УДК 517.946

ВЕСОВЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ

А. Д. Баев, В. П. Глушко (Воронеж)

В последние годы значительно возрос интерес к "неклассическим" задачам математической физики, в частности, к граничным задачам для вырождающихся уравнений в частных производных.

Построение теории разрешимости таких задач потребовало изучения свойств специального класса весовых псевдодифференциальных операторов (в.п.д.о.). С помощью в.п.д.о. в работе [1] были доказаны априорные оценки и построена теория разрешимости для широкого класса вырождающихся эллиптических уравнений произвольного порядка. При этом достаточно было изучить свойства в.п.д.о. (см. [2]) лишь в случае постоянного символа.

В настоящей работе авторы вводят класс в.п.д.о. с переменным символом и изучают ряд свойств таких операторов, аналогичных ранее установленным свойствам в случае постоянного символа. Указанные свойства в.п.д.о. позволяют существенно расширить классы вырождающихся уравнений, для которых может быть построена теория разрешимости, аналогичная теории, изложенной в [1] .

Для сокращения объема статьи авторы не включили в нее доказательство двух предложений, которое в определенном смысле аналогично доказательству соответствующих утверждений, хорошо известных в общей теории псевдодифференциальных операторов.

1. Основные определения и утверждения

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t\in R^+_1$, для которой $\alpha(+0)=\alpha'(+0)=0$, $\alpha(t)>0$ при $t>0$, $\alpha(t)=const$ для $t\geq d$ при некотором $d>0$. Следуя [3] , рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta)=\int_0^{+\infty}u(t)\exp\left(i\eta\int_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right), \qquad (1.1)$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_1^+)$.

В [3] показано, что преобразование (I.I) связано с преобразованием Фурье равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u_\alpha(\tau) exp(i\tau\eta)d\tau, \quad \eta \in R_1, \tag{I.2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}\, u(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции

$$\tau = \varphi(t) = \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$$

Кроме того, для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R_1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u(t)\|_{L_2(R_1^+)} \quad (u \in L_2(R_1^+)). \tag{I.3}$$

Равенство (I.3), как известно, дает возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего изоморфизм пространств $L_2(R_1)$ и $L_2(R_1^+)$. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Будем обозначать через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R_1)$ на $L_2(R_1^+)$. В [4] показано, что преобразование F_α^{-1} может быть записано в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}, \quad t > 0, \tag{I.4}$$

для $w(\eta) \in L_1(R_1)$.

Из (I.I) очевидным образом вытекает, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_1^+)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[\mathcal{D}^j_{\alpha,t}\, u(t)](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), \quad j = 1,2,\ldots, \tag{I.5}$$

где $\mathcal{D}_{\alpha,t} = \sqrt{-\alpha(t)}\,\partial_t \sqrt{\alpha(t)}$, $\quad \partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$.

Зведем функциональные пространства $H^s_{\alpha,\beta}$, $H^{s,q}_{\alpha,\beta}$, в которых будут рассматриваться в.п.д.о.

Пусть $\alpha(t) \in C^{N+2}(\bar{R}_1^+)$ $(N \geq 1)$. Следуя [4], обозначим через $S^N(R_n)$ пространство основных функций $\psi(x,\tau)$, $(x,\tau) \in R_n$, $\tau \in R_1$, имеющих производные $\mathcal{D}_\tau^\ell \mathcal{D}_x^\gamma$ при $\ell \leq N+2$ и любом $|\gamma| \geq 0$, причем при любых K конечны нормы

$$\|\psi\|_{N,K} = \sup_{(x,\tau)\in R_n} (1+|x|)^K (1+|\tau|)^{N+2} \sum_{|\gamma|\leq K,\, \ell\leq N+2} |\mathcal{D}_\tau^\ell \mathcal{D}_x^\gamma \psi(x,\tau)|.$$

Обозначим через $S_\alpha^N(R_n^+)$ пространство функций $\tilde\varphi(x,t)$, для которых функции

$$\psi(x,\tau)=\tilde\varphi_\alpha(x,\tau)=\sqrt{\alpha(t)}\,\tilde\varphi(x,t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$$

принадлежат $S^N(R_n)$. Нормы в $S_\alpha^N(R_n^+)$ определяются формулой $\|\tilde\varphi\|^+_{N,\alpha,\kappa}=\|\tilde\varphi_\alpha\|_{N,\kappa}$. Множество всех линейных непрерывных функционалов над $S^N(R_n)$ обозначим через $S'^N(R_n)$. Действие функционала $f\in S'^N(R_n)$ на функцию $\psi\in S^N$ будем обозначать (f,ψ) и говорить, что функционал f принадлежит $S_\alpha'^N(R_n^+)$, если существует функционал $f_\alpha\in S'^N(R_n)$ такой, что для любой функции $\tilde\varphi\in S_\alpha^N(R_n^+)$ справедливо представление этого функционала в виде $(f,\tilde\varphi)^+=(f_\alpha,\tilde\varphi_\alpha)$. Определим преобразования F_α на $S_\alpha'^N(R_n^+)$ и F_α^{-1} на $S'^N(R_n)$ по формулам:

$$(F_\alpha[f],\tilde\varphi)=(f,F_\alpha^{-1}[\tilde\varphi])^+,\quad (F_\alpha^{-1}[f],\tilde\varphi)^+=(f,F_\alpha[\tilde\varphi]).$$

Очевидно, что $F_\alpha F_\alpha^{-1}=I$, $F_\alpha^{-1}F_\alpha=I_+$ (I_+- тождественный оператор в $S_\alpha'^N(R_n^+)$).

Определение 1. Функция $v(x,t)\in S_\alpha'^N(R_n^+)$ принадлежит пространству $H^s_{\alpha,\beta}(R_n^+)$ ($s\in R_1$, $|s|<N$), если конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\beta}=\|F^{-1}_{\xi\to x}F_\alpha^{-1}\big[(1+\beta(t)|\xi|+|\xi|^{1/q}+|\eta|)^{s}F_{x\to\xi}F_\alpha[v]\big]\|_{L_2(R_n^+)},$$

где $q>1$ - действительное число, а функция $\beta(t)$ такова, что $\beta(+0)=0$, $\beta(t)>0$ при $t>0$. $\beta(t)=const$ при $t\geq d>0$.

Определение 2. Пространство $H^{s,q}_{\alpha,\beta}(R_n^+)$ $(s\geq 0)$ состоит из всех функций $v(x,t)\in H^s_{\alpha,\beta}(R_n^+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha,\beta,q}=\sum_{\ell=0}^{[s/q]}\|F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}\big[(1+\beta(t)|\xi|+|\xi|^{1/q}+|\eta|)^{s-q\ell}F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_t^\ell v]\big]\|_{L_2(R_n^+)}.$$

Определение 3. Обозначим через $S^{\sigma,q}_{1,\delta}$ класс функций $\lambda(t,\xi,\eta)\in C^\infty(\bar R^+_{n+1})$, определенных на $[0,+\infty)\times R_{n-1}\times R_1$, таких, что справедливы при всех $\xi\in R_{n-1}$ и всех κ,ℓ оценки

$$|\partial_t^\kappa\partial_\eta^\ell\lambda(t,\xi,\eta)|\leq c_{\kappa,\ell}\,(1+\beta(t)|\xi|+|\xi|^{1/q}+|\eta|)^{\sigma-\ell+\delta\kappa},\tag{1.6}$$

где $0\leq\delta<q^{-1}$, $q>1$; постоянная $c_{\kappa,\ell}>0$ не зависит от t,ξ,η; функция $\beta(t)$ определена выше.

Пусть выполнено следующее

Условие 1. Функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^\infty[0,\infty)$, и существует такое число $\nu\in(0,1]$, что $\sup\limits_{0<t<\infty}|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)|<\infty$.

Условие 2. Функция $\beta(t)$ принадлежит $C^\infty[0,\infty)$, и для некоторого $\mu\in[0,1]$ справедливы оценки $\partial_t^j\beta(t)=O(\beta^{j\mu-j+1})$ при $t\to+0$ для $j=1,2,\dots,N_\mu$, где N_μ – наименьшее целое число, для которого $N_\mu\geqslant\frac{\mu}{1-\mu}$.

Легко показать, что функция $\lambda_\sigma(t,\xi,\eta)=(1+\beta^2(t)|\xi|^2+|\xi|^{2/q}+|\eta|^2)^{\sigma/2}$ принадлежит классу $S^{\sigma,q}_{1,\delta}$, если функция $\beta(t)$ удовлетворяет условию 2 и числа q,μ и δ связаны соотношениями $(q-1)(1-\mu)\leqslant\delta<q^{-1}$. В частности, $\lambda_\sigma\in S^{\sigma,q}_{1,\delta}$, если функция $\beta(t)\in C^\infty[0,\infty)$ представима в виде $\partial_t\beta(t)=\gamma(t)\beta^\mu(t)$, где $\gamma(t)\in C^\infty[0,\infty)$ и $\mu\in[0,1]$ удовлетворяет условию $(q-1)(1-\mu)\leqslant\delta<q^{-1}$.

На функциях $v(x,t)\in S^N_\alpha(R^+_n)$ определим в.п.д.о. формулой

$$P^{(\sigma)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[v]=F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[\lambda(t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[v]], \tag{1.7}$$

где $\lambda(t,\xi,\eta)\in S^{\sigma,q}_{1,\delta}$, $|\sigma|<N$.

Приведем вначале два утверждения, доказательства которых мы здесь не приводим.

Предложение 1. <u>Пусть</u> $P(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})$ <u>и</u> $Q(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})$ <u>в.п.д.о. с символами, принадлежащими соответственно</u> $S^{m_1,q}_{1,\delta}$ <u>и</u> $S^{m_2,q}_{1,\delta}$ (m_1,m_2 – <u>действительные числа). Тогда оператор</u> $P(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})\circ Q(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})$ <u>есть в.п.д.о. с символом из класса</u> $S^{m_1+m_2,q}_{1,\delta}$ $(0\leqslant\delta<q^{-1})$.

Предложение 2. <u>Пусть</u> $P(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})$ – <u>в.п.д.о. с символом из класса</u> $S^{\sigma,q}_{1,\sigma}$; $\sigma\in R_1$, $0\leqslant\delta<q^{-1}$, <u>где</u> $q>1$. <u>Тогда для любой функции</u> $v(x,t)\in H^{s+\sigma}_{\alpha,\beta}(R^+_n)$ <u>справедлива оценка</u>

$$\|P(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[v]\|_{s,\alpha,\beta}\leqslant C\|v\|_{s+\sigma,\alpha,\beta} \tag{1.8}$$

<u>с постоянной</u> $C>0$, <u>не зависящей от</u> v.

Предложение 1 описывает, в частности, взаимодействие операторов $P^{(\sigma)}$ с любым дифференциальным оператором $\mathcal{D}^\ell_x\mathcal{D}^j_{\alpha,t}$ $(|\ell|\geqslant0,\ j\geqslant0)$. В приведенных ниже теоремах 1 и 2 мы исследуем взаимодействие в.п.д.о. $P^{(\sigma)}$ с дифференциальным оператором $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell$.

Теорема 1. <u>Пусть</u> $P^{(\sigma)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})$ – <u>в.п.д.о. с символом</u>

$\lambda(t,\xi,\eta)\in S^{\sigma,q}_{1,\delta}$, $\sigma\in R_1$; $v(x,t)\in H^{s+\sigma}_{\alpha,\beta}(R^+_n)$,

$\partial^{\ell}_t v\in H^{s+\sigma}_{\alpha,\beta}(R^+_n)$, $\ell=1,2,\dots$; $s\in R_1$. Пусть выполнены условия I и 2. Тогда для оператора

$$M_{\ell,\sigma}=\partial^{\ell}_t P^{(\sigma)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})-P^{(\sigma)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})\partial^{\ell}_t \tag{I.9}$$

справедлива оценка

$$\|M_{\ell,\sigma}[v]\|_{s,\alpha,\beta}\le C\left\{\sum_{j=0}^{\ell}\|\partial^{j}_t v\|_{s+\sigma-1,\alpha,\beta}+\sum_{j=1}^{\ell}\|\partial^{\ell-j}_t v\|_{s+\sigma+\delta j,\alpha,\beta}\right\}. \tag{I.10}$$

Постоянная $C>0$ не зависит от v .

Теорема 2. Пусть $P^{(\sigma)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})$ - в.п.д.о. с символом $\lambda(t,\xi,\eta)\in S^{\sigma,q}_{1,\delta}$, $\sigma\ge q>1$; $v(x,t)\in H^{s+q\ell+\sigma,q}_{\alpha,\beta}(R^+_n)$, $s+q\ell+\sigma\ge 1$, $\ell=1,2,\dots$. Пусть выполнены условия I,2. Тогда при $\delta\le q-1$ для оператора $M_{\ell,\sigma}$, определенного в (I.9), справедлива оценка

$$\|M_{\ell,\sigma}[v]\|_{s,\alpha,\beta,q}\le C\,|v|_{s+\ell q+\sigma-1,\alpha,\beta,q} \tag{I.11}$$

с постоянной $C>0$, не зависящей от v .

Следующие две теоремы описывают свойства в.п.д.о. при $t\to+0$ и $t\to+\infty$.

Теорема 3. Пусть $\lambda(t,\xi,\eta)\in S^{\sigma,q}_{1,\delta}$, $\sigma\in R_1$; $v(x,t)\in H^{q+\max\{0;\sigma\},q}_{\alpha,\beta}(R^+_n)$. Тогда при выполнении условия I справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0}P^{(\sigma)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[v]=\lim_{t\to+0}P^{(\sigma)}(+0,\mathcal{D}_x,0)[v(x,t)]=$$

$$=F^{-1}_{\xi\to x}\left[\lambda(+0,\xi,0)F_{x\to\xi}[v(x,+0)]\right].$$

Теорема 4. Пусть $\lambda(t,\xi,\eta)\in S^{\sigma,q}_{1,\delta}$, $\sigma\in R_1$; выполнено условие I и функция $v(x,t)\in C^N(\bar R^+_n)$ $(N>\max(\sigma+1,1))$ такова, что $\mathcal{D}^N_{\alpha,t}v(x,t)\in L_2(R^+_1)$ при почти всех $x\in R_{n-1}$ и, кроме того, $\lim_{t\to+\infty}\mathcal{D}^j_{\alpha,t}v(x,t)=0$, $j=0,1,\dots,N-1$. Тогда при почти всех $x\in R_{n-1}$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to+\infty}P^{(\sigma)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[v(x,t)]=0.$$

Отметим, что приведенные выше теоремы очевидны в случае, когда символ $\lambda(t,\xi,\varrho)$ в.п.д.о. $P^{(\sigma)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})$ есть многочлен по (ξ,ϱ) степени σ.

Замечание I. Условия теорем I-4 можно ослабить, заменив в условии I требование $\alpha(t)\in C^\infty[0,\infty)$ на $\alpha(t)\in C^m[0,\infty)$ при некотором $m>0$.

Замечание 2. Утверждения, аналогичные теоремам I-4, справедливы и для в.п.д.о. с символами из класса $S^{\sigma,q}_{\rho,\delta}$, где $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$, $\delta<\rho\cdot q^{-1}$.

2. Вспомогательные результаты

Мы будем использовать утверждение, представляющее частный случай соответствующего утверждения работы [5].

Лемма 2.I. Пусть $g(\varrho)\in S(R_1)$, $f(\varrho)(1+|\varrho|)^{-s}\in L_2(R_1)$ при некотором действительном s. Тогда справедливы равенства:

$$f\cdot g=F^{-1}_{\tau\to\varrho}\left[F_{\varrho\to\tau}[f]*F_{\varrho\to\tau}[g]\right], \tag{2.1}$$

$$F_{\varrho\to\tau}[f\cdot g]=F_{\varrho\to\tau}[f]*F_{\varrho\to\tau}[g]. \tag{2.2}$$

Операции в (2.I) и (2.2) понимаются в смысле теории обобщенных функций из $S'(R_1)$.

В дальнейшем через $H_s(R_1)$ обозначается известное пространство С.Л. Соболева с нормой $\|\cdot\|_s$.

Лемма 2.2. Пусть функция $\gamma(\tau)$ принадлежит $C^\infty(R_1)$, $\gamma(\tau)=const$ при $\tau<0$ и $\mathcal{D}^N_\tau\gamma(\tau)\in H_{N-\sigma}(R_1)$ при некотором $N\geqslant\sigma$, $\sigma\in R_1$. Пусть $p(\tau,\xi,x)\in C^\infty(R_{n+1})$ и выполняются оценки

$$|\partial^j_x p(\tau,\xi,x)|\leqslant c\left(1+\beta_1(\tau)|\xi|+|\xi|^{1/q}+|x|\right)^{\sigma-j},\quad j=0,1,2\dots, \tag{2.3}$$

где $\beta_1(\tau)\in C^\infty(R_1)$, $\beta_1(\tau)=0$ при $\tau<0$, $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\beta_1(\tau)=\lim\limits_{\tau\to+\infty}\partial_\tau\beta_1(\tau)=0$.

Тогда для любой функции $w(\tau)\in S(R_1)$ справедливо равенство

$$\gamma(\tau)F^{-1}_{x\to\tau}\left[p(\tau,\xi,x)F_{\tau\to x}[w]\right]-F^{-1}_{x\to\tau}\left[p(\tau,\xi,x)F_{x\to\tau}[\gamma\cdot w]\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}F^{-1}_{x\to\tau}\left[p_i(\tau,\xi,x)F_{\tau\to x}[\mathcal{D}^i_\tau\gamma(\tau)\cdot w]\right]+$$

$$+F^{-1}_{x\to\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty}g_N(\tau,\xi,x-y,y)F_{\tau\to(x-y)}\left[\mathcal{D}^N_\tau\gamma\right]\cdot F_{\tau\to y}[w]dy\right], \tag{2.4}$$

$$p_i(\tau,\xi,x)=\frac{(-1)^i}{i!}\partial^i_x p(\tau,\xi,x),\quad i=1,2,\dots,N, \tag{2.5}$$

$$g_N(\tau,\xi,x-y,y) = N\int_0^1 P_N(\tau,\xi,x-\theta(x-y))(1-\theta)^{N-1}d\theta. \qquad (2.6)$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\tilde{w}(y) = F_{\tau\to y}[w],\ \tilde{\gamma}_j(x) = F_{\tau\to x}[\mathcal{D}_\tau^j \gamma],\quad j=0,1,\dots,N. \qquad (2.7)$$

Пользуясь формулой Тейлора, получим с учетом обозначений (2.5),(2.6) равенство

$$P(\tau,\xi,y) = p(\tau,\xi,x+y) + \sum_{i=1}^{N-1} p_i(\tau,\xi,x+y)x^i + g_N(\tau,\xi,x,y)x^N. \qquad (2.8)$$

Из (2.8) с помощью несложных выкладок выводим для любой функции $\psi(x)\in S(R_1)$ равенство

$$(\tilde{\gamma} * (p(\tau,\xi,x)\tilde{w}), \psi(x)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \lim_{K\to\infty} (\tilde{\gamma}_i(x)\cdot\tilde{w}(y),\ \eta_K(x,y)\psi(x+y)p_i(\tau,\xi,x+y)) +$$

$$+ \lim_{K\to\infty} (\tilde{\gamma}_N(x)\cdot\tilde{w}(y),\ \eta_K(x,y)\psi(x+y)g_N(\tau,\xi,x,y)), \qquad (2.9)$$

где $\eta_K(x,y)\to 1$ в R_1 в смысле книги [6].

Таким образом, справедлива формула

$$\tilde{\gamma}*(p\tilde{w}) - p\tilde{\gamma}*\tilde{w} = \sum_{i=1}^{N-1} p_i(\tau,\xi,x)\tilde{\gamma}_i(x)*\tilde{w}(x) + R_N(\tilde{\gamma}_N,\tilde{w}), \qquad (2.10)$$

если пределы в правой части (2.9) существуют и не зависят от выбора последовательности $\{\eta_K\}$ (см. [6]). Здесь $R_N(\tilde{\gamma}_N,\tilde{w})$ – обобщенная функция, действующая по правилу

$$(R_N(\tilde{\gamma}_N,\tilde{w}),\psi) = \lim_{K\to\infty}\int_{R_1}\int_{R_1}\tilde{\gamma}_N(x-y)\cdot\tilde{w}(y)\eta_K(x-y,y)g_N(\tau,\xi,x-y,y)dy\,\psi(x)dx. \qquad (2.11)$$

Для существования предела в правой части (2.11) достаточно доказать, что

$$\mathcal{F}(x) \equiv \int_{R_1} |\tilde{\gamma}_N(x-y)g_N(\tau,\xi,x-y,y)\tilde{w}(y)|dy \in L_2(R_1). \qquad (2.12)$$

Из (2.3),(2.5) и (2.6) с помощью неравенства Питре выводим оценку

$$\|\mathcal{F}\|_{L_2(R_1)} \le c\left\|\int_{R_1}(1+\beta_1(\tau)|\xi|+|\xi|^{1/q}+|y|)^{\sigma-N}\cdot(1+|x-y|)^{N-\sigma}\cdot|\tilde{\gamma}_N(x-y)|\cdot|\tilde{w}(y)|dy\right\|_{L_2(R_1)}.$$

Используя в правой части последней оценки неравенства Минковского и Коши-Буняковского, приходим к оценке

$$\|\mathcal{F}\|_{L_2(R_1)} \le c\,|\gamma_{0N}|_{N-6} \cdot \|w\|_{6-N+1}. \qquad (2.13)$$

Из (2.13) очевидно вытекает (2.12).

Чтобы доказать теперь формулу (2.10), остается показать, что существуют в S' свертки $\tilde{\gamma}_i * \tilde{w}$, $i=1,2,\dots,N-1$.

Для этого заметим, что из очевидного тождества

$$\mathcal{D}_\tau^i \gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^{\tau_1} \dots \int_{-\infty}^{\tau_{N-i-1}} \mathcal{D}_\eta^N \gamma\, d\eta\, d\tau_{N-i-1} \dots d\tau_1, \quad i=1,2,\dots,N-1,$$

и условий леммы вытекают неравенства

$$|\mathcal{D}_\tau^i \gamma(\tau)| \le c\,(1+|\tau|)^{N-i}, \quad i=1,2,\dots,N-1. \qquad (2.14)$$

В силу леммы 2.1 из (2.14) вытекает существование свертки $\tilde{\gamma}_i * w$.

Перейдем далее к доказательству формулы (2.4). Из (2.14) и леммы 2.1 выводим

$$\gamma(\tau)\, F^{-1}_{x\to\tau}\left[P(\tau,\xi,x)\,\tilde{w}(x)\right] = F^{-1}_{x\to\tau}\left[\tilde{\gamma} * (p\tilde{w})\right], \qquad (2.15)$$

$$F_{\tau\to x}\left[\gamma(\tau)\, w(\tau)\right] = \tilde{\gamma}(x) * \tilde{w}(x). \qquad (2.16)$$

Формула (2.4) легко выводится теперь из (2.15),(2.16) и (2.10).

Л е м м а 2 . 3 . <u>Пусть выполнено условие I и функция</u> $f(t)$ <u>принадлежит</u> $C^K[0,+\infty)$, <u>где</u> $K>0$ – <u>достаточное большое число; пусть</u> $|\partial_t^i f(t)| < \infty$ <u>при всех</u> $t\in[0,+\infty)$. <u>Тогда при</u> $K \ge N \ge \max\limits_{0\le p\le \ell}\{2p+\frac{\ell+p-p}{\nu}\}$ $(p\ge 0,\ \ell>0)$ – <u>действительные числа) конечна величина</u>

$$\sup_{0<t<\infty} |\alpha^{-p}(t)\,(\alpha\partial_t)^N (f(t)\,\alpha^{-\ell}(t))|.$$

Подробное доказательство леммы 2.3 содержится в работе [2] .

В [3] показано, что для функций $u(t)\in C^\ell[0,+\infty)$ справедливо тождество

$$\alpha^\ell(t)\,\partial_t^\ell u(t) = \sum_{i=0}^{\ell} \theta_i^\ell(t)\,\partial_{\alpha,t}^i u(t), \qquad (2.17)$$

где $\partial_{\alpha,t} = \sqrt{\alpha(t)}\,\partial_t \sqrt{\alpha(t)}$, функции $\theta_i^\ell(t)$ строятся по реккурентным формулам

$$\theta_i^{\ell+1}(t) = \theta_{i-1}^\ell(t) + \partial_{\alpha,t}\theta_i^\ell(t) - (\ell+\tfrac{1}{2})\,\partial_t\alpha(t), \quad 1\le i\le \ell,$$

$$\theta_0^{\ell+1}(t) = \partial_{\alpha,t}\theta_0^\ell(t) - (\ell+\tfrac{1}{2})\,\alpha'(t), \quad \theta_\ell^\ell \equiv 1, \quad \theta_0^1(t) = -\frac{\alpha'(t)}{2}, \qquad (2.18)$$

причем если $\alpha(t)\in C^K[0,\infty)$, то $\theta_i^\ell(t)\in C^{K-\ell}[0,\infty)$.

Л е м м а 2 . 4 . <u>Пусть выполнено условие I и функция</u> $u(t)$ <u>при-</u>

надлежит $C^{\ell+i}[0,\infty)$, ℓ, i – натуральные числа. Тогда справедлива формула

$$\sum_{j=0}^{\ell} (\alpha\partial_t)^i \left[\theta_j^\ell(t)\alpha^{-\ell}(t)\right] \partial_{\alpha,t}^j u = \sum_{j=0}^{\ell}\sum_{i_1=0}^{i} b_{i,i_1,j}(t)\partial_{\alpha,t}^{i_1} \partial_t^j u(t), \tag{2.19}$$

где функции $b_{i,i_1,j}(t)$ зависят лишь от функции $\alpha(t)$ и ее производных до порядка $\ell+i$, причем если $\alpha(t)\in C^\kappa[0,\infty)$ при $\kappa \geqslant \ell+i$, то $b_{i,i_1,j}\in C^{\kappa-\ell-i}[0,\infty)$; функции $\theta_j^\ell(t)$ определены в (2.18).

Следствие 2.1. При выполнении условий леммы 2.4 для $\ell=1$ справедливо тождество

$$\sum_{j=0}^{1} (\alpha\partial_t)^i \left[\theta_j^1(t)\alpha^{-1}(t)\right] \partial_{\alpha,t}^j u = Q_i(t)\partial_t u -$$

$$-\sum_{i_1=1}^{i} c_{i,i_1}\partial_t(\alpha\partial_t)^{i_1-1}\left[\frac{\alpha'(t)}{2}\right] Q_{i-i_1}(t)u(t), \tag{2.20}$$

где функции $Q_i(t)$ определяются по рекуррентным соотношениям:

$$Q_N(t) = Q'_{N-1}(t)\cdot\alpha(t) - Q_{N-1}(t)\cdot\alpha'(t),\quad Q_0(t)\equiv 1,$$

c_{i,i_1} – биномиальные коэффициенты.

Лемма 2.4 и следствие 2.1 доказаны в работе [2].

Лемма 2.5. Пусть $v(x,t)\in H^s_{\alpha,\beta}(R_n^+)$, $s\in R_1$; $b(t)\in C^{[|s|]+1}[0,\infty)$ и $|\partial_t^i b(t)|\leqslant c<\infty$ при всех $t\in[0,\infty)$, $i=1,2,\dots[|s|]+1$. Тогда справедлива оценка $\|b(t)v(x,t)\|_{s,\alpha,\beta}\leqslant c\|v\|_{s,\alpha,\beta}$ с константой $c>0$, не зависящей от v.

Доказательство. При целом неотрицательном s утверждение леммы очевидно. Так как пространство $H^{-s}_{\alpha,\beta}(R_n^+)$ является сопряженным к пространству $H^s_{\alpha,\beta}(R_n^+)$ при $s>0$, то из справедливости утверждения леммы для целых $s\geqslant 0$ стандартным методом выводится его справедливость и при целых отрицательных s. Для того чтобы установить утверждение леммы при любом действительном s, достаточно воспользоваться тем, что пространства $H^s_{\alpha,\beta}(R_n^+)$ образуют интерполяционную шкалу пространств.

Введем функцию

$$\Phi(\tau) = \alpha^{-\frac{1}{2}}(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}, \tag{2.21}$$

где $t=\varphi^{-1}(\tau)$ – функция, обратная к функции

$$\tau=\varphi(t) = \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$$

Лемма 2.6. Пусть выполнено условие I и функция $u(t)$ принадлежит $C_0^\infty(\bar{R}_1^+)$. Обозначим

$$\omega_N(\tau)=\sqrt{\alpha(t)}\,\mathcal{D}_{\alpha,t}^N u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}, \quad N\geq 1+\frac{1}{\gamma}. \tag{2.22}$$

Тогда функции $\mathcal{D}_\tau^j\Phi(\tau)\cdot\omega_N(\tau)$ при $j=0,1,2\ldots$ принадлежат $L_1(R_1)$.

Доказательство. Пусть вначале $j=0$. Воспользуемся представлением из работы [3]:

$$\mathcal{D}_{\alpha,t}^\ell u(t)=\sum_{j=0}^{\ell}\chi_j^\ell(t)\alpha^j(t)\mathcal{D}_t^j u(t),\quad \mathcal{D}_t=\sqrt{-1}\,\partial_t, \tag{2.23}$$

где функции $\chi_i^\ell(t)$ строятся с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{gathered}\chi_j^\kappa(t)=\chi_{j-1}^{\kappa-1}(t)+\alpha(t)\mathcal{D}_t\chi_j^{\kappa-1}+(j+\tfrac{1}{2})\chi_j^{\kappa-1}(t)\cdot\alpha'(t),\ 1\leq\kappa\leq\ell,\\ \chi_0^\kappa(t)=\alpha(t)\mathcal{D}_t\chi_0^{\kappa-1}+\tfrac{1}{2}\mathcal{D}_t\alpha(t)\cdot\chi_0^{\kappa-1},\ \chi_\kappa^\kappa=1,\ \chi_0^1(t)=\tfrac{1}{2}\alpha'(t).\end{gathered} \tag{2.24}$$

Из (2.22) и (2.23) вытекает равенство

$$\Phi(\tau)\omega_N(\tau)=\chi_0^N u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}+\sum_{j=1}^{N}\chi_j^N\alpha^j(t)\mathcal{D}_t^j u\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}. \tag{2.25}$$

Из (2.24) следует, что функция

$$\check{\omega}_N(t)\equiv\sum_{j=1}^{N}\chi_j^N\alpha^{j-1}(t)\mathcal{D}_t^j u(t)$$

непрерывна на $[0,\infty)$ и имеет компактный носитель в $\bar{R}_1^+$. Следовательно, $\check{\omega}_N(t)\in L_2(R_1^+)$, а, значит, $\sqrt{\alpha(t)}\,\check{\omega}_N(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}\in L_2(R_1)$.

Таким образом, функция

$$\sum_{j=1}^{N}\chi_j^N(t)\alpha^j(t)\mathcal{D}_t^j u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}\in L_1(R_1), \tag{2.26}$$

так как она представима в виде произведения двух функций

$\sqrt{\alpha(t)}\,\check{\omega}_N(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}\in L_2(R_1)$ и $\sqrt{\alpha(t)}\,\theta(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}\in L_2(R_1)$, где

функция $\theta(t)\in L_2(R_1^+)$ равна I в окрестности $\operatorname{supp} u$.

Покажем теперь, что $\chi_0^N(t)u(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}\in L_1(R_1)$.

Из рекуррентных соотношений (2.24) находим равенство

$$\chi_0^N(t)u(t)=\alpha(t)\left\{\sum_{j=0}^{N-2}\left(\frac{\alpha'(t)}{2}\right)^j \mathcal{D}_t\chi_0^{N-j-1}(t)+2^{1-N}\frac{(\alpha'(t))^{N-1}}{\alpha(t)}\right\}u(t).$$

Выбрав $N\geqslant 1+\frac{1}{\nu}$ и воспользовавшись условием I, получим оценку

$$|\chi_0^N(t)u(t)|\leqslant C\,|\alpha(t)u(t)|\,.$$

Отсюда и из (2.26) вытекает справедливость утверждения леммы 2.6 при $j=0$.

Для доказательства леммы при $j=1,2,\ldots$ нужно воспользоваться очевидной формулой

$$(\alpha(t)\partial_t)^j(\alpha^{-\frac{1}{2}}(t))=Q_j(t)\cdot\alpha^{-\frac{1}{2}}(t), \tag{2.27}$$

где функции Q_j строятся по рекуррентным формулам:

$$Q_j(t)=Q'_{j-1}(t)\cdot\alpha(t)-\frac{1}{2}\alpha'(t)\cdot Q_{j-1}(t),\quad Q_0(t)\equiv 1. \tag{2.28}$$

С помощью (2.27) и (2,28) устанавливаем оценку

$$|\mathcal{D}_\tau^j\Phi(\tau)\cdot w_N(\tau)|\leqslant C\,|\Phi(\tau)w_N(\tau)|,$$

из которой очевидным образом вытекает утверждение леммы.

Из доказательства леммы 2.6 вытекает

Следствие 2.2. <u>При выполнении условий леммы 2.6 функция $w_N(\tau)$ принадлежит пространству $L_1(R_1)$ при $N\geqslant 1+\frac{1}{\nu}$, кроме того, функция $\mathcal{D}_\tau^j\,\Phi(\tau)\cdot w_N(\tau)$ принадлежит $L_2(R_1)$ для $j=0,1,2\ldots$.</u>

Следствие 2.3. <u>Пусть $N_1\geqslant max\{\frac{1}{\nu},2\}+\frac{1}{2\nu}$, выполнено условие I и $u(t)\in C_0^\infty(\overline{R}_1^+)$. Тогда функция $\mathcal{D}_\tau^{N_1}\Phi(\tau)$ принадлежит пространству $L_1(R_1)$.</u>

Для доказательства достаточно воспользоваться леммой 2.3 при $f(t)\equiv 1$, $p=1$, $\ell=\frac{1}{2}$, $N=N_1$ и условием I.

Лемма 2.7. <u>Пусть выполнено условие I и символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ в.п.д.о. $P^{(6)}$ принадлежит $S_{1,\delta}^{\sigma,q}$. Тогда для любой функции $v(x,t)\in C_0^\infty(R_n)$ справедливо равенство</u>

$$\lim_{t\to+0}P^{(6)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[v]=F^{-1}_{\xi\to x}\left[\lambda(+0,\xi,0)F_{x\to\xi}[v(x,+0)]\right]+$$

$$+\lim_{t\to+0}G_N(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[\mathcal{D}_{\alpha,t}^N v], \tag{2.29}$$

<u>где $N>0$ - целое число, в.п.д.о. $G_N(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})$ построен по символу</u>

$$g_N(t,\xi,\eta)=\frac{(-1)^N}{(N-1)!}\int_0^1 \partial_z^N \lambda(t,\xi,z)\Big|_{z=\theta\eta}(1-\theta)^{N-1}d\theta. \qquad (2.30)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Воспользовавшись формулой Тейлора, получим представление

$$\lambda(t,\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{j!}\partial_z^j\lambda(t,\xi,z)\Big|_{z=0}\cdot\eta^j+g_N(t,\xi,\eta)\eta^N. \qquad (2.31)$$

Учитывая, что $\mathscr{D}^j_{\alpha,t}\,\sigma(x,t)\big|_{t=0}=0$ при $j=1,2,\dots,N$ $(\sigma(x,t)\in C_0^\infty(R_n))$ и подставляя в левую часть (2.29) формулу (2.31), приходим к утверждению леммы.

Л е м м а 2 . 8 . Пусть выполнены условия леммы 2.7 и $N\geqslant\frac{1}{2\nu}+ +max\{\frac{1}{\nu},2\}$, $N>max\{\sigma+1,\ 1+\frac{1}{\nu}\}$. Тогда при каждом $\xi\in R_{n-1}$ функция

$$f_j(t,\xi,\eta)\equiv\partial_\eta^j g_N(t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}\left[\mathscr{D}_\tau^j\Phi(\tau)\cdot\omega_N(\tau)\right],\ j=0,1,\dots,N_1-1 \qquad (2.32)$$

принадлежит (по η) пространству $L_1(R_1)$ и является ограниченной по $t\in[0,\infty)$. Функции $\Phi(\tau)$, $\omega_N(\tau)$ и $g_N(t,\xi,\eta)$ определены соответственно формулами (2.21), (2.22) и (2.30).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как $\lambda(t,\xi,\eta)\in S^{\sigma,q}_{1,\delta}$, то из (2.30) выводим оценку

$$|\eta\partial_\eta^j g_N(t,\xi,\eta)|\leqslant c\int_0^{|\eta|}\left(1+\beta(t)|\xi|+|\xi|^{1/q}+|z|\right)^{\sigma-N-j}dz\leqslant c<\infty, \qquad (2.33)$$

где постоянная $c>0$ не зависит от t,η,ξ. Так как функция $g_N(t,\xi,\eta)$ непрерывная по η, то из (2.33) следует, что $\partial_\eta^j g_N(t,\xi,\eta)\in L_2(R_1)$ по η ($j=0,1,\dots$) при всех $\xi\in R_{n-1}$, $t\in[0,+\infty)$. Из следствия 2.2 вытекает, что функция $\mathscr{D}_\tau^j\Phi(\tau)\cdot\omega_N(\tau)$ принадлежит $L_2(R_1)$. Таким образом, функция $f_j(t,\xi,\eta)$, определенная в (2.32), является произведением двух функций, принадлежащих $L_2(R_1)$, т.е $f_j(t,\xi,\eta)$ принадлежит $L_1(R_1)$ (по η).

Л е м м а 2 . 9 . Пусть выполнены условия леммы 2.8. Тогда для любой функции $\sigma(x,t)\in C_0^\infty(R_n)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0}G_N(t,\mathscr{D}_x,\mathscr{D}_{\alpha,t})\left[\mathscr{D}^N_{\alpha,t}\,\sigma(x,t)\right]=0, \qquad (2.34)$$

где символ $g_N(t,\xi,\eta)$ в.п.д.о. G_N определен в (2.30).

Доказательство. Повторяя рассуждения леммы 2.2, получим равенство

$$G_N(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[\mathcal{D}^N_{\alpha,t}v] = \sum_{j=0}^{N_1-1}\Big\{F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\eta\to\tau}[f_j(t,\xi,\eta)] +$$

$$+F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\eta\to\tau}\Big[\int_{R_1}F_{\tau\to(\eta-y)}[\mathcal{D}^{N_1}_\tau\Phi]\cdot g_{N,N_1}(t,\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[w_N]dy\Big]\Big\}\Big|_{\tau=\varphi(t)}, \qquad (2.35)$$

где функции $\Phi(\tau), w_N(\tau), f_j(t,\xi,\eta)$ определены соответственно формулами (2.2I); (2.22),(2.32), причем $u(\xi,t)=F_{x\to\xi}[v(x,t)]$,

$$g_{N,N_1}(t,\xi,\eta-y,y) = \frac{(-1)^N}{(N-1)!}\int_0^1 \partial_z^{N_1}g_N(t,\xi,z)\big|_{z=\eta+\theta(y-\eta)}(1-\theta)^{N_1-1}d\theta. \qquad (2.36)$$

Используя лемму 2.8 и теорему Римана-Лебега [7], получим равенство

$$\lim_{t\to+0}G_N(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[\mathcal{D}^N_{\alpha,t}v] =$$

$$= \lim_{\tau\to+\infty}F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\eta\to\tau}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}F_{\tau\to(\eta-y)}[\mathcal{D}^{N_1}_\tau\Phi]g_{N,N_1}(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[w_N]dy\Big]. \qquad (2.37)$$

Из (2.37) вытекает, что для доказательства леммы 2.9 достаточно показать, что функция

$$f_{N_1}(\tau,\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}F_{\tau\to(\eta-y)}[\mathcal{D}^{N_1}_\tau\Phi]g_{N,N_1}(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[w_N]dy \qquad (2.38)$$

принадлежит (по η) пространству $L_1(R_1)$) при всех $\xi\in R_{n-1}$, $\tau\in R_1$.

Из (2.36) вытекает ограниченность

$$|g_{N,N_1}(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta-y,y)|\le C_1<\infty$$

при $N\geqslant 6$ и всех $\tau\in R_1$, $\xi\in R_{n-1}$, $\eta\in R_1$, $y\in R_1$.

Это позволяет с помощью неравенства Минковского из (2.38) вывести оценку

$$\|f_{N_1}(\tau,\xi,\eta)\|_{L_1(R_1)}\le C_1\|F_{\tau\to\eta}[\mathcal{D}^{N_1}_\tau\Phi(\tau)]\|_{L_1(R_1)}\times\|F_{\tau\to y}[w_N(\tau)]\|_{L_1(R_1)}. \qquad (2.39)$$

Заметим, что $F_{\tau\to y}[w_N(\tau)]\in L_1(R_1)$, поскольку из следствия 2.2 вытекает, что

$$\lim_{|\eta|\to\infty} \eta^2 F_{\tau\to\eta}[w_N(\tau)] = \lim_{|\eta|\to\infty} F_\alpha[\mathcal{D}_{\alpha,t}^{N+2} u(t)](\eta)=0,$$

так как $w_N(\tau)\in L_1(R_1)$ при $N\geq 1+\frac{1}{\nu}$.

Аналогично с помощью следствия 2.3 устанавливается, что

$$F_{\tau\to\eta}[\mathcal{D}_\tau^{N_1}\Phi(\tau)]\in L_1(R_1) \qquad \text{при } N\geq max\{\tfrac{1}{\nu},2\}+\tfrac{1}{2\nu}.$$

Лемма доказана.

3. Доказательство основных теорем

Установленные леммы 2.I- 2.5 позволяют доказать утверждение теоремы I. Для простоты изложения ограничимся случаем $\ell=1$ и $s=0$.

Из (2.I7) для $\ell=1$ получим

$$\partial_t u(t)=\alpha^{-1}(t)\Big(\partial_{\alpha,t}u(t)-\frac{\alpha'(t)}{2}u(t)\Big). \tag{3.I}$$

Из (3.I), учитывая (I.9), выводим равенство

$$M_{1,6}[v]=P^{(6)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})\Big[\frac{\alpha'}{2\alpha}v\Big]-\frac{\alpha'}{2\alpha}P^{(6)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[v]+$$

$$+\frac{1}{\alpha(t)}\partial_{\alpha,t}P^{(6)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[v]-P^{(6)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})\Big[\frac{1}{\alpha(t)}\partial_{\alpha,t}v\Big]. \tag{3.2}$$

Воспользовавшись в правой части (3.2) очевидным равенством

$$\partial_{\alpha,t}P^{(6)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[v]=P^{(6)}[\partial_{\alpha,t}v]+P_1(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[v],$$

где P_1 - в.п.д.о. с символом $\lambda_1(t,\xi,\eta)=\alpha(t)\partial_t\lambda(t,\xi,\eta)$, получим равенство

$$M_{1,6}[v]=\Big(P^{(6)}\Big[\frac{\alpha'}{2\alpha}v\Big]-\frac{\alpha'}{2\alpha}P^{(6)}[v]\Big)+P_1[v]+$$

$$+\Big(\frac{1}{\alpha(t)}P^{(6)}[\partial_{\alpha,t}v]-P^{(6)}\Big[\frac{1}{\alpha}\partial_{\alpha,t}v\Big]\Big). \tag{3.3}$$

Таким образом, для того чтобы прокоммутировать в.п.д.о. $P^{(6)}$ с оператором ∂_t, достаточно этот в.п.д.о. прокоммутировать с функциями $\alpha^{-1}(t)$ и $\frac{1}{2}\alpha'(t)\alpha^{-1}(t)$.

Из леммы 2.3 вытекает, что функции

$$\gamma_1(\tau)=\alpha^{-1}(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)},\quad \gamma_0(\tau)=\frac{1}{2}\alpha'(t)\alpha^{-1}(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)} \tag{3.4}$$

удовлетворяют условиям леммы 2.2.

С помощью леммы 2.2 и формул (I.2) и (I.4) легко получаем равенство

$$M_{1,\sigma}[v] = P_1[v] + R_{N,\sigma}[v] +$$

$$+\sum_{i=1}^{N-1} F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_{\alpha}\Big[\lambda_i(t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_{\tau\to\eta}\Big[\sum_{j=0}^{1}(-1)^{j+1}\mathcal{D}^i_\tau \gamma_j(\tau)\cdot(\partial^j_{\alpha,t} v)_\alpha(x,\tau)\Big]\Big], \tag{3.5}$$

где

$$R_{N,\sigma}[v] = F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_{\alpha}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} g_N(t,\xi,\eta-z,z)\sum_{j=0}^{1}(-1)^{j+1}\times$$

$$\times F_{\tau\to(\eta-z)}\big[\mathcal{D}^N_\tau \gamma_j(\tau)\big]\cdot F_{\tau\to z} F_{x\to\xi}\big[(\partial^j_{\alpha,t} v)_\alpha(x,\tau)\big]dz\Big], \tag{3.6}$$

где функции λ_i и g_N определены соответственно в (2.5) и (2.6) с заменой $\rho(t,\xi,x)$ на $\lambda(t,\xi,\eta)$.

Так как, по условию, $|\alpha(t)| \le C < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$ и $\tilde{\lambda}_1(t,\xi,\eta) = \partial_t \lambda(t,\xi,\eta) \in S^{\sigma+\delta,q}_{1,\delta}$, то из предложения 2 вытекает оценка

$$\|P_1(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[v]\|_{L_2(R^+_n)} \le C\|v\|_{\sigma+\delta,\alpha,\beta} \tag{3.7}$$

с постоянной $C>0$, не зависящей от v.

По формуле (I.2) получим с учетом (3.4) и следствия 2.I равенство

$$F_{\tau\to\eta}\Big[\sum_{j=0}^{1}(-1)^{j+1}\mathcal{D}^i_\tau \gamma_j(\tau)(\partial^j_{\alpha,t} v)_\alpha(x,\tau)\Big] =$$

$$= F_\alpha\Big[Q_i(t)\partial_t v - \sum_{i_1=1}^{i} C_{i,i_1}\partial_t(\alpha\partial_t)^{i_1-1}\Big[\frac{\alpha'}{2}\Big]\cdot Q_{i-i_1}(t)v\Big].$$

Следовательно, так как $\lambda_i(t,\xi,\eta)$ принадлежат $S^{\sigma-i,q}_{1,\delta}$, то из леммы 2.5 и предложения 2 вытекает оценка

$$\Big\|\sum_{i=1}^{N-1} F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_{\alpha}\Big[\lambda_i(t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_{\tau\to\eta}\Big[\sum_{j=0}^{1}(-1)^{j+1}\mathcal{D}^i_\tau \gamma_j\cdot(\partial^j_{\alpha,t} v)_\alpha\Big]\Big]\Big\|_{L_2(R^+_n)} \le$$

$$\le C\sum_{j=0}^{1}\|\partial^j_t v\|_{\sigma-1,\alpha,\beta}. \tag{3.8}$$

Из (2.5),(3.7) и (3.8) следует, что для доказательства теоремы I в случае $\ell=1$, $s=0$ достаточно получить оценку

$$\|R_{N,\sigma}[v]\|_{L_2(R^+_n)} \le C\|v\|_{\sigma-1,\alpha,\beta}. \tag{3.9}$$

Из (3.6) вытекает, что для доказательства оценки (3.9) достаточно оценить при всех $\xi \in R_{n-1}$ норму в $L_2(R^+_1)$ выражения

$$K_{N,\sigma}[u(\xi,t)]=F_\alpha^{-1}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} g_N(t,\xi,\eta-z,z)F_{\tau\to(\eta-z)}[\gamma]\cdot F_\alpha[u]dz\Big], \tag{3.10}$$

причем в (3.10) функция $\gamma(\tau)$ равна либо $\mathcal{D}_\tau^N\gamma_0(\tau)$, либо $\mathcal{D}_\tau^N\gamma_1(\tau)$, а $u(\xi,t)$ равна либо $F_{x\to\xi}[v]$, $F_{x\to\xi}[\partial_{\alpha,t}v(x,t)]$.

Используя (1.4), выводим равенство

$$\|K_{N,\sigma}[u(\xi,t)]\|_{L_2(R_1^+)}=$$

$$=\|F^{-1}_{\eta\to\tau}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} g_N(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta-z,z)F_{\tau\to(\eta-z)}[\gamma]\cdot F_\alpha[u](z)dz\|_{L_2(R_1)}. \tag{3.11}$$

Умножим и разделим подынтегральное выражение в правой части (3.11) на

$$(1+|\xi|^{1/q}+|z|)^{N-\sigma-k\delta}\cdot\left(1+(\eta-z)^2\right)^{\frac{1}{2}([\sigma-N]-1-m)},$$

где натуральные числа N,k,m будут выбраны ниже. Выбрав m так, чтобы число $m+1+[N-\sigma]$ было четным, и обозначив

$$\tau_N(\tau)=(1+\mathcal{D}_\tau)^{[N-\sigma]+m+1}\gamma(\tau);\ \check{u}(\xi,z)=(1+|\xi|^{1/q}+|z|)^{k\delta+\sigma-N}F_\alpha[u(\xi,t)], \tag{3.12}$$

из (3.11) выводим равенство

$$\|K_{N,\sigma}[u(\xi,t)]\|_{L_2(R_1^+)}=$$

$$=\|F^{-1}_{\eta\to\tau}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} P(\tau,\xi,\eta,z)F_{\tau\to(\eta-z)}[\tau_N]\cdot\check{u}_N(\xi,z)dz\|_{L_2(R_1)}, \tag{3.13}$$

где

$$P(\tau,\xi,\eta,z)=g_N(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta-z,z)(1+|\xi|^{1/q}+|z|)^{N-\sigma-k\delta}(1+(\eta-z)^2)^{\frac{[\sigma-N]-1-m}{2}}. \tag{3.14}$$

Воспользовавшись очевидным тождеством

$$\partial_\tau^j g_N(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta-z,z)=(\alpha\partial_t)^j[g_N(t,\xi,\eta-z,z)]\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)},$$

получим с помощью (1.6) и неравенства Питре оценки

$$|\partial_\tau^j\partial_\eta^i P(\tau,\xi,\eta,z)|\le C(1+|\eta-z|)^{-i}, \tag{3.15}$$

где $0\le i\le m$, $0\le j\le k$, постоянная $C>0$ не зависит от τ,ξ,η,z .

Из (3.13) с помощью неравенства Минковского находим оценку

$$\|K_{N,\sigma}[u]\|_{L_2(R_1^+)}\leq$$

$$\leq c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|F^{-1}_{\eta\to\tau}\left[p(\tau,\xi,\eta,z)F_{\tau\to(\eta-z)}[z_N(\tau)]\right]\|_{L_2(R_1)}\cdot\check{u}(\xi,z)dz. \tag{3.16}$$

Для того чтобы продолжить оценку (3.16), установим неравенство

$$\|F^{-1}_{\eta\to\tau}\left[p(\tau,\xi,\eta,z)F_{\tau\to(\eta-z)}[z_N(\tau)]\right]\|_{L_2(R_1)}\leq c\,\|z_N(\tau)\|_{L_2(R_1)} \tag{3.17}$$

с константой $c>0$, не зависящей от ξ, z.

I°. Предположим вначале, что $p(\tau,\xi,\eta,z)=0$ при $|\tau-a|>A$, где $a\in R_1$, $A>0$, и обозначим

$$f(\tau,\xi,z)=F^{-1}_{\eta\to\tau}\left[p(\tau,\xi,\eta,z)F_{\tau\to(\eta-z)}[z_N(\tau)]\right]. \tag{3.18}$$

Применяя к обеим частям равенства (3.18) преобразование Фурье $F_{\tau\to\eta}$, получаем

$$\tilde f(\eta,\xi,z)=F_{\tau\to\eta}\left[f(\tau,\xi,z)\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde p(\eta-z_1,\xi,z_1,z)\,\tilde z_N(z_1-z)dz_1, \tag{3.19}$$

где

$$\tilde p(\eta,\xi,z_1,z)=F_{\tau\to\eta}\left[p(\tau,\xi,z_1,z)\right],\quad \tilde z_N(z)=F_{\tau\to z}\left[z_N(\tau)\right]. \tag{3.20}$$

С помощью оценок (3.15) далее находим

$$|\tilde p(\eta-z_1,\xi,z_1,z)|\leq c\,(1+|\eta-z_1|)^{-2}, \tag{3.21}$$

где постоянная $c>0$ не зависит от η,ξ,z_1,z.

Из (3.21), (3.18) и (3.19) очевидным образом выводится оценка (3.17).

2°. Докажем теперь оценку (3.17) в общем случае.

Выберем функцию $\psi(\tau)\in C_0^{\infty}(R_1)$ так, чтобы $\psi(\tau)=1$ при $|\tau|<2$. Тогда, по доказанному выше, при любом $y\in R_1$ справедлива оценка

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi(\tau-y)F^{-1}_{\eta\to\tau}\left[p(\tau,\xi,\eta,z)F_{\tau\to(\eta-z)}[\psi(\tau-y)z_N(\tau)]\right]|^2d\tau\leq$$

$$\leq c\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi(\tau-y)\,z_N(\tau)|^2d\tau, \tag{3.22}$$

где $c>0$ не зависит от ξ, z, η.

Обозначим

$$w_y^1(\tau)=\psi(\tau-y)z_N(\tau),\quad w_y^2(\tau)=(1-\psi(\tau-y))z_N(\tau). \tag{3.23}$$

Из (3.22) находим

$$\int\limits_{|\tau-y|<1} |F^{-1}_{\eta\to\tau}[\rho(\tau,\xi,\eta,z)F_{\tau\to(\eta-z)}[w_y^1(\tau)]]|^2 d\tau \leqslant$$
$$\leqslant c\int\limits_{-\infty}^{\infty} |w_y^1(\tau)|^2 d\tau. \tag{3.24}$$

По построению, $w_y^2(\tau)=0$ при $|\tau-y|<2$. Если обозначить

$$H(\tau,\xi,z_1,z)=F_{\eta\to z_1}[\rho(\tau,\xi,\eta,z)],$$

то

$$F^{-1}_{\eta\to\tau}[\rho(\tau,\xi,\eta,z)F_{\tau\to(\eta-z)}[w_y^2(\tau)]]=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\tau,\xi,\tau-z_1,z)\,w_y^2(z_1)e^{-iz_1z}dz_1. \tag{3.25}$$

Поскольку

$$z_1^\ell H(\tau,\xi,z_1,z)=F^{-1}_{\eta\to z_1}[(-\mathcal{D}_\eta)^\ell \rho(\tau,\xi,\eta,z)],$$

то при $1<\ell\leqslant m$ из (3.15) вытекает неравенство

$$|z_1^\ell H(\tau,\xi,z_1,z)|\leqslant C<\infty \tag{3.26}$$

с постоянной $C>0$, не зависящей от τ,ξ,z_1,z.

Выбирая число $m\geqslant 2$, получим из (3.26) оценку

$$|H(\tau,\xi,z_1,z)|\leqslant c(1+|z_1|)^{-2}=ch(z_1),\quad |z_1|>1. \tag{3.27}$$

Из (3.25) и (3.27) находим

$$|F^{-1}_{\eta\to\tau}[\rho(\tau,\xi,\eta,z)F_{\tau\to(\eta-z)}[w_y^2(\tau)]]|\leqslant$$
$$\leqslant c\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau-z_1)|\tau_N(z_1)|dz_1,\quad |\tau-y|<1. \tag{3.28}$$

Из (3.24) и (3.28) легко выводим оценку

$$\int\limits_{|\tau-y|<1} |F^{-1}_{\eta\to\tau}[\rho(\tau,\xi,\eta,z)F_{\tau\to(\eta-z)}[\tau_N(\tau)]]|^2 d\tau\leqslant$$
$$\leqslant c\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\tau_N(\tau)|^2|\psi(\tau-y)|^2+\int\limits_{|\tau-y|<1}|h*\tau_N|^2 d\tau\Big). \tag{3.29}$$

Интегрирование по y неравенства (3.29) приводит к оценке (3.17). Таким образом, оценка (3.17) доказана.

Из (3.12) и леммы 2.3 вытекает, что при достаточно большом $N>0$ функция $\tau_N(\tau)$ принадлежит $L_2(R_1)$. Следовательно, из (3.17) выводим оценку

$$\|F^{-1}_{\eta\to\tau}[P(\tau,\xi,\eta,z)F_{\tau\to(\eta-z)}[\tau_N(\tau)]]\|_{L_2(R_1)}\leqslant c\|\tau_N\|_{L_2(R_1)} \tag{3.30}$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от ξ,z.

Используя (3.30) в правой части (3.16), получим с помощью неравенства Коши-Буняковского оценку

$$\|K_{N,6}[u(\xi,t)]\|_{L_2(R_1^+)} \leq C\|(1+|\xi|^{1/q}+|z|)^{6+K\delta-N+1} F_\alpha[u]\|_{L_2(R_1)}. \quad (3.31)$$

Выберем теперь $N>0$ так, что $K\delta+1-N \leq -2q$, $q>1$. Тогда в случае $6 \geq 2$ справедлива оценка

$$\|K_{N,6}[u]\|_{L_2(R_1^+)} \leq C\|(1+\beta(t)|\xi|+|\xi|^{1/q}+|z|)^{6-2} F_\alpha[u]\|_{L_2(R_1)}. \quad (3.32)$$

Если же $6<2$, то, выбирая $N>0$ так, чтобы было справедливо неравенство $6+K\delta+1-N \leq q(6-2)$, и воспользовавшись очевидной при $q>1$ оценкой

$$(1+|\xi|^{1/q}+|z|)^q \geq C(1+|\xi|+|\xi|^{1/q}+|z|),$$

получим неравенство

$$(1+|\xi|^{1/q}+|z|)^{(6+K\delta+1-N)} \leq C_1(1+|\xi|+|\xi|^{1/q}+|z|)^{6-2} \leq$$

$$\leq C_2(1+\beta(t)|\xi|+|\xi|^{1/q}+|z|)^{6-2}$$

с постоянной $C_2>0$, не зависящей от t,ξ,z.

Применяя последнее неравенство в правой части (3.31), устанавливаем справедливость оценки (3.32) и в случае $6<2$.

Из (3.10) и (3.32) выводим оценку (3.9).

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся очевидным тождеством

$$\partial_t^{\ell_1} M_{\ell,6}[v] = M_{\ell+\ell_1,6}[v] - M_{\ell_1,6}[\partial_t^{\ell} v].$$

Используя теорему I, получим при $6 \leq q-1$ оценки

$$\|\partial_t^{\ell_1} M_{\ell,6}[v]\|_{s-q\ell_1,\alpha,\beta} \leq C\sum_{i=0}^{\ell+\ell_1}\|\partial_t^i v\|_{s-q\ell_1+6-1,\alpha,\beta} \quad (s-q\ell_1 \geq 0).$$

Суммируя эти оценки по $0 \leq \ell_1 \leq [s/q]$, получим справедливость утверждения теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Утверждение теоремы 3 для функций $v(x,t) \in C_0^\infty(R_n)$ немедленно вытекает из лемм 2.7 и 2.9. В общем случае утверждение теоремы вытекает из того, что множество функций $C_0^\infty(R_n)$ плотно в пространстве $H_{\alpha,\beta}^{q+\max\{0,6\},q}(R_n^+)$.

Доказательство теоремы 4. Из условий теоремы так же, как при доказательстве леммы 2.7, выводим равенство

$$\lim_{t\to+\infty} P^{(6)}(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[v] = \lim_{t\to+\infty} G_N(t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[\mathcal{D}^N_{\alpha,t} v], \tag{3.33}$$

где в.п.д.о. G_N построен по символу $g_N(t,\xi,\eta)$, определенному формулой (2.30).

Из (2.33) для $j=0$ следует, что $g_N(t,\xi,\eta)\in L_2(R_1)$ по η при каждом $\xi\in R_{n-1}$ и эта функция ограничена по $t\in[0,\infty)$ $(N>max\{\sigma+l,1\})$.

Это означает, что функция

$$\tilde{f}_N(t,\xi,\eta)=g_N(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\mathcal{D}^N_{\alpha,t}v] \tag{3.34}$$

принадлежит $L_1(R_1)$ по η и ограничена по t при всех $\xi\in R_{n-1}$. Так как при $t\to+\infty$ величина $\tau=\varphi(t)\to-\infty$, то с помощью теоремы Римана-Лебега устанавливаем равенство

$$\lim_{t\to+\infty} G_N(t,\mathcal{D}x,\mathcal{D}_{\alpha,t})[\mathcal{D}^N_{\alpha,t}v] = \lim_{\tau\to-\infty} F^{-1}_{\eta\to\tau}F^{-1}_{\xi\to x}[\tilde{f}_N(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]=0.$$

Используя последнее равенство в правой части равенства (3.33), получаем справедливость утверждения теоремы 4.

Литература

1. Баев А.Д., Глушко В.П. Весовые псевдодифференциальные операторы в теории эллиптических краевых задач с вырождением.- В кн.: Теоремы вложения и их приложения к задачам математической физики (Труды семинара С.Л. Соболева), Новосибирск, 1983, № 1, с. 5-29.
2. Баев А.Д. Пространства типа Соболева-Слободецкого с весом и весовые псевдодифференциальные операторы.- Деп. ВИНИТИ, № 4209-82, Деп.- 39 с.
3. Глушко В.П., Богатов М.И. Пространства типа С.Л. Соболева дробного порядка с весом и их свойства.- Деп. ВИНИТИ № 3239-79. Деп.- 38 с.
4. Глушко В.П. Пространства функций с дробными весовыми производными и граничные задачи переменного порядка.- В сб.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Новосибирск, 1981, с. 46-53.
5. Глушко В.П. Об одном критерии существования свертки обобщенных функций.- Деп. ВИНИТИ № 5721-82. Деп.- 12 с.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1981.- 512 с.
7. Грушин В.В. Псевдодифференциальные операторы.- М.: Изд. Моск. ин-та электронного машиностроения, 1975.- 107 с.