УДК 517.954;517.984

ОБ ИНДЕКСАХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ. I

В. С. Белоносов (Новосибирск)

Введение

Рассмотрим в банаховом пространстве $\mathcal{L}$ замкнутый линейный оператор A с плотной областью определения $\mathcal{D}(A)$. В большей части данной работы предполагается, что для некоторых вещественных γ и θ ($\pi/2<\theta<\pi$) выполнено следующее условие $(\mathfrak{A})$: резольвента $R(A,\lambda)=(A-\lambda I)^{-1}$ оператора A существует и величина $\|\lambda R(A,\lambda)\|$ равномерно по λ ограничена в секторе $|\arg(\lambda-\gamma)|\leq\theta$. Это условие гарантирует, в частности, однозначную разрешимость задачи Коши

$$\frac{du}{dt}=Au(t),\ t>0;\quad u(0)=u_0 \tag{1}$$

по любым начальным данным из $\mathcal{L}$ (см. [1,2]). Нас интересует зависимость между спектральными свойствами оператора A и асимптотическим поведением решений задачи (1) при $t\to\infty$. Введем в связи с этим числовую характеристику множества начальных возмущений, по отношению к которым нулевое решение задачи (1) неустойчиво.

Определение. Пусть существуют подпространство $\mathfrak{M}\subset\mathcal{L}$ и константа $C>0$ такие, что при всех $u_0\in\mathfrak{M}$, $t>0$ решение задачи (1) подчинено неравенству $\|u(t)\|\leq C\|u_0\|$; кроме того, для $u_0\in\mathcal{L}\setminus\mathfrak{M}$ решение задачи (1) неограничено при $t\to\infty$. В этом случае коразмерность $\mathfrak{M}$ будем называть индексом неустойчивости оператора A и обозначать через $\varkappa(A)$. Если $\varkappa(A)=0$, то оператор A назовем устойчивым.

Аналогичное понятие, но в иной форме и под названием "индекс устойчивости" было введено еще Лихтенштейном (см. по этому поводу [3, гл. III, § 38]). Термин "индекс неустойчивости" представляется нам более точным, так как величина $\varkappa(A)$, если она не равна нулю, свидетельствует скорее о степени неустойчивости, нежели об устойчивости нулевого решения задачи (1).

Понятно, что определение индекса неустойчивости имеет смысл не для

всякого оператора. Перечислим несколько типичных случаев, когда индексы неустойчивости заведомо существуют.

Допустим, что спектр A состоит из двух частей σ_+ и σ_-, где σ_+ лежит внутри правой, а σ_- - внутри левой полуплоскости комплексной плоскости. В силу условия $(\mathfrak{A})$ множество σ_+ будет ограничено. Пусть Γ - кусочно-гладкий замкнутый контур, расположенный в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, содержащий внутри себя σ_+ и ориентированный в положительном (против часовой стрелки) направлении. Рассмотрим спектральные проекторы

$$P_+ = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(A,\lambda)d\lambda, \quad P_- = I - P_+, \tag{2}$$

где I - тождественный оператор. Пространство $\mathcal{B}$ разлагается в прямую сумму двух подпространств $\mathcal{B}_+ = P_+\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_- = P_-\mathcal{B}$. Известно [4,5], что $\mathcal{B}_+$ содержится в $\mathcal{D}(A)$ и инвариантно относительно A. Сужение $A_+ = A|\mathcal{B}_+$ есть ограниченный оператор в $\mathcal{B}_+$, спектр которого совпадает с σ_+. Множество $P_-\mathcal{D}(A)$ плотно в $\mathcal{B}_-$ и сужение $A_- = A|P_-\mathcal{D}(A)$ есть замкнутый оператор, действующий в $\mathcal{B}_-$, спектр которого совпадает с σ_-. Задача (I) сводится теперь к отысканию функций $u_+(t) = P_+u(t)$ и $u_-(t) = P_-u(t)$ таких, что

$$\frac{d}{dt}u_\pm(t) = A_\pm u_\pm(t), \quad u_\pm(0) = P_\pm u_0 .$$

На основании результатов [I,2,6] $u_+(t)$ будет неограничено, если $P_+u_0 \neq 0$, а нулевое решение задачи для $u_-(t)$ асимптотически устойчиво в $\mathcal{B}_-$. Таким образом, $\varkappa(A) = \dim\mathcal{B}_+$.

Такое же рассуждение показывает, что если оператор A имеет дискретный спектр и удовлетворяет условию $(\mathfrak{A})$, то его индекс неустойчивости равен сумме алгебраических кратностей собственных значений, расположенных в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, минус число линейно независимых собственных векторов, отвечающих мнимым собственным числам.

Отметим, наконец, что индекс неустойчивости всегда существует, если A - самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем $(Au,u) \leq a\|u\|^2$, $u \in \mathcal{D}(A)$. Действительно, пусть E_λ - спектральное разложение единицы, порожденное оператором A (см. [4,5]). Для определенности считаем E_λ непрерывным справа. Тогда решение задачи (I) можно записать в виде

$$u(t) = \int_{-\infty}^{a} e^{\lambda t} dE_\lambda u_0 .$$

Положим $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, где $\mathcal{H}_- = E_0\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_+ = (I - E_0)\mathcal{H}$. Если $u_0 \in \mathcal{H}_-$, то

$$\|u(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{0} e^{2\lambda t} d(E_\lambda u_0, u_0) \leq \|u_0\|^2,$$

если же $u_0 \in \mathscr{H}_+$ и $u_0 \neq 0$, то

$$\|u(t)\|^2 = \int_{0}^{a} e^{2\lambda t} d(E_\lambda u_0, u_0) \longrightarrow \infty \qquad (t \to \infty).$$

Следовательно, $\varkappa(A) = \dim \mathscr{H}_+$.

К абстрактному уравнению (I) сводятся многие начально-краевые задачи для эволюционных уравнений с частными производными. При этом A будет дифференциальным оператором в том или ином пространстве функций. Для приложений важно найти простые условия устойчивости таких операторов (иными словами, критерии равенства $\varkappa(A) = 0$), проверка которых не связана с трудоемким и неэффективным вычислением точек спектра. Такого рода критерии найдены пока лишь для ограниченного круга задач. Существенным продвижением являются здесь результаты Т.И. Зеленяка и В.П. Гаевого [7,8] , которыми установлено легко проверяемое необходимое и достаточное условие устойчивости эллиптического дифференциального оператора второго порядка с граничными условиями общего вида.

Проблему отыскания эффективных критериев устойчивости можно рассматривать в рамках более общей задачи о подсчете индексов неустойчивости. В вариационном исчислении и теории Морса эта задача давно известна. Сейчас она вновь становится актуальной в связи с описанием интегральных многообразий для нелинейных параболических систем [9] , потребностями теории управления [I0] и др. Наиболее полно вопрос о подсчете индексов неустойчивости изучен для самосопряженных дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций с одной независимой переменной. Возможность применения здесь вариационных методов позволила М.Морсу [II,I2] выразить индекс неустойчивости такого оператора через число сопряженных точек соответствующей ему вариационной задачи. Близкие результаты, но из других соображений получены М.Г. Крейном [I3,I4] . Недавно теория индексов неустойчивости для одномерных самосопряженных операторов была завершена Т.И. Зеленяком [I5] и В.Я.Беловым [I6] , рассмотревшими не изученные ранее критические случаи.

Поиски аналогов теоремы Морса для несимметричных операторов осложняются невозможностью использования вариационных методов. Это затруднение можно преодолеть, заменяя несимметричный оператор каким-нибудь самосопряженным, имеющим тот же индекс неустойчивости. Конструктивный подход к отысканию такой замены был предложен еще А.М. Ляпуновым при изучении устойчивости несимметричных матриц. Суть его состоит в переходе от несимметричной матрицы

A к эрмитовой матрице U, которая при любом $u \neq 0$ удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{Re}(Au, Uu) > 0. \tag{3}$$

Для построения U достаточно решить матричное уравнение

$$A^*U + UA = V, \tag{4}$$

где A^* и A сопряжены, V - произвольная положительная эрмитова матрица.

Ляпуновым показано, что если A и U связаны условием (3), то из устойчивости одной из них следует устойчивость другой, и наоборот (более того, в § I данной статьи установлено совпадение их индексов неустойчивости). Таким образом, проблема устойчивости несимметричных матриц сводится к подсчету собственных значений эрмитовых. В настоящее время разработаны алгоритмы численной реализации этого подхода на ЭВМ (см. [17]).

Аналогичная теория развита М.Г. Крейном [6] для ограниченных операторов в бесконечномерных пространствах. В нашей работе будут приведены дальнейшие обобщения на случай неограниченных и, в частности, дифференциальных операторов.

Статья состоит из шести параграфов и приложения. В первом параграфе доказано совпадение индексов неустойчивости операторов, связанных условием (3). В § 2 изложена теорема о разрешимости операторных уравнений типа (4). Указанные общие соображения применяются в § 3 к изучению несимметричных дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций с одной независимой переменной. При этом возникают краевые задачи для эллиптических систем в областях с угловыми точками на границе, которые рассмотрены в § 4-6.*) Приложение содержит доказательство вспомогательных утверждений, связанных с проверкой известного условия дополнительности. Формулировки некоторых результатов этой работы анонсированы нами в [15,18] .

§ I. Диссипативные операторы в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой

Ограниченные диссипативные операторы в пространстве с индефинитной метрикой определены и изучены в [6] . Нам потребуется обобщение этого понятия на случай неограниченных операторов. Пусть A - замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, определенный на плотном множестве $\mathcal{D}(A)$, а U - самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ с областью определения $\mathcal{D}(U) \supseteq \mathcal{D}(A)$. Оператор A назовем U-диссипативным,

*) Содержание § 4-6 данной статьи будет опубликовано в одном из следующих выпусков сборника.

если для каждого ненулевого $u \in \mathcal{D}(A)$ справедливо неравенство (3). Подпространство $\mathfrak{M} \subset \mathcal{H}$ назовем U-положительным (отрицательным), если $\mathfrak{M} \cap \mathcal{D}(U)$ плотно в $\mathfrak{M}$ и при каждом ненулевом $u \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{D}(U)$ выражение (Uu, u) положительно (отрицательно).

Основным результатом этого параграфа является следующая

Т е о р е м а I. Если спектр U - диссипативного оператора A не пересекается с мнимой осью и выполнено приведенное во введении условие $(\mathfrak{A})$, то индексы неустойчивости A и U совпадают.

Доказательство этой теоремы разобьем на несколько этапов. Рассмотрим сначала замкнутый оператор T в банаховом пространстве $\mathcal{B}$ с плотной областью определения $\mathcal{D}(T)$.

Л е м м а I. Пусть резольвента $R(T,\lambda)=(T-\lambda I)^{-1}$ оператора T определена на множестве $S=\{|\lambda| \geq \rho,\ \varphi_1 \leq \arg \lambda \leq \varphi_2\}$, причем величина $\|\lambda R(T,\lambda)\|$ на этом множестве равномерно ограничена. Тогда для каждого $u \in \mathcal{B}$

$$\lim_{r \to \infty} r \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{i\varphi} R(T, re^{i\varphi}) u \, d\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) u.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $u \in \mathcal{B}$, $\lambda \in S$ справедливо тождество

$$TR(T,\lambda)u = u + \lambda R(T,\lambda)u. \tag{5}$$

Отсюда и из условий леммы вытекает равномерная ограниченность операторов $TR(T,\lambda)$ для $\lambda \in S$. С другой стороны, при $u \in \mathcal{D}(T)$ и тех же λ имеем

$$\|TR(T,\lambda)u\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda R(T,\lambda)\| \cdot \|Tu\| \longrightarrow 0 \quad (|\lambda| \to \infty).$$

Учитывая это соотношение, плотность множества $\mathcal{D}(T)$ и равномерную ограниченность на S операторов $TR(T,\lambda)$, заключаем, что для каждого $u \in \mathcal{B}$ величина $\|TR(T, re^{i\varphi})u\|$ равномерно относительно $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ стремится к нулю при $r \to \infty$. Положим в (5) $\lambda = re^{i\varphi}$ и проинтегрируем по φ в пределах от φ_1 до φ_2. Устремив затем r к бесконечности, непосредственно получим утверждение леммы.

Вернемся к теореме I. Спектр A не пересекается с мнимой осью, поэтому имеют смысл проекторы P_+ и P_-, определенные формулами (2). Области значений этих проекторов обозначим соответственно через $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$.

Л е м м а 2. При условиях теоремы I подпространство $\mathfrak{M}_+$ будет U-

положительно, а $\mathfrak{M}_-$ - U - отрицательно.

Доказательство. Во введении уже отмечалось, что $\mathfrak{M}_+ \subset \mathcal{D}(A)$, а $\mathfrak{M}_- \cap \mathcal{D}(A)$ плотно в $\mathfrak{M}_-$. Так как $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(U)$, то $\mathfrak{M}_+ \subset \mathcal{D}(U)$, а $\mathfrak{M}_- \cap \mathcal{D}(U)$ плотно в $\mathfrak{M}_-$. Теперь для завершения доказательства леммы достаточно показать, что при ненулевом $u \in \mathcal{D}(U)$

$$\operatorname{Re}(Uu, P_+u - P_-u) > 0. \tag{6}$$

Условия теоремы I гарантируют отсутствие у A точек спектра на мнимой оси и на множестве $\{\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0,\ |\lambda| \geqslant \rho\}$ с некоторым $\rho > 0$. Поэтому в качестве контура Γ в (2) можно взять контур Γ_r, составленный из отрезка $\{\operatorname{Re}\lambda = 0,\ |\lambda| \leqslant r\}$ и полуокружности $\{\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0,\ |\lambda| = r\}$, где $r \geqslant \rho$. В силу (2) имеем

$$2P_+u = -\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_r} R(A,\lambda)u\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r} R(A, i\mu)u\,d\mu - \frac{r}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\varphi} R(A, re^{i\varphi})u\,d\varphi.$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$ и используя лемму I, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(A, i\mu)u\,d\mu = 2P_+u - u = P_+u - P_-u.$$

Таким образом, для $u \in \mathcal{D}(U)$

$$\operatorname{Re}(Uu, P_+u - P_-u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(Uu, R(A, i\mu)u)\,d\mu. \tag{7}$$

Отсюда непосредственно следует (6), так как при $u \neq 0$ и каждом вещественном μ подынтегральное выражение в (7) положительно. Действительно, пусть $R(A, i\mu)u = v$, тогда из U - диссипативности оператора A вытекает

$$\operatorname{Re}(Uu, R(A, i\mu)u) = \operatorname{Re}(Av - i\mu v, Uv) =$$

$$= \operatorname{Re}(Av, Uv) - \operatorname{Re} i\mu(v, Uv) = \operatorname{Re}(Av, Uv) > 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. При условиях теоремы I оператор U имеет нулевое

ядро и ограничен справа, т.е. $(Uu,u)\le c\|u\|^2$ для некоторого c и любого $u\in\mathcal{D}(U)$.

Доказательство. Предположим, что $Uu=0$, $u\ne 0$. Полагая $v=A^{-1}u$, получим $\mathrm{Re}(Av,Uv)=\mathrm{Re}(Uu,v)=0$, а это противоречит U- диссипативности оператора A.

Так как $\mathfrak{M}_+\subset\mathcal{D}(U)$, то оператор UP_+ всюду определен и замкнут, следовательно, он ограничен. На основании леммы 2 выражение (UP_-u,P_-u) неположительно при всех $u\in\mathcal{D}(U)$, поэтому

$$(Uu,u)=(UP_+u,P_+u)+(UP_+u,P_-u)+(P_-u,UP_+u)+$$
$$+(UP_-u,P_-u)\le\|UP_+\|(\|P_+\|+2\|P_-\|)\|u\|^2.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы I. Рассмотрим непрерывную справа спектральную функцию E_λ оператора U, и пусть $\mathcal{H}_+=(I-E_0)\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_-=E_0\mathcal{H}$. В силу леммы 3 подпространство $\mathcal{H}_+$ содержится в $\mathcal{D}(U)$ и является U- положительным, а подпространство $\mathcal{H}_-$ - U- отрицательным. По лемме 2 подпространства $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ обладают по отношению к U точно такими же свойствами, следовательно, $\mathfrak{M}_+\cap\mathcal{H}_-=0$, $\mathfrak{M}_-\cap\mathcal{H}_+=0$. Это означает, что отображения $P_+:\mathcal{H}_+\longrightarrow\mathfrak{M}_+$ и $(I-E_0):\mathfrak{M}_+\to\mathcal{H}_+$ взаимно однозначны. Но тогда $\dim\mathfrak{M}_+=\dim\mathcal{H}_+$. Как было показано во введении, $\dim\mathcal{H}_+=\varkappa(U)$, $\dim\mathfrak{M}_+=\varkappa(A)$. Таким образом, $\varkappa(A)=\varkappa(U)$. Теорема доказана.

Замечание I. В некоторых случаях условие отсутствия у оператора A точек спектра на мнимой оси следует из его U-диссипативности. Так будет, например, если спектр A состоит только из собственных значений. В самом деле, пусть μ вещественно. Предположив, что $Au=i\mu u$, $u\ne 0$, приходим к противоречию $0<\mathrm{Re}(Au,Uu)=\mathrm{Re}\,i\mu(u,Uu)=0$.

Если условие U-диссипативности заменить более сильным ограничением

$$\mathrm{Re}(Au,Uu)\ge\alpha\|u\|^2,\ \alpha>0,\ u\in\mathcal{D}(A), \tag{8}$$

то спектр A в любом случае не пересекается с мнимой осью. Доказательство этого утверждения получается модификацией рассуждений [6, гл.I, лемма 7.I]. Из включения $\mathcal{D}(A)\subseteq\mathcal{D}(U)$ и замкнутости операторов A,U вытекает оценка (см. [2]):

$$\|Uu\|\le c(\|Au\|+\|u\|),\quad u\in\mathcal{D}(A). \tag{9}$$

В силу условия $(\mathfrak{A})$ оператор A имеет регулярные точки на мнимой оси. Если предположить, что A имеет мнимые точки спектра, то найдется такое

вещественное μ, что $i\mu$ будет принадлежать границе спектра оператора A. Тогда (см. [6]) существует последовательность $u_n \in \mathcal{D}(A)$ единичных векторов, для которых $Au_n - i\mu u_n \to 0$ при $n\to\infty$. Используя теперь (8) и (9), получаем противоречие

$$\alpha \leq Re(Au_n, Uu_n) = Re(Au_n - i\mu u_n, Uu_n) \leq \|Au_n - i\mu u_n\| \cdot \|Uu_n\| \leq$$

$$\leq c\|Au_n - i\mu u_n\| \cdot (1+\|Au_n\|) \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

Замечание 2. Если в условиях теоремы I заменить U-диссипативность условием (8), то утверждение леммы 2 относительно подпространства $\mathfrak{M}_+$ можно усилить:

$$(Uu,u) \geq \delta\|u\|^2, \quad \delta>0, \quad u\in\mathfrak{M}_+ .$$

Действительно, из (8) для любого $u\in\mathcal{D}(U)$ следует

$$Re(Uu, R(A,i\mu)u) = Re(AR(A,i\mu)u, UR(A,i\mu)u) \geq \alpha\|R(A,i\mu)u\|^2 .$$

Так как $\mathfrak{M}_+$ инвариантно относительно A и оператор $A_+ = A|\mathfrak{M}_+$ ограничен, то при каждом $u\in\mathfrak{M}_+$ и некотором $c>0$ имеем

$$\|R(A,i\mu)u\|^2 = \|R(A_+,i\mu)u\|^2 \geq \frac{c\|u\|^2}{1+\mu^2} .$$

Подставляя $u\in\mathfrak{M}_+$ в (7), получаем

$$(Uu,u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Re(Uu, R(A,i\mu)u)d\mu \geq \frac{\alpha c}{\pi}\|u\|^2 \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu}{1+\mu^2} .$$

В отличие от случая ограниченных операторов (см. [6]) замечание 2, вообще говоря, не распространяется на подпространство $\mathfrak{M}_-$, т.е. даже при наличии условия (8) нельзя утверждать, что $(Uu,u)\leq -\delta\|u\|^2, \delta>0, u\in\mathfrak{M}_-\cap\mathcal{D}(U)$.

§ 2. Решение некоторых операторных уравнений

Для построения U, по отношению к которому заданный оператор A будет диссипативен, обратимся к уравнению (4). Это уравнение является частным случаем более общего

$$A_1U - UA_2 = V, \tag{10}$$

где A_1, A_2, V - замкнутые линейные операторы в банаховом пространстве $\mathcal{L}$ с плотными областями определения $\mathcal{D}(A_1)$, $\mathcal{D}(A_2)$ и $\mathcal{D}(V)$, причем $\mathcal{D}(A_2) \subseteq \mathcal{D}(V)$. Решением уравнения (10) назовем такой опера-

тор U, что $\mathcal{D}(U) \supseteq \mathcal{D}(A_2)$ и для любого $u \in \mathcal{D}(A_2)$ выполнено: $A_2 u \in \mathcal{D}(U)$, $Uu \in \mathcal{D}(A_1)$, $A_1 Uu - UA_2 u = Vu$.

Пусть ℓ_1 и ℓ_2 - пара лучей, выходящих из начала координат и разбивающих комплексную плоскость на два сектора S_1 и S_2 с углами ω и $2\pi - \omega$ $(0 < \omega < 2\pi)$ соответственно; $\mathcal{O}$ - круг радиуса ρ с центром в нуле. Обозначим через Λ_1 и Λ_2 замыкания множеств $S_1 \setminus \mathcal{O}$ и $S_2 \setminus \mathcal{O}$. Всюду далее будем предполагать, что Λ_1 состоит из регулярных точек для A_1, а Λ_2 - из регулярных точек для A_2. Кроме того, пусть величины $\|\lambda R(A_1, \lambda)\|$ и $\|\lambda R(A_2, \lambda)\|$ равномерно ограничены на Λ_1 и Λ_2 соответственно.

Т е о р е м а 2. Если при выполнении перечисленных условий спектры σ_1 и σ_2 операторов A_1 и A_2 не пересекаются, то уравнение (10) может иметь не более одного решения в классе ограниченных операторов.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Соединим гладкой кривой ℓ две точки, в которых лучи ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются с границей круга $\mathcal{O}$. Кривую ℓ выберем так, чтобы она целиком лежала в $\mathcal{O}$ и не содержала точек σ_1 и σ_2. Такую кривую всегда можно построить (см. [19]), поскольку σ_1 и σ_2 не пересекаются. Дополним ℓ до бесконечного контура Γ_0 прямолинейными участками границ множеств Λ_1 и Λ_2. Дополнение к Γ_0 до всей комплексной плоскости состоит из непересекающихся областей G_1 и G_2, где G_1 содержит внутренность Λ_1, а G_2 - внутренность Λ_2. Ориентацию контура Γ_0 выберем так, чтобы при его обходе область G_2 оставалась слева.

Пусть Q_1 - ограниченная окрестность множества $\sigma_1 \cap G_1$, замыкание которой вложено в G_1 и не содержит точек σ_2. Аналогично, Q_2 - ограниченная окрестность $\sigma_2 \cap G_2$, замыкание которой вложено в G_2 и не содержит точек σ_1. Можно считать, что Q_1 и Q_2 состоят из конечного числа связных компонент, замыкания которых попарно не пересекаются, причем граница каждой компоненты состоит из конечного числа гладких замкнутых кривых. Совокупность всех кривых, образующих границу Q_1 и ориентированных так, чтобы при обходе каждой кривой ограничиваемая ею связная компонента Q_1 оставалась слева, назовем контуром Γ_1. По отношению к Q_2 определим аналогичный контур Γ_2, только ориентируем его противоположным образом по сравнению с Γ_1. Составим, наконец, из Γ_0, Γ_1 и Γ_2 сложный контур Γ.

Рассмотрим при $u \in \mathcal{L}$ несобственный интеграл

$$\int_{\Gamma} R(A_1, \lambda) u \, d\lambda = \sum_{j=0}^{2} \int_{\Gamma_j} R(A_1, \lambda) u \, d\lambda. \tag{11}$$

Здесь и далее все интегралы по неограниченному контуру Γ понимаются в смысле главного значения, т.е. как пределы при $r \to \infty$ интегралов по ограниченным контурам $\Gamma_r = \{\lambda \in \Gamma \quad , |\lambda| \leq r\}$. Всякий раз, когда такой предел существует, будем говорить, что соответствующий интеграл сходится.

В силу аналитичности $R(A_1, \lambda)$ интеграл по Γ_2 в правой части (II) равен нулю, так как Q_2 не содержит точек спектра оператора A_1. Сумму же двух других интегралов можно заменить выражением

$$\lim_{r \to \infty} \int_{C_r} R(A_1, \lambda) u d\lambda,$$

где C_r - дуга окружности радиуса r с центром в нуле, содержащаяся в секторе S_1 и ориентированная против часовой стрелки. Учитывая условия теоремы и лемму I, получаем

$$\int_\Gamma R(A_1, \lambda) u d\lambda = -i\omega u. \tag{I2}$$

Аналогично

$$\int_\Gamma R(A_2, \lambda) u d\lambda = i(2\pi - \omega) u. \tag{I3}$$

Пусть теперь U - ограниченное решение (I0). Тогда для каждого $u \in \mathcal{L}$ при $\lambda \in \Gamma$ справедливо очевидное равенство

$$UR(A_2, \lambda) u - R(A_1, \lambda) U u = R(A_1, \lambda) V R(A_2, \lambda) u.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по контуру Γ. С учетом (I2), (I3) и того факта, что ограниченный оператор U можно вносить под знак сходящегося интеграла, получим

$$Uu = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(A_1, \lambda) V R(A_2, \lambda) u d\lambda. \tag{I4}$$

Таким образом, значение Uu на любом элементе $u \in \mathcal{L}$ представимо формулой (I4), интеграл в правой части которой обязательно сходится. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. <u>При условиях теоремы 2 уравнение (I0) имеет ограниченное решение тогда и только тогда, когда интеграл в правой части (I4) сходится для всех</u> $u \in \mathcal{L}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Необходимость сходимости соответствующего интеграла доказана в теореме 2. Установим достаточность. Прежде всего

отметим, что оператор U, задаваемый формулой (I4), ограничен. Действительно, если μ - регулярная точка для A_2, то оператор $VR(A_2,\mu)$ определен на всем $\mathcal{L}$ и замкнут, поэтому он ограничен. Кроме того, при $\lambda\in\Gamma$

$$VR(A_2,\lambda) = VR(A_2,\mu) + (\lambda-\mu)VR(A_2,\mu)R(A_2,\lambda).$$

Отсюда вытекает, что семейство ограниченных операторов $R(A_1,\lambda)VR(A_2,\lambda)$ непрерывно по λ на контуре Γ. Следовательно, каждый из интегралов

$$U_z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_z} R(A_1,\lambda)VR(A_2,\lambda)d\lambda, \qquad \Gamma_z=\{\lambda\in\Gamma,\ |\lambda|\leq z\}$$

будет ограниченным оператором. Если интеграл (I4) сходится для любого $u\in\mathcal{L}$, то U также ограничен как поточечный предел при $z\to\infty$ операторов U_z.

Покажем, что U удовлетворяет уравнению (I0). При $u\in\mathcal{D}(A_2)$ справедливо тождество

$$A_1R(A_1,\lambda)VR(A_2,\lambda)u = R(A_1,\lambda)VR(A_2,\lambda)A_2u -$$

$$-R(A_1,\lambda)Vu + VR(A_2,\mu)R(A_2,\lambda)(A_2u-\mu u),$$

которое легко проверяется непосредственно. В силу (I2)-(I4) и ограниченности оператора $VR(A_2,\mu)$ интегралы по λ вдоль контура Γ от каждого слагаемого в правой части этого тождества сходятся. Но тогда интеграл от левой части также будет сходящимся, причем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} A_1R(A_1,\lambda)VR(A_2,\lambda)u\,d\lambda = UA_2u + \frac{\omega}{2\pi}Vu +$$

$$+ VR(A_2,\mu)\left[\frac{2\pi-\omega}{2\pi}(A_2u-\mu u)\right] = UA_2u + Vu. \qquad \text{(I5)}$$

Так как оператор A_1 замкнут, то из сходимости интегралов в (I4) и (I5) следует, что $Uu\in\mathcal{D}(A_1)$. Кроме того, оператор A_1 можно вынести из-под знака интеграла в (I5), после чего получим утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 3. В случае ограниченных A_1, A_2, V теоремы 2 - 3 вытекают из результатов [6], хотя там приводится более сложная формула для U, содержащая двойной интеграл. Случай неограниченных операторов, но при более жестких предположениях, чем в теоремах 2 - 3, рассмотрен в [20]. Похожая на (I4) формула установлена также в [2I] для решений уравнения вида $A_1u - A_2u = v$, где v - известный, а u - неизвестный векторы.

З а м е ч а н и е 4. Приведем простое достаточное условие сходимос-

ти интеграла (I4) при любом $u \in \mathcal{L}$. Пусть оператор V подчинен оператору A_2 с порядком α $(0 \leqslant \alpha < 1)$, т.е. для каждого $v \in \mathcal{D}(A_2)$ выполнено неравенство

$$\|Vv\| \leqslant c\|A_2 v\|^{\alpha}\|v\|^{1-\alpha}. \tag{I6}$$

Положим здесь $v = \lambda R(A_2, \lambda)u$, тогда

$$|\lambda|\|VR(A_2,\lambda)u\| \leqslant c|\lambda|^{\alpha}\|A_2 R(A_2,\lambda)u\|^{\alpha}\|\lambda R(A_2,\lambda)u\|^{1-\alpha}.$$

Отсюда, учитывая равномерную ограниченность операторов $\lambda R(A_1, \lambda)$, $\lambda R(A_2, \lambda)$ и $A_2 R(A_2, \lambda)$ на контуре Γ, получаем

$$|\lambda|^{2-\alpha}\|R(A_1,\lambda)VR(A_2,\lambda)u\| \leqslant |\lambda|^{-\alpha}\|\lambda R(A_1,\lambda)\|\cdot\|\lambda VR(A_2,\lambda)u\| < const.$$

Этого достаточно для сходимости интеграла (I4). Условие (I6) можно заменить аналогичным условием подчинения сопряженного к V оператора V^* сопряженному к A_1 оператору A_1^*.

Вернемся теперь к задаче о построении U, по отношению к которому будет диссипативен заданный оператор A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяющий условию $(\mathfrak{A})$. Обозначим через A^* сопряженный к A оператор и составим уравнение (4) с симметричным оператором V в правой части, определенным на $\mathcal{D}(V) \supseteq \mathcal{D}(A)$. Сведем уравнение (4) к уравнению (I0), полагая $A_1 = A^*$, $A_2 = -A$. В качестве секторов S_1 и S_2 здесь можно взять правую и левую полуплоскости соответственно. Допустим, что выполнено условие теоремы 2, т.е. спектры A^* и $(-A)$ не пересекаются. Тогда у A и A^* нет точек спектра на мнимой оси и в качестве Γ_0 при построении Γ можно выбрать мнимую ось. Сходимость интеграла в (I4) эквивалентна в данном случае существованию интеграла

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(A^* + i\mu I)^{-1}V(A - i\mu I)^{-1}u\,d\mu.$$

Если при каждом $u \in \mathcal{H}$ этот интеграл сходится, то уравнение (4) имеет ограниченное решение U. Покажем, что U - самосопряженный оператор. Пусть u и v принадлежат $\mathcal{D}(A)$. В силу (4) имеем

$$(Au, U^*v) = (UAu, v) = (Vu - A^*Uu, v) = (u, Vv - U^*Av).$$

Это означает, что $U^*v \in \mathcal{D}(A^*)$ и $A^*U^*v = Vv - U^*Av$. Ограниченное решение (4) единственно, поэтому $U^* = U$. При положительном V оператор A будет U-диссипативен.

§ 3. Приложение к дифференциальным операторам

В этом параграфе обсуждаются конкретные методы решения уравнений вида (10) в случае, когда A_1 и A_2 - дифференциальные операторы. В качестве приложения будет указан способ построения самосопряженных интегральных операторов, имеющих те же индексы неустойчивости, что и заданный несимметричный дифференциальный оператор.

<u>1°. Некоторые определения</u>. Обозначим через C множество комплексных чисел, а через C_n - n-мерное комплексное пространство. Вектор $u \in C_n$ считается столбцом с компонентами $u^1,\dots,u^n$. Если u, v - элементы C_n, то

$$(u,v) = \sum_i u^i \bar{v}^i .$$

Символом $C_{n\times m}$ обозначается множество $n\times m$-матриц $A=(a^{ij}), a^{ij}\in C$, $i=1,\dots,n, j=1,\dots,m$. Для любых $u\in C_n$, $A\in C_{n\times m}$ положим $|u|=\max_i |u^i|$;

$$|A| = \max_{i,j} |a^{ij}| .$$

Если $A\in C_{n\times m}$, то $A'\in C_{m\times n}$ обозначает транспонированную, а $A^* = \bar{A}'$ - сопряженную с A матрицу. Произведения вида AB и Au, где $A\in C_{m\times n}$, $B\in C_{n\times k}$, $u\in C_n$, понимаются в обычном смысле.

Пусть Ω - область в вещественном s-мерном пространстве R_s, $\bar{\Omega}$ - ее замыкание, $\ell\geq 0$, $1<p<\infty$. Нам понадобятся стандартные функциональные пространства $C^\ell(\bar{\Omega})$, $L_p(\Omega)$ и $W_p^\ell(\Omega)$, нормы в которых будем обозначать через $|\cdot|_\ell^\Omega$, $\|\cdot\|_p^\Omega$ и $\|\cdot\|_{p,\ell}^\Omega$ соответственно. Векторная (матричная) функция принадлежит одному из этих пространств, если все ее компоненты принадлежат этому пространству. Норма векторной (матричной) функции определяется как максимум соответствующих норм ее компонент.

Оператор k-кратного дифференцирования по какой-либо переменной x обозначается далее через D_x^k. Буква c означает всякую положительную константу, точная величина которой для нас несущественна.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathcal{A}(x,D_x)u = \sum_{k=0}^{2m} A_k(x) D_x^k u(x). \tag{17}$$

Здесь $u(x)$ - вектор-функция со значениями в C_n, определенная на конечном промежутке $[a,b]$, а $A_0(x),\dots,A_{2m}(x)$ - непрерывные на $[a,b]$

матричные функции со значениями в $C_{n\times n}$. При $x=a$ зададим граничные условия

$$\mathcal{P}_j(D_x)u\Big|_{x=a} = \sum_{k=0}^{m_j} P_{jk} D_x^k u(a)=0, \quad j=1,\dots,mn, \tag{18a}$$

где $P_{jk}\in C_{1\times n}$, $m_j\leq 2m-1$. Систему условий такого же вида, но с другими, вообще говоря, коэффициентами, зададим при $x=b$:

$$\mathcal{P}_j(D_x)u\Big|_{x=b} = 0, \quad j=mn+1,\dots,2mn. \tag{18в}$$

Будем говорить, что формальный дифференциальный оператор $\{\mathcal{A},\mathcal{P}_j\}$, порожденный выражением (17) с условиями (18a) - (18b), принадлежит классу $\mathfrak{A}^m$, если:

($\mathfrak{A}_1^m$). При любом $x\in[a,b]$ собственные значения матрицы $(-1)^m A_{2m}(x)$ лежат в полуплоскости $Re\,\lambda<0$ комплексной плоскости C.

($\mathfrak{A}_2^m$). Существует такое $\theta\in(\pi/2,\pi)$, что если $|\lambda|>0, |\arg\lambda|\leq\theta$, то краевая задача

$$A_{2m}(a)D_x^{2m}u(x)-\lambda u(x)=0,$$

$$P_{jm_j}D_x^{m_j}u(a)=h_j \ (j=1,\dots,mn), \quad \lim_{x\to\infty}|u(x)|=0$$

имеет единственное решение для всех $h_j\in C$. Аналогичное условие предполагается выполненным в точке b по отношению к системе (18b).

Класс $\mathfrak{A}^m$ естественно возникает при изучении параболических систем вида $D_t u(x,t)=\mathcal{A}(x,D_x)u(x,t)$ с граничными условиями (18a)-(18b) и начальными данными $u(x,0)=u_0(x)$. Свойство ($\mathfrak{A}_1^m$) означает $2m$-параболичность этой системы в смысле И.Г. Петровского. Свойство ($\mathfrak{A}_2^m$), которое принято называть условием дополнительности, гарантирует корректность соответствующей начально-краевой задачи (см. [22]).

Каждый формальный оператор $\{\mathcal{A},\mathcal{P}_j\}$ реализуется как неограниченный оператор $A_p: u\to\mathcal{A}(x,D_x)u$ в пространстве $L_p(\omega)$, где $\omega=(a,b)$, $1<p<\infty$. Область определения $\mathcal{D}(A_p)$ этого оператора состоит из всех n-вектор-функций $u(x)\in W_p^{2m}(\omega)$, удовлетворяющих граничным условиям (18a) - (18b). Известно [23,24], что если $\{\mathcal{A},\mathcal{P}_j\}$ принадлежит $\mathfrak{A}^m$, то оператор A_p замкнут, имеет дискретный спектр и удовлетворяет приведенному во введении условию ($\mathfrak{A}$). Таким образом, к операторам A_p при-

менимы рассуждения предыдущих параграфов.

Можно показать (см. [25]), что собственные числа и собственные функции операторов A_p не зависят от выбора p в интервале $1<p<\infty$. При этом все собственные функции принадлежат $C^{2m}(\overline{\omega})$.

Пусть формальный оператор $\{\mathcal{A}, \mathcal{P}_j\}$ принадлежит классу $\mathfrak{A}^m$, причем $A_k(x)\in C^k(\overline{\omega})$. Рассмотрим формально сопряженный с ним (относительно скалярного произведения в L_2) оператор $\{\mathcal{A}^*, \mathcal{R}_j\}$, порожденный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}^*(x,D_x)v = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k D_x^k \left(A_k^*(x)v(x)\right)$$

и системой граничных условий

$$\mathcal{R}_j(D_x)v\Big|_{x=a} = \mathcal{R}_{mn+j}(D_x)v\Big|_{x=b} = 0, \quad j=1,\dots,mn,$$

сопряженной с (18a) - (18b) относительно $\mathcal{A}$. Описание сопряженных граничных условий имеется, например, в [25-27] . Понятно, что выражение $\mathcal{A}^*(x,D_x)$ обладает свойством $(\mathfrak{A}_1^m)$. Сопряженные граничные условия определяются неоднозначно, тем не менее их всегда можно выбрать так, что они будут обладать свойством $(\mathfrak{A}_2^m)$ по отношению к выражению $\mathcal{A}^*(x,D_x)$ (см. приложение к настоящей статье). В дальнейшем система сопряженных граничных условий всегда считается именно такой. При этом формальный оператор $\{\mathcal{A}^*, \mathcal{R}_j\}$ принадлежит классу $\mathfrak{A}^m$. Если A_p и A_q^* - реализации $\{\mathcal{A}, \mathcal{P}_j\}$ и $\{\mathcal{A}^*, \mathcal{R}_j\}$ в пространствах $L_p(\omega)$ и $L_q(\omega)$, причем $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то сопряженный с A_p оператор $(A_p)^*$, действующий в пространстве $L_q(\omega)$, совпадает с A_q^* :

2°. <u>Сведение операторных уравнений к краевым задачам</u>.

В пространстве n-вектор-функций, компоненты которых принадлежат L_p на промежутке $\omega=(a,b)$, рассмотрим операторы A_p и B_p, порожденные системами $\{\mathcal{A}, \mathcal{P}_j\}$ и $\{\mathcal{B}, \mathcal{Q}_j\}$ класса $\mathfrak{A}^m$. Составим уравнение

$$A_p U + U B_p = V, \tag{19}$$

где U - неизвестный, а V - известный ограниченный оператор в $L_p(\omega)$. Пусть λ_τ и μ_s $(\tau,s=1,2,\dots)$ - собственные значения A_p и B_p соответственно. Если $\lambda_\tau+\mu_s\neq 0$, то в силу теорем 2 - 3 и замечания 4 существует единственный ограниченный оператор U в $L_p(\omega)$, удовлетворяющий уравнению (19). Конкретизируем это абстрактное утверждение, выбрав в качестве V интегральный оператор

$$\mathbb{V}u=\int_a^b V(x,y)u(y)dy,$$

ядро $V(x,y)$ которого определено в квадрате $\Omega=\omega\times\omega$ и принимает значения в $C_{n\times n}$. Условие $V(x,y)\in L_q(\Omega)$, $q=max(p,\frac{p}{p-1})$ гарантирует ограниченность $\mathbb{V}$ в $L_p(\omega)$, при этом

$$\|\mathbb{V}u\|_p^\omega\leq c\,\|V(x,y)\|_q^\Omega\,\|u\|_p^\omega, \tag{20}$$

где c не зависит от u и $\mathbb{V}$ (см. [28]).

Решение $\mathbb{U}$ уравнения (I9) ищем также в виде интегрального оператора с матричным ядром $U(x,y)$. Выясним, при каких ограничениях на $U(x,y)$ такой оператор действительно будет решением (I9).

Допустим, что $U(x,y)$ принадлежит $W_q^{2m}(\Omega)$ и удовлетворяет (в смысле известных теорем о следах) граничным условиям

$$\mathcal{P}_j(D_x)U(x,y)|_{x=a}=\mathcal{P}_{mn+j}(D_x)U(x,y)|_{x=b}=0, \tag{2I}$$
$$j=1,\dots,mn.$$

Тогда область значений оператора $\mathbb{U}$ содержится в $\mathcal{D}(\mathbf{A}_p)$ и для всех $u\in L_p(\omega)$

$$\mathbf{A}_p\mathbb{U}u=\int_a^b\mathcal{A}(x,D_x)U(x,y)u(y)dy. \tag{22}$$

Это очевидно, если $U(x,y)\in C^{2m}(\bar\Omega)$. Если же $U(x,y)$ принадлежит лишь $W_q^{2m}(\Omega)$, то существует последовательность $U_\nu(x,y)$ матричных функций из $C^{2m}(\bar\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2I) и сходящихся при $\nu\to\infty$ к $U(x,y)$ по норме $W_q^{2m}(\Omega)$. Возможность такой аппроксимации следует из результатов [27 , лемма I] и [29, теорема I] . Обозначим через $\mathbb{U}_\nu$ интегральный оператор с ядром $U_\nu(x,y)$, а через v - правую часть (22). Применяя к $\mathbf{A}_p\mathbb{U}_\nu u-v$ оценку типа (20), получим

$$\|\mathbf{A}_p\mathbb{U}_\nu u-v\|_p^\omega\leq c\,\|\mathcal{A}U_\nu-\mathcal{A}U\|_q^\Omega\,\|u\|_p^\omega\leq$$
$$\leq c\,\|U_\nu-U\|_{q,2m}^\Omega\,\|u\|_p^\omega\to 0\quad(\nu\to\infty).$$

Так как оператор $\mathbf{A}_p$ замкнут, а последовательность $\mathbb{U}_\nu u$ сходится к $\mathbb{U}u$ в пространстве $L_p(\omega)$, то $\mathbb{U}u\in\mathcal{D}(\mathbf{A}_p)$, $\mathbf{A}_p\mathbb{U}u=v$.

Вычислим теперь композицию $\mathbb{U}\mathbf{B}_p$. Для этого предположим, что коэффициенты B_k дифференциального выражения $\mathcal{B}$ принадлежат $C^k(\bar\omega)$, и обозначим через $\{\mathcal{B}^*,\mathcal{R}_j\}$ формально сопряженный с $\{\mathcal{B},\mathcal{Q}_j\}$ оператор, а через $U^*(x,y)$ - сопряженную с U матрицу. Пусть $U^*(x,y)\in C^{2m}(\bar\Omega)$ и при каждом фиксированном $x\in\omega$ столбцы матрицы U^* удовлетворяют по пере-

менной y однородным граничным условиям, соответствующим оператору $\{\mathcal{B}^*, \mathcal{K}_j\}$. Выберем $u \in \mathcal{D}(B_p)$ и рассмотрим значение n-вектор-функции $UB_p u$ в какой-либо точке $x \in \omega$. Составив скалярное произведение в C_n этого значения и произвольного вектора $v \in C_n$, получим

$$(UB_p u, v) = \int_a^b (U(x,y)\mathcal{B}(y,D_y)u(y), v)dy = \int_a^b (\mathcal{B}(y,D_y)u(y), U^*(x,y)v)dy =$$

$$= \int_a^b (u(y), \mathcal{B}^*(y,D_y)U^*(x,y)v)dy = \int_a^b ([\mathcal{B}^*(y,D_y)U^*(x,y)]^* u(y), v)dy.$$

Следовательно;

$$UB_p u = \int_a^b [\mathcal{B}^*(y,D_y)U^*(x,y)]^* u(y)dy = \int_a^b [\bar{\mathcal{B}}^*(y,D_y)U'(x,y)]' u(y)dy, \qquad (23)$$

где штрих означает транспонирование, а $\bar{\mathcal{B}}^*$ - выражение с комплексно-сопряженными по отношению к $\mathcal{B}^*$ коэффициентами. Как и при выводе (22), легко убедиться, что формула (23) сохраняет силу, если $U(x,y)$ принадлежит $W_q^{2m}(\Omega)$ и удовлетворяет граничным условиям

$$\bar{\mathcal{K}}_j(D_y)U'(x,y)\big|_{y=a} = \bar{\mathcal{K}}_{mn+j}(D_y)U'(x,y)\big|_{y=b} = 0, \qquad (24)$$
$$j = 1, \ldots, mn.$$

Коэффициенты выражений $\bar{\mathcal{K}}_j$ сопряжены с коэффициентами $\mathcal{K}_j$.

Суммируя (22),(23), приходим к следующей задаче: по заданной матрице $V(x,y) \in L_q(\Omega)$ найти матрицу $U(x,y) \in W_q^{2m}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению

$$\mathcal{A}(x,D_x)U(x,y) + [\bar{\mathcal{B}}^*(y,D_y)U'(x,y)]' = V(x,y) \qquad (25)$$

и граничным условиям (21),(24). В следующих параграфах будет показано, что такая задача имеет единственное решение, если $\lambda_r + \mu_s \neq 0 \quad (r,s = 1,2,\ldots)$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 4. При указанном выборе A_p, B_p и V решением уравнения (19) является интегральный оператор, ядро $U(x,y)$ которого определяется как решение краевой задачи (21),(24),(25).

3°. Индексы неустойчивости дифференциальных операторов.

Пусть $\{\mathcal{A}, \mathcal{P}_j\}$ - формальный оператор класса $\mathfrak{A}^m$ и A_p - его реализация в $L_p(\omega)$. Рассмотрим задачу о вычислении индекса неустойчивости A_p. Так как спектр A_p дискретный и не зависит от p, то $\varkappa(A_p) = \varkappa(A_2)$. На основании теоремы I подсчет $\varkappa(A_2)$ сводится к аналогичной задаче, но

уже для некоторого самосопряженного оператора U в $L_2(\omega)$, по отношению к которому A_2 будет диссипативным. Для построения U достаточно решить уравнение

$$(A_2)^* U + UA_2 = V, \tag{26}$$

где V - какой-нибудь положительный интегральный оператор с эрмитовым ядром $V(x,y) \in L_2(\Omega)$. Предположим, что коэффициенты $A_k(x)$ выражения $\mathcal{A}(x, D_x)$ принадлежат $C^k(\bar{\omega})$. Тогда $(A_2)^*$ окажется реализацией в $L_2(\omega)$ формально сопряженного с $\{\mathcal{A}, \mathcal{P}_j\}$ оператора, а уравнение (26) будет частным случаем (I9). Если собственные значения A_2 таковы, что $\lambda_r + \bar{\lambda}_s \neq 0$ $(r,s = 1,2,\dots)$, то по теореме 4 решением (26) является интегральный оператор с ядром $U(x,y) \in W_2^{2m}(\Omega)$. Для определения U получится краевая задача типа (2I), (24), (25). В силу изложенного в § 2 ядро $U(x,y)$ обязательно будет эрмитовым, т.е. $U^*(x,y) = U(y,x)$.

Нетрудно избавиться от излишних ограничений на гладкость коэффициентов выражения $\mathcal{A}$. Пусть $A_k(x)$ лишь непрерывны. Рассмотрим вместо (26) уравнение

$$A_2 U + U(A_2)^* = V \tag{27}$$

с тем же оператором V в правой части. Понятно, что $(A_2)^*$ диссипативен по отношению к решению U этого уравнения, поэтому $\varkappa((A_2)^*) = \varkappa(U)$. Так как $\varkappa(A_2) = \varkappa((A_2)^*)$, то $\varkappa(A_2)$ и $\varkappa(U)$ совпадают. Уравнение (27) уже не будет частным случаем (I9), однако его решение по-прежнему ищем в виде интегрального оператора с ядром $U(x,y) \in W_2^{2m}(\Omega)$. Повторяя рассуждения, приведенные при выводе (22),(23), придем к задаче

$$\mathcal{A}(x, D_x) U(x,y) + [\bar{\mathcal{A}}(y, D_y) U'(x,y)]' = V(x,y);$$

$$\mathcal{P}_j(D_x) U(x,y)\big|_{x=a} = \mathcal{P}_{mn+j}(D_x) U(x,y)\big|_{x=b} = 0, \quad j = 1, \dots, mn;$$

$$\bar{\mathcal{P}}_j(D_y) U'(x,y)\big|_{y=a} = \bar{\mathcal{P}}_{mn+j}(D_y) U'(x,y)\big|_{y=b} = 0, \quad j = 1, \dots, mn.$$

Эта задача имеет ту же структуру, что и (2I),(24),(25). Следовательно, она однозначно разрешима в пространстве $W_2^{2m}(\Omega)$, если $\lambda_r + \bar{\lambda}_s \neq 0$ $(r, s = 1, 2, \dots)$.

Об условии дополнительности для сопряженных операторов

Пусть некоторая эллиптическая или параболическая краевая задача удовлетворяет условию дополнительности. Выясним, при каких ограничениях сопряженная краевая задача также удовлетворяет этому условию. В эллиптическом случае такие вопросы изучались многими авторами (см., например, [26,27]). Для уравнений и систем параболического типа условие дополнительности формулируется иначе [22] . Тем не менее во всех случаях проверка этого условия сводится к рассмотрению краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами. На изучении таких систем мы здесь и остановимся. Наши рассуждения основаны на идее, близкой к [26] , однако применимы в более общих ситуациях, в частности, к параболическим и квазиэллиптическим уравнениям и системам.

I°. Сопряженные выражения и граничные условия. Напомним некоторые известные факты о свойствах формально сопряженных дифференциальных операторов. Пусть задано дифференциальное выражение

$$\mathcal{A}u = \sum_{k=0}^{\ell} A_k(x) D_x^k u(x), \qquad (1')$$

определенное на n-вектор-функциях класса $C^{\ell}[a,b]$ с $n\times n$ -матричными коэффициентами $A_k(x)$ класса $C^k[a,b]$. Выражение

$$\mathcal{A}^* v = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k D_x^k \left[A_k^*(x) v(x)\right],$$

где A_k^* - сопряженная с A_k матрица, называется формально сопряженным с $\mathcal{A}$.

Для любых вектор-функций u, v класса $C^{\ell}[a,b]$ справедлива формула Лагранжа

$$\int_a^b \left[(\mathcal{A}u, v) - (u, \mathcal{A}^* v)\right] dx = F_b(u,v)\Big|_{x=b} - F_a(u,v)\Big|_{x=a}. \qquad (2')$$

Символом $F_\xi(u,v)$ обозначена здесь полуторалинейная форма

$$F_\xi(u,v) = \sum_{i+j+k\le \ell-1} (-1)^{k+j} C_{k+j}^{j} \left(D_\xi^k A_{k+i+j+1}(\xi) D_x^i u(x), D_x^j v(x)\right), \qquad (3')$$

называемая граничной формой, соответствующей выражению $\mathcal{A}$ в точке ξ .

Наряду с (I$'$) рассмотрим систему линейных форм

$$\mathcal{P}_j u = \sum_{k=0}^{m_j} P_{jk} D_x^k u(x), \quad j=1,\dots,r, \tag{4'}$$

где $P_{jk} \in C_{1\times n}$, $P_{jm_j} \neq 0$. Число m_j называется порядком, а выражение $\mathcal{P}_j^0 u = P_{jm_j} D_x^{m_j} u(x)$ - главной частью формы $\mathcal{P}_j$. Систему (4′) назовем нормальной, если векторы P_{jm_j}, соответствующие формам одинакового порядка, линейно независимы. Две системы вида (4′) называются эквивалентными, если каждая форма одной из них есть линейная комбинация форм другой, и наоборот.

Нормальная система $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{n(\nu+1)}$, эквивалентная системе $\{D_x^k u^i,\ i=1,\dots,n;\ k=0,\dots,\nu\}$ (u^i - i-я компонента вектора u), называется системой Дирихле порядка ν. Если в системе Дирихле $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{n(\nu+1)}$ некую подсистему $\{\mathcal{P}_{j_k}\}_{k=1}^{r}$ заменить какой-нибудь эквивалентной нормальной системой, то снова получится система Дирихле того же порядка. Любая система Дирихле порядка ν является базисом в пространстве всех форм вида (4′) порядка не выше ν.

Пусть $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{n\ell}$ - система Дирихле порядка $\ell-1$. Тогда при каждом фиксированном ξ полуторалинейную форму $F_\xi(u,v)$ можно единственным образом представить в виде

$$F_\xi(u,v) = \sum_{i+j=n\ell+1} (\mathcal{P}_j u)(\overline{Q_i v}), \tag{5'}$$

где $Q_i v$ ($i=1,\dots,n\ell$) - линейные формы типа (4′), порядки которых обозначим через n_i.

Л е м м а I (см. [26,27]). <u>Если</u> $\det A_\ell(\xi) \neq 0$, то $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell}$ <u>также является системой Дирихле порядка</u> $\ell-1$, <u>причем</u> $m_j + n_i = \ell-1$ <u>для</u> $i+j = n\ell+1$.

Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, если задать систему Дирихле $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell}$, а $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{n\ell}$ определить из (5′).

Вернемся теперь к системе (4′), считая $m_j \leq \ell-1$. Рассмотрим другую систему $\{Q_i\}_{i=1}^{s}$, порядки n_i форм которой также не превосходят $\ell-1$. Система $\{Q_i\}_{i=1}^{s}$ называется сопряженной с $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$ относительно граничной формы $F_\xi(u,v)$, если для каждого $v \in C^{\ell-1}[a,b]$ условия

$$Q_i v\big|_{x=\xi} = 0, \quad i=1,\dots,s, \tag{6'}$$

равносильны тому, что

$$F_\xi(u,v)\big|_{x=\xi}=0$$

при всех $u\in C^{\ell-1}[a,b]$, удовлетворяющих условиям

$$\mathcal{P}_j u\big|_{x=\xi}=0\,,\quad j=1,\dots,r. \tag{7'}$$

В этом случае граничные условия (6′) называются сопряженными с (7′) относительно выражения $\mathcal{A}$. Понятно, что любые системы линейных форм, сопряженные с $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$ относительно $F_\xi(u,v)$, будут эквивалентны.

Если $\det A_\ell(\xi)\neq 0$, то для любой нормальной системы $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$ $(m_j\le \ell-1)$ существует сопряженная с ней нормальная система $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$. Действительно, дополним $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$ до системы Дирихле $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{n\ell}$, затем определим систему $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell}$, соответствующую $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{n\ell}$ в силу (5′), и выделим из нее нормальную подсистему $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$. Она и будет искомой. Заметим, что любая другая нормальная система, сопряженная с $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$, также содержит $n\ell-r$ форм, так как она эквивалентна $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$.

Л е м м а П. <u>Если $\det A_\ell(\xi)\neq 0$, а нормальные системы $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$ и $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$ сопряжены относительно $F_\xi(u,v)$, то их можно включить в такие системы Дирихле $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{n\ell}$ и $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell}$, для которых справедлива формула (5′).</u>

Д о к а з а т е л ь с т в о . Обозначим через $\{\mathcal{P}'_j\}_{j=r+1}^{n\ell}$ какое-нибудь дополнение к $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$ до системы Дирихле, тогда

$$F_\xi(u,v)=\sum_{j=1}^{r}(\mathcal{P}_j u)\overline{(Q_{n\ell-j+1}v)}+\sum_{i=1}^{n\ell-r}(\mathcal{P}'_{n\ell-i+1}u)\overline{(Q'_i v)},$$

где формы $\{Q_i\}_{i=n\ell-r+1}^{n\ell}$ и $\{Q'_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$ также образуют систему Дирихле. Так как системы $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$ и $\{Q'_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$ сопряжены с $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$, то они эквивалентны. Следовательно,

$$Q'_i v=\sum_{k=1}^{n\ell-r}\alpha_{ik}Q_k v,\qquad i=1,\dots,n\ell-r.$$

Откуда

$$\sum_{i=1}^{n\ell-r}(\mathcal{P}'_{n\ell-i+1}u)\overline{(Q'_i v)}=\sum_{k=1}^{n\ell-r}\Big(\sum_{i=1}^{n\ell-r}\bar{\alpha}_{ik}\mathcal{P}'_{n\ell-i+1}u\Big)\overline{(Q_k v)}.$$

Положим

$$\mathcal{P}_{n\ell-k+1}u = \sum_{i=1}^{n\ell-r} \bar{\alpha}_{ik}\mathcal{P}'_{n\ell-i+1}u, \quad k=1,\dots,n\ell-r.$$

Ясно, что для систем $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{n\ell}$ и $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell}$ выполнено ($5'$). Кроме того, $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell}$ есть система Дирихле, так как она получена из системы Дирихле $\{Q_i\}_{i=n\ell-r+1}^{n\ell}, \{Q'_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$ заменой $\{Q'_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$ на эквивалентную нормальную систему $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$. Но тогда $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{n\ell}$ в силу леммы I также будет системой Дирихле. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е . Обозначим через $F^0_\xi(u,v)$ главную часть $F_\xi(u,v)$, т.е. сумму тех слагаемых в правой части ($3'$), где $i+j=\ell-1$. Нетрудно проверить, что $F^0_\xi(u,v)$ будет граничной формой, соответствующей дифференциальным выражениям вида $A_\ell(\xi)D^\ell_x u(x) + A_0(x)u(x)$. Здесь $A_\ell(\xi)$ - значение старшего коэффициента (I') в точке ξ, а матрица $A_0(x)$ произвольна. Пусть $\det A_\ell(\xi) \neq 0$ и $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$, $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$ - сопряженные относительно $F_\xi(u,v)$ нормальные системы. Включим их в системы Дирихле $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{n\ell}$ и $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell}$, для которых справедливо представление ($5'$). Тогда $\{\mathcal{P}^0_j\}_{j=1}^{n\ell}$ и $\{Q^0_i\}_{i=1}^{n\ell}$ также будут системами Дирихле, причем

$$F^0_\xi(u,v) = \sum_{i+j=n\ell+1} (\mathcal{P}^0_j u)(\overline{Q^0_i v}).$$

Таким образом, нормальные системы $\{\mathcal{P}^0_j\}_{j=1}^{r}$ и $\{Q^0_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$ оказываются сопряженными относительно $F^0_\xi(u,v)$.

2^0. Условие дополнительности. Всюду далее предполагается, что коэффициенты выражения (I') постоянны и $\det A_\ell \neq 0$. Обозначим через G пространство решений однородного уравнения $\mathcal{A}u=0$, а через H - пространство решений сопряженного уравнения $\mathcal{A}^*v=0$. Так как коэффициенты $\mathcal{A}$ постоянны, то соответствующая граничная форма не зависит от ξ и будет обозначаться далее через $F(u,v)$. Более того, из ($2'$) вытекает, что $F(u,v)$ не зависит и от x, если $u\in G$, $v\in H$. Тем самым, F есть функционал на $G\times H$.

Л е м м а Ш. Если $u\in G$ и $F(u,v)=0$ при всех $v\in H$, то $u\equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{n\ell}$ - какая-нибудь система Дирихле, тогда при каждом фиксированном ξ отображение $U: u(x) \to \{\mathcal{P}_j u|_{x=\xi}\}_{j=1}^{n\ell}$ есть изоморфизм между G и $C_{n\ell}$. Это следует из теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения $\mathcal{A}u=0$,

поскольку система $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{nl}$ эквивалентна $\{D_x^k u^i(x)\}$, $k=0,\dots,l-1$, $i=1,\dots,n$. Аналогично, если $\{Q_i\}_{i=1}^{nl}$ – система Дирихле, то отображение $V: v(x) \longrightarrow \{Q_i v|_{x=\xi}\}_{i=1}^{nl}$ есть изоморфизм между H и C_{nl}. Утверждение леммы вытекает теперь из представления ($5'$), где $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{nl}$ и $\{Q_i\}_{i=1}^{nl}$ – системы Дирихле.

Предположим, что уравнение

$$\det\left[\sum_{k=0}^{l} A_k (i\tau)^k\right] = 0 \qquad (8')$$

относительно скалярного параметра τ не имеет вещественных корней. Тогда существует разложение G в прямую сумму двух подпространств G_+ и G_-, где G_+ состоит из функций, стремящихся к нулю вместе со всеми производными при $x \to +\infty$, а G_- – из функций, обладающих аналогичным свойством при $x \to -\infty$. Таким же способом можно осуществить разложение $H = H_+ + H_-$.

Л е м м а IУ. <u>Элемент $u \in G$ принадлежит G_+ тогда и только тогда, когда $F(u,v)=0$ для всех $v \in H_+$</u>.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in G_+$, $v \in H_+$, тогда из ($3'$) и определения G_+, H_+ следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} F(u,v) = 0$. Так как $F(u,v)$ не зависит от x, то $F(u,v)=0$. Аналогично $F(u,v)=0$ при $u \in G_-$, $v \in H_-$.

Обратно, пусть $u \in G$ и $F(u,v)=0$ для $v \in H_+$. Положим $u = u_+ + u_-$, где $u_+ \in G_+$, $u_- \in G_-$. Для $v \in H_+$ имеем $F(u_-,v) = F(u,v) - F(u_+,v) = 0$. Но $F(u_-,v)=0$ также при $v \in H_-$. Отсюда вытекает, что $F(u_-,v)=0$ для всех $v \in H$, следовательно, $u \equiv 0$. Лемма доказана.

Понятно, что $v \in H_+$ тогда и только тогда, когда $F(u,v)=0$ при любом $u \in G_+$.

Зафиксируем теперь некоторое вещественное ξ и рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{A}u=0,\ \mathcal{P}_j u\big|_{x=\xi} = g_j\ (j=1,\dots,r),\ \lim_{x\to+\infty} |u(x)| = 0. \qquad (9')$$

Здесь $g_j \in C$, $\mathcal{P}_j$ – линейная форма вида ($4'$) порядка m_j. Говорят, что система $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$ дополняет выражение $\mathcal{A}$, если для каждого набора $\{g_j\}_{j=1}^{r}$ задача ($9'$) имеет единственное решение. Ясно, что это определение не зависит от выбора точки ξ. Известные понятия условий допол-

нительности для многомерных эллиптических или параболических краевых задач сводятся в конечном счете к проверке приведенного определения для некоторых систем обыкновенных уравнений с параметрами. Разница между параболическим и эллиптическим случаями состоит лишь в том, каким именно образом параметры входят в упомянутые системы. Не останавливаясь на формулировках этих определений, имеющихся в [22,31,32], сразу же перейдем к изучению формально сопряженной с ($9'$) краевой задачи.

Л е м м а У. Пусть уравнение ($8'$) не имеет вещественных корней, а система $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$ $(m_j \le \ell-1)$ нормальна и дополняет $\mathcal{A}$. Тогда любая сопряженная с $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$ нормальная система $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$ дополняет $\mathcal{A}^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что отображение $V_+ : v(x) \longrightarrow \{Q_i v|_{x=\xi}\}_{i=1}^{n\ell-r}$ есть изоморфизм между H_+ и $\mathbb{C}_{n\ell-r}$. Так как система $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$ дополняет $\mathcal{A}$, то отображение $U_+ : u(x) \longrightarrow \{\mathcal{P}_j u|_{x=\xi}\}_{j=1}^{r}$ будет изоморфизмом между G_+ и $\mathbb{C}_r$. Включим $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{r}$ и $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$ в системы Дирихле $\{\mathcal{P}_j\}_{j=1}^{n\ell}$ и $\{Q_i\}_{i=1}^{n\ell}$ так, чтобы имело место представление ($5'$), и пусть $g_j = \mathcal{P}_j u|_{x=\xi}$, $h_i = Q_i v|_{x=\xi}$. Отображения $U : u(x) \rightarrow \{g_j\}_{j=1}^{n\ell}$ и $V : v(x) \longrightarrow \{h_i\}_{i=1}^{n\ell}$ суть изоморфизмы $G \rightarrow \mathbb{C}_{n\ell}$ и $H \rightarrow \mathbb{C}_{n\ell}$ соответственно.

Обозначим через Q оператор, ставящий в соответствие каждому набору $\{h_i\}_{i=1}^{n\ell}$ набор $\{h_i\}_{i=1}^{n\ell-r}$. Понятно, что V_+ есть сужение композиции $Q \circ V$ на подпространство H_+. Это сужение будет изоморфизмом пространств H_+ и $\mathbb{C}_{n\ell-r}$, если доказать, что Q взаимно однозначно отображает $V[H_+]$ на $\mathbb{C}_{n\ell-r}$.

В силу ($5'$) и леммы IУ набор $\{h_i\}_{i=1}^{n\ell}$ принадлежит $V[H_+]$ тогда и только тогда, когда

$$F(u,v) = \sum_{i+j=n\ell+1} g_j \overline{h_i} = 0$$

для любых наборов $\{g_j\}_{j=1}^{n\ell}$, принадлежащих $U[G_+]$. Заметим, что $U[G_+]$ есть линейное многообразие в $\mathbb{C}_{n\ell}$ размерности r, которое можно описать при помощи параметризации $U \circ U_+^{-1} : U_+[G_+] \longrightarrow U[G_+]$, т.е. с помощью системы линейных соотношений вида

$$g_j = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk} g_k , \qquad j = r+1, \ldots, n\ell .$$

Таким образом, $\{h_i\}_{i=1}^{n\ell}$ принадлежит $V[H_+]$ тогда и только тогда, когда для всех $\{g_j\}_{j=1}^{r}$ выполнено

$$\sum_{j=1}^{r} g_j \bar{h}_{nl-j+1} + \sum_{j=r+1}^{nl} \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk} g_k \right) \bar{h}_{nl-j+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} g_j \left(\bar{h}_{nl-j+1} + \sum_{k=r+1}^{nl} \alpha_{kj} \bar{h}_{nl-k+1} \right) = 0.$$

Иными словами, все наборы из $V[H_+]$ и только они удовлетворяют соотношениям

$$h_{nl-i+1} = -\sum_{k=r+1}^{nl} \bar{\alpha}_{ki} h_{nl-k+1}, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Это означает, что Q есть изоморфизм пространств $V[H_+]$ и $\mathbb{C}_{nl-r}$. Лемма доказана.

В частности, из леммы У и замечания к лемме П непосредственно следует приведенное в § 3 утверждение о принадлежности классу $\mathfrak{A}^m$ тех операторов, которые формально сопряжены с операторами этого же класса.

Литература

1. Х и л л е Э . , Ф и л л и п с Р . Функциональный анализ и полугруппы.- М.: ИЛ, 1962.- 830 с.
2. К р е й н С . Г . Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.- М.: Наука, 1967.- 464 с.
3. Я н г Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.- М.: Мир, 1974.- 488 с.
4. Р и с с Ф., С ё к е ф а л ь в и - Н а д ь Б. Лекции по функциональному анализу.- М.: Мир, 1979.- 589 с.
5. К а т о Т. Теория возмущений линейных операторов.- М.: Мир, 1972.- 740 с.
6. Д а л е ц к и й Ю . Л . , К р е й н М . Г . Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.- М.: Наука, 1970.- 536 с.
7. Б е л о н о с о в В . С . , З е л е н я к Т . И . Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений.- Новосибирск: изд-во НГУ, 1975.- 156 с.
8. З е л е н я к Т . И . О качественных свойствах решений квазилинейных смешанных задач для уравнений параболического типа.- Матем. сб., 1977, т. 104, с. 486-510.

9. В и ш н е в с к и й М. П. Интегральные множества нелинейных параболических систем.- Динамика сплошной среды, 1982, вып. 54, с. 74-84.

10. М у с и е н к о Е. И. Управление решением одной параболической задачи в окрестности неустойчивого стационарного решения.- Динамика сплошной среды, 1981, вып. 51, с.68-83.

11. M o r s e M. A generalization of the Sturm separation and comparison theorems in n-space. - Math.Ann., 1930, Bd.103, S.52-69.

12. M o r s e M. Variational analysis: critical extremals and sturmian extensions. - New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley & Sons,Inc., 1973. - 260 p.

13. K r e i n M. Sur les operateurs différentiels autoadjoints et leurs fonctions de Green symétriques. - Матем. сб., 1937, т. 2, с. 1023-1070.

14. Г а н т м а х е р Ф.Р., К р е й н М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.- М.-Л.: Гостехиздат, 1950.- 360 с.

15. Б е л о н о с о в В. С., В и ш н е в с к и й М. П., З е л е н я к Т. И., Л а в р е н т ь е в М. М. - мл. О качественных свойствах решений параболических уравнений.- Новосибирск, Б.и., 1983.- 20 с. (Препринт/ВЦ СО АН СССР, № 466.)

16. Б е л о в В.Я. Об одной формуле Морса в критическом случае.- Динамика сплошной среды, 1983, вып. 60, с. 139-150.

17. Б у л г а к о в А. Я., Г о д у н о в С. К. Численное определение одного из критериев качества устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.- Новосибирск, Б.и. 1981.- 58 с. (Препринт/ ИМ СО АН СССР.)

18. Б е л о н о с о в В. С. Об индексах неустойчивости неограниченных операторов.- ДАН СССР, 1983, т. 273, с. 11-14.

19. Ф о к и н М. В. О предельных множествах траекторий динамических систем градиентного типа.- Матем. сб., 1981, т. 116, с.502-514.

20. T a k a o N a m b u. Feedback stabilization of diffusion equations by a functional observer. - J. of Diff.Eq., 1982, v.43, p.257-280

21. G r i s v a r d P. Equations différentielles abstraites. - Ann.scient.Ec.Norm.Sup., 1969, 4-e série, t.2, p.311-395.

22. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида.- Труды МИ АН СССР, 1965, т.83, с.3-162.

23. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.- УМН, 1964, т.19, вып. 3, с. 53-161.

24. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. - Comm.Pure Appl.Math., 1962, v.15, p.119-147.

25. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы.- М.: Наука, 1969.- 528 с.

26. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.- М.: Мир, 1971.- 372 с.

27. Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г. Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения.- Матем. сб., 1969, т. 78, с. 446-472.

28. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.- М.: Наука, 1977.- 744 с.

29. Слободецкий Л.Н. Оценки в L_p решений эллиптических систем.- ДАН СССР, 1958, т. 123, с. 616-619.

30. Ланкастер П. Теория матриц.- М.: Наука, 1982.- 270 с.

31. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. 1. - Comm.Pure Appl.Math., 1959, v.12, p.623-727.

32. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. - Comm.Pure Appl. Math., 1964, v.17, p.35-92.