с начальным данным, а w_2 - решение неоднородного уравнения с нулевым начальным данным.

Построим в $\tilde{R}$ при $t \in [0, 2\pi]$ функцию $z(\xi, t)$ с такими свойствами

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) z = 0 \quad \text{в } \tilde{R},$$

$$z - \omega_1 \geq 0 \quad \text{при } \xi \in R', \ t = 0 \quad \text{и при } \xi = 0, \ t \in (\theta, 2\pi),$$

$$z(\xi, 0) - z(\xi, 2\pi) \geq \omega_2(\xi, 2\pi) \quad \text{для } \xi < 0. \tag{23}$$

Тогда $0 \leq w_1(\xi, t) \leq z(\xi, t)$

и $$w(\xi, 2\pi) \leq z(\xi, 2\pi) + w_2(\xi, 2\pi) \leq z(\xi, 0) + (z(\xi, 2\pi) - z(\xi, 0)) +$$

$$+ w_2(\xi, 2\pi) \leq z(\xi, 0) \qquad \text{для } \xi > 0.$$

Зададим $z(\xi, 0) = \begin{cases} a - b\varphi^{\nu\xi} & \text{для } \xi < 0, \\ 0 & \text{для } \xi > 0 \end{cases}$

с произвольными пока положительными постоянными.

Имеем при $\xi < 0$:

$$z(\xi, \theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \int_{-\infty}^{0} d\eta \, e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4\theta}} (a - b\, e^{\nu\eta}) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\xi/2\sqrt{\theta}} d\eta \, e^{-\eta^2} -$$

$$- b \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \int_{-\infty}^{0} d\eta \exp\left[-\frac{\eta^2}{4\theta} + \eta\left(\frac{\xi}{2\theta} + \nu\right) - \frac{\xi^2}{4\theta}\right] =$$

$$= a - \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{|\xi|/2\sqrt{\theta}}^{+\infty} d\eta e^{-\eta^2} - b\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}}\int\limits_{-\infty}^{0} d\eta \exp\left[-\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\theta}} - \left(\frac{\xi}{2\theta}+\nu\right)\sqrt{\theta}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{2\theta}+\nu\right)^2\theta - \frac{\xi^2}{4\theta}\right] =$$

(полагаем $= \frac{\eta}{2\sqrt{\theta}} - \frac{\xi+2\nu\theta}{2\sqrt{\theta}} = \zeta$)

$$= a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{|\xi|/2\sqrt{\theta}}^{+\infty} d\eta e^{-\eta^2}\right) - \frac{b}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\xi}{2\sqrt{\theta}}-\nu\sqrt{\theta}} d\zeta e^{-\zeta^2}\cdot e^{\nu^2\theta+\xi\nu} =$$

$$= a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{|\xi|/2\sqrt{\theta}}^{\infty} d\eta^{-\eta^2}\right) - be^{\nu\xi}\cdot e^{\nu^2\theta}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{|\xi|/2\sqrt{\theta}}^{+\infty} d\eta e^{-\eta^2}\right) =$$

$$= a - be^{\nu^2\theta}e^{\nu\xi} - \left[\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{|\xi|/2\sqrt{\theta}} d\eta e^{-\eta^2} - \frac{be^{\nu^2\theta}e^{\nu\xi}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{|\xi|/2\sqrt{\theta}-\nu\sqrt{\theta}}^{\infty} d\eta e^{-\eta^2}\right] \leq$$

$$\leq a - be^{\nu^2\theta}e^{\nu\xi} + \frac{b}{\sqrt{\pi}}e^{-\xi^2/4\theta} - \left(\frac{a}{b} - e^{\nu^2\theta}e^{\nu\xi}\right)\cdot\frac{b}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{|\xi|/2\sqrt{\theta}}^{-\infty} d\eta e^{-\eta^2}.$$

Пусть $a > b,\quad \nu \leq \sqrt{\frac{1}{\theta}\ln\frac{a}{b}}$.

Тогда

$$z(\xi,\theta) \leq a - be^{\nu\xi}\cdot e^{\nu^2\theta}\cdot\left(1 - \frac{e^{(\xi/2\sqrt{\theta}+\nu\sqrt{\theta})^2}}{\sqrt{\pi}}\right) \leq$$

$$\leq a - b\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)e^{\nu^2\theta}\cdot e^{\nu\xi} \equiv a - b_1\cdot e^{\nu\xi},$$

$$z(\xi,2\pi) \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi(2\pi-\theta)}}\int\limits_{-\infty}^{0} d\eta\left[e^{-(\xi-\eta)^2/4(2\pi-\theta)} - e^{-(\xi+\eta)^2/4(2\pi-\theta)}\right](a - b_1e^{\nu\eta}) =$$

$$= a\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\xi/2\sqrt{2\pi-\theta}} d\eta e^{-\eta^2}\right) - \frac{b_1}{\sqrt{\pi}}e^{\nu^2(2\pi-\theta)}\left[\int\limits_{-\infty}^{-\frac{\xi}{2\sqrt{2\pi-\theta}}-\nu\sqrt{2\pi-\theta}} d\eta\, e^{-\eta^2+\xi\nu} -\right.$$

$$\left.-\int\limits_{-\infty}^{\frac{\xi}{2\sqrt{2\pi-\theta}}-\nu\sqrt{2\pi-\theta}} d\eta\, e^{-\eta^2-\xi\nu}\right] = a\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\xi/2\sqrt{2\pi-\theta}} d\eta e^{-\eta^2}\right) -$$

$$- be^{\nu^2\cdot 2\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\left[e^{\xi\nu}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\xi/2\sqrt{2\pi-\theta}+\nu\sqrt{2\pi-\theta}} d\eta\, e^{-\eta^2}\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\xi\nu}\int\limits_{-\infty}^{\xi/2\sqrt{2\pi-\theta}-\nu\sqrt{2\pi-\theta}} d\eta\, e^{-\eta^2}\right].$$

Достаточно уметь оценить $w_2(\xi, 2\pi)$ сверху. Мы оценим его через решение задачи Коши с нулевым начальным данным и правой частью

$$Ce^{-\delta|\xi|}\frac{1}{\sqrt{t\cdot|\theta-t|}}.$$

При $\xi<0$ имеем

$$w_2(\xi,2\pi)\leqslant\int_0^{2\pi}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\,\frac{e^{-(\xi-\eta)^2/4(2\pi-\tau)}}{2\sqrt{\pi(2\pi-\tau)}}\cdot C\,\frac{e^{-\delta|y|}}{\sqrt{\tau|\theta-\tau|}}=$$

$$=C\int_0^{2\pi}\frac{d\tau}{2\sqrt{\pi\tau|\theta-\tau|(2\pi-\tau)}}\int_{-\infty}^{0}d\eta\,e^{\delta\eta}\left[e^{-(\xi-\eta)^2/4(2\pi-\tau)}+e^{-(\xi+\eta)^2/4(2\pi-\tau)}\right]\leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^{2\pi}\frac{d\tau}{2\sqrt{\pi\tau|\theta-\tau|(2\pi-\tau)}}\int_{-\infty}^{0}d\eta\,e^{\delta\eta-\frac{(\xi-\eta)^2}{4(2\pi-\tau)}}=$$

$$=\frac{C}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau|\theta-\tau|}}\int_{-\infty}^{-\xi/2\sqrt{2\pi-\tau}-\delta\sqrt{2\pi-\tau}}d\eta\,e^{-\eta^2+\delta\xi+\delta^2(2\pi-\tau)}\leqslant$$

$$\leqslant 2C\int_0^{2\pi}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau|\theta-\tau|}}\cdot e^{2\pi\delta^2}e^{\delta\xi}\equiv C_1e^{\delta\xi}.$$

Проверим оценку (23):

$$w_2(\xi,2\pi)+z(\xi,2\pi)\leqslant C_1e^{\delta\xi}+a\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\xi/2\sqrt{2\pi-\theta}}d\eta\,e^{-\eta^2}\right)-$$

$$-be^{2\pi\nu^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\left[e^{\nu\xi}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\xi}{2\sqrt{2\pi-\theta}}+\nu\sqrt{2\pi-\theta}}d\eta\,e^{-\eta^2}\right)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\xi\nu}\int_{-\infty}^{\frac{\xi}{2\sqrt{2\pi-\theta}}-\nu\sqrt{2\pi-\theta}}d\eta\,e^{-\eta^2}\right]\equiv I.$$

Надо показать, что $I\leqslant a-be^{\nu\varepsilon}$.

Или

$$C_1e^{\delta\xi}+be^{2\pi\nu^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\xi\nu}\int_{-\infty}^{\frac{\xi}{2\sqrt{2\pi-\theta}}-\nu\sqrt{2\pi-\theta}}d\eta\,e^{-\eta^2}\leqslant$$

$$\leqslant a\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\xi}{2\sqrt{2\pi-\theta}}}d\eta\,e^{-\eta^2}+b\left[e^{2\pi\nu^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\xi}{2\sqrt{2\pi-\theta}}+\nu\sqrt{2\pi+\theta}}d\eta\,e^{-\eta^2}\right)-1\right]e^{\nu\xi}.$$

Для этого необходимо взять

$$e^{2\pi\nu^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)>1 \qquad \text{и } \nu\leqslant\delta \text{ (мы возьмем } \nu=\delta \text{).}$$

Упрощая, мы приходим к необходимости проверить при $\xi\leqslant 0$ такое неравенство:

$$C_1+be^{2\pi\nu^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{2|\xi|\nu-\frac{\xi^2}{4(2\pi-\theta)}}\cdot\nu\sqrt{2\pi-\theta}\cdot\left(1+\alpha(\xi)\right)\leqslant$$

$$\leqslant a\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\xi/2\sqrt{2\pi-\theta}}d\eta\, e^{-\eta^2}+b\left[\left(e^{2\pi\nu^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)-1\right)+\beta(\xi)\right],$$

где $\alpha(\xi)$ и $\beta(\xi)=O(1)$ при $\xi\to-\infty$.

Ясно, что этой оценки можно добиться за счет выбора достаточно больших a и b . Но на ν получаем двустороннее ограничение

$$\frac{1}{\theta}\ln\frac{a}{b}\geqslant\nu^2\geqslant\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}-1}>\frac{1}{6}\,.$$

Оценка сверху есть условие на a , b . Оценку снизу, огрубив, запишем как

$$\nu\geqslant 0,5. \tag{24}$$

В каждой из областей

$$\tilde{R}_\ell=\{(\xi,t)/t-2\pi\ell\in[0,2\pi)\}\cap\tilde{R}$$

условия на функцию w периодически повторяются. Поэтому для пары функций $w(\xi,t+2\pi\ell)$ и $z(\xi,t)$, рассмотренных в $\tilde{R}_0$, выполняется неравенство

$$w(\xi,2\pi(\ell+1))\leqslant z(\xi,0),$$

коль скоро оно выполняется на ℓ-м шаге $w(\xi,2\pi\ell)\leqslant z(\xi,0)$. Значит, по индукции, эти неравенства выполняются для любого $\ell=0,1,2,\dots$. Из них, очевидно, следует равномерная ограниченность функции $w(\xi,t)$ в $\bar{R}$. Тогда на любом компакте из множеств

$$\{(\xi,t)/\xi\leqslant 0\}\setminus\{(0,t)/t-2\pi\ell=0,\theta\}\ \forall\ell=0,1,\dots$$

и

$$\{(\xi,t)/\xi\geqslant 0,\ t-2\pi\ell\in[0,\theta]\}\setminus\{(0,t)/t-2\pi\ell=0,\theta\}\ \forall\ell=0,1,\dots$$

равномерно ограничены и любые производные от w . Значит, на выбранном компакте множество функций $\{w(\xi,t+2\pi\ell)\}_{\ell=0}^{\infty}$ компактно. Диагональным процессом можно выделить из этого множества последовательность, сходящуюся вместе со всеми производными на любом компакте из указанных множеств. Легко видеть, что можно добиться сходимости вместе с первыми производными и в окрестности точек множества $\{(0,t)/t-2\pi e \in (0,\theta)\}$ за исключением точек $\mathcal{A}_e$, B_e. Предельная функция - пока обозначим ее тоже через w - является ограниченным решением периодической задачи (9). Остается проверить периодичность самой функции w и ее поведение при $\xi \longrightarrow \pm\infty$. Совокупность

$$\{w(\xi,t+2\pi e) - w(\xi,t) + 2\pi(\ell+1)\}_{\ell\geq 0}$$ - это множество

функций, сходящееся (по выделенной выше подпоследовательности) при $\ell\to\infty$, а при фиксированном ℓ каждая из этих функций удовлетворяет нулевым граничным условиям, однородному уравнению и начальному данному $\psi(\xi)$, убывающему при $\xi\to\pm\infty$ экспоненциально. Такое решение мажорируется решением задачи Коши в полуплоскости, и из явной формулы

$$\left|\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, e^{-\frac{(\xi-\eta)^2}{4t}}\psi(\eta)\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, |\psi(\eta)|$$

следует его стремление к нулю при $t\to\infty$. Это дает

$$w(\xi,t+2\pi e) - w(\xi,t+2\pi(\ell+1)) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \ell\longrightarrow\infty,$$

что в пределе и означает периодичность предельной функции.

Взяв среднее по t от обеих частей уравнения для w при $\xi<0$, получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int_0^{2\pi} dt\, w(\xi,t) = 0, \qquad \text{или} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt\, w(\xi,t) = a\xi + b$$

с некоторыми постоянными a и b. Однако ограниченность решения необходимо влечет $a=0$.

Итак,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt\, w(\xi,t) = b.$$

Функция $w(\xi,t) - b$ является решением периодической краевой задачи в полупространстве $\xi<0$.

Поэтому $w(\xi,t)-b$ убывает экспоненциально при $\xi\to-\infty$. Скорость этого убывания $O(e^{+\frac{1}{2}\xi})$, так что выполняется условие (24), наложенное на ν ранее в ходе построения барьерной функции.

Отметим, что произвольные c_k из постановки задачи (9) определяются из условий $c_k(\tau_2-\tau_1)=b$. Экспоненциальное убывание для $\xi\to+\infty$ легко следует из рассмотрения w как решения краевой задачи в полуполосе $\{(\xi,t)/2\leqslant\xi,\ 0\leqslant t\leqslant\theta\}$.

Литература

1. Хасьминский Р.З. О диффузионных процессах с малым параметром.- Изв. АН СССР. Сер.мат., 1963, т. 27, № 6, с.1281-1302.
2. Ильин А.М., Леликова Е.Ф. Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\varepsilon\Delta u+a(x,y)u_y=f(x,y)$ в прямоугольнике.- Мат.сб., 1975, т.96 (138), № 4, с.568-583.