УДК 517.54:517.514

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБЛАСТЕЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

С. К. Водопьянов (Новосибирск)

В настоящей статье изучаются необходимые условия для продолжения функций за границу области определения с сохранением дифференциальных свойств. Областями определения функций являются открытые подмножества пространства R^n. Функции рассматриваются как элементы некоторых функциональных пространств. Поэтому, говоря о продолжении функций, принадлежащих некоторому функциональному пространству $N(G)$, из множества G на пространство R^n, мы считаем, что существует функциональное пространство $H(R^n)$ и ограниченный (не обязательно линейный) оператор продолжения

$$ext: N(G) \to H(R^n).$$

Это означает, что для любой функции $f \in N(G)$ ограничение на область G ее продолжения $ext f \in H(R^n)$ совпадает с данной функцией f, т.е.

$$ext f|_G = f, \quad f \in N(G), \quad \text{и} \quad \sup_{f \in N(G)} \frac{\|ext f\|_{H(R^n)}}{\|f\|_{N(G)}} = K < \infty.$$

Перечислим некоторые пространства дифференцируемых функций, которые являются модельными примерами для рассматриваемой в этой статье ситуации.

Пусть G - открытое множество n-мерного евклидова пространства.

I. Полунормированное пространство Соболева $\mathcal{L}_p^{(l)}(G)$ при целом $l>0$ состоит из локально суммируемых на G функций f, имеющих на G все обобщенные в смысле Соболева [I] производные порядка l и конечную полунорму

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p^{(l)}(G)} = \|\nabla_l f\|_{L_p(G)}.$$

Нормированное пространство Соболева $W_p^{(l)}(G)$ состоит из функций $f\in\mathcal{L}_p^{(l)}(G)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{W_p^l(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \|f\|_{\mathcal{L}_p^{(l)}(G)}.$$

2. Пусть $l=(l_1,l_2,\dots,l_n)$ - вектор с натуральными компонентами. Полунормированное анизотропное пространство $\mathcal{L}_p^l(G)$ состоит из локально суммируемых на G функций, имеющих на G все обобщенные производные $D_i^{l_i}f$ $(i=1,2,\dots,n)$ и конечную полунорму

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p^l(G)} = \sum_{i=1}^{n}\|D_i^{l_i}\|_{L_p(G)}.$$

Нормированное анизотропное пространство Соболева $W_p^l(G)$ (см. [2]) состоит из функций $f\in\mathcal{L}_p^{(l)}(G)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{W_p^l(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \|f\|_{\mathcal{L}_p^l(G)}.$$

3. Положим для натурального k и функции f :

$$\Delta^k(h;G)f(x) = \begin{cases} (\tau_h - I)^k f(x) & \text{при } [x,x+kh]\subset G, \\ 0 & \text{при } [x,x+kh]\not\subset G, \end{cases}$$

где $(\tau_h f)(x)=f(x+h)$, $[a,b]$ - отрезок, соединяющий точки a и b . Пусть $k>l$, $1\le p\le\infty$, $1\le\theta\le\infty$. Полунормированное пространство Никольского-Бесова $b_{p,\theta}^{(l)}(G)$ состоит из функций пространства $L_p(G)$, для которых конечна полунорма

$$\|f\|_{b_{p,\theta}^{(l)}(G)} = \left\{\int\limits_{|h|<\infty}\left|\frac{\|\Delta^k(h;G)f\|_{L_p}}{|h|^l}\right|^\theta\frac{dh}{|h|^n}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

При $\theta=\infty$ рассматривается полунорма

$$\|f\|_{b_{p,\infty}^{(l)}(G)} = \sup_h \frac{\|\Delta^k(h,G)f\|_{L_p}}{h^l}.$$

Нормированное пространство Никольского - Бесова $B_{p,\theta}^{(l)}(G)$ (см. [2]) состоит из функций $f\in b_{p,\theta}^{(l)}(G)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{(l)}(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \|f\|_{b_{p,\theta}^{(l)}(G)}.$$

4. Для координатного вектора e_i, $i=1,2,\dots,n$, положим

$$\Delta_i^k(t;G)f(x) = \Delta^k(te_i;G)f(x).$$

Пусть $l=(l_1,l_2,\dots,l_n)$ - вектор с положительными координатами и $k=(k_1,\dots,k_n)$ - мультииндекс, для которого $k_i>l_i$, $i=1,2,\dots,n$. Полунормированное анизотропное пространство Никольского - Бесова $b_{p,\theta}^{(l)}(G)$ состоит из функций $f\in L_p(G)$, для которых конечна полунорма

$$\|f\|_{b_{p,\theta}^l(G)} = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^\infty \left| \frac{\|\Delta_i^{k_i}(h^{\frac{l^*}{l_i}};G)f\|_{L_p(G)}}{h^{l^*}} \right|^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

где $\dfrac{1}{l^*} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{l_i}$.

При $\theta=\infty$ рассматривается полунорма

$$\|f\|_{b_{p,\infty}^l(G)} = \sum_{i=1}^n \sup_{0<h<\infty} \frac{\|\Delta_i^{k_i}(h^{\frac{l^*}{l_i}};G)f\|_{L_p(G)}}{h^{l^*}}.$$

Нормированное пространство Никольского - Бесова $B_{p,\theta}^l(G)$ (см. [2]) состоит из функций $f\in b_{p,\theta}^l(G)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^l(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \|f\|_{b_{p,\theta}^l(G)}.$$

Опишем основные объекты, изучаемые в этой статье, на примере одного из перечисленных функциональных пространств.

Пусть S_p^l - одно из полунормированных пространств, характеризуемое параметрами гладкости l (численным или векторным) и суммируемости $1\le p\le\infty$ (параметр θ в случае пространств Никольского - Бесова пока в рассмотрение не принимается). С пространством S_p^l связываются два объекта:

I) однопараметрическая группа гомеоморфизмов $H_\mu: R^n\to R^n$, $\mu\in R^+$, определенная по правилу:

$$R^n \ni x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \longrightarrow H_\mu(x) = (\mu^{\frac{l^*}{l_1}}x_1,\dots,\mu^{\frac{l^*}{l_n}}x_n),$$

где $\dfrac{1}{l^*} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{l_i}$. (При численном значении l или векторном с одинаковыми компонентами мы имеем дело с обычными гомотетиями $H_\mu(x)=\mu x$);

2) произвольная ℓ-метрика в R^n (см. [2]), например,

$$\rho_\ell(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^{\frac{2\ell_i}{\ell^*}}},\quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in R^n.$$

(При численном значении ℓ или векторном с одинаковыми компонентами $\rho_\ell(x,y)$ есть евклидово расстояние между точками x и y .)

Прямым вычислением проверяется, что для любого отображения H_μ и любой функции $f\in S_p^\ell(R^n)$ функция

$$(H_\mu^* f)(x)=f(H_\mu(x)),\quad x\in R^n,$$

также принадлежит пространству $S_p^\ell(R^n)$ и при этом

$$\|H_\mu^* f\|_{S_p^\ell(R^n)}=\mu^\sigma\|f\|_{S_p^\ell(R^n)},$$

где $\sigma=\ell^*-\frac{\ell^*}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\ell_i}$.

Непосредственно видно, что ℓ-метрика $\rho_\ell(x)$ при действии гомеоморфизма H_μ изменяется по закону

$$\rho_\ell(H_\mu(x))=\mu\rho_\ell(x).$$

Отмеченное свойство нормы пространства S_p^ℓ и ℓ-метрики при действии группы гомеоморфизмов $\{H_\mu\},\mu\in R^+$, накладывает определенные условия на геометрию области G , для которой существует оператор продолжения $ext: S_p^\ell(G)\to S_p^\ell(R^n)$.

Промежуточный язык, связывающий геометрию функционального пространства S_p^ℓ и геометрию области G , основывается на понятии емкости. Это понятие вводится в первом параграфе, где приводятся также необходимые для дальнейшего свойства емкости.

В этой статье мы рассматриваем случай, который соответствует неотрицательному значению σ , т.е.

$$\sigma=\ell^*-\frac{\ell^*}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\ell_i}\geqslant 0.$$

Случай $\sigma\leqslant 0$ будет рассмотрен в последующих публикациях.

Существование оператора продолжения

$$ext: S_p^\ell(G)\to S_p^\ell(R^n)$$

влечет эквивалентность относительного расстояния [3] и ℓ-метрики в области G . Относительное расстояние (оно введено Мазуркевичем в

1910 г.) для двух точек $x, y \in G$ есть величина

$$\rho_G(x,y) = \inf_\gamma (\mathrm{diam}\, \gamma),$$

где нижняя грань берется по всем кривым $\gamma \subset G$, соединяющим в G точки x и y, а $\mathrm{diam}\,\gamma$ есть ℓ-диаметр кривой γ, т.е.

$$\mathrm{diam}\,\gamma = \sup_{a,b \in \gamma} \rho_\ell(a,b).$$

Основным результатом работы является

Теорема 0.1. Для любого ограниченного оператора продолжения

$$ext: S_p^\ell(G) \to S_p^\ell(R^n), \quad p \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\ell_i},$$

существует такая постоянная C, что

$$\rho_G(x,y) \leq C\rho_\ell(x,y) \tag{0.1}$$

для любых точек $x, y \in G$. (В случае нормированного варианта WS_p^ℓ пространства S_p^ℓ неравенство (0.1) выполняется локально, т.е. для всех точек $x, y \in G$, для которых $\rho(x,y) \leq 1$.)

Сформулированная теорема является следствием теоремы 2.2, которая устанавливает оценки снизу на норму оператора продолжения

$$ext: S_p^\ell(G) \to S_p^\ell(R^n)$$

при условии, что в области определения G для некоторого C выполняется (0.1). Эта оценка снизу зависит только от пространства $S_p^\ell(R^n)$ и постоянной C в условии (0.1).

Приведем основные этапы изучения вопроса и библиографию по нему последних лет, не вошедшую в подробный список литературы в монографиях [2,4].

В работах Х. Уитни [5] и М. Хестенса [6] были установлены результаты о продолжении дифференцируемых функций класса C^k. Теорема о продолжении классов Соболева для областей с достаточно гладкой границей была доказана в работах С.М Никольского [7], В.М. Бабича [8] и для областей с липшицевой границей в работах А.П. Кальдерона [9], Ю.К. Солнцева [10], К.Т. Смита [11], О.В. Бесова и В.П. Ильина [12,13], В.И. Буренкова [14, 15].

Автор совместно с В.М. Гольдштейном [16-18] получили необходимые и достаточные условия продолжения для функций класса L_2^1 из плоских односвязных областей. Это условие состоит в том, что граница области должна

быть квазиокружностью, т.е. образом окружности при квазиконформном гомеоморфизме плоскости на себя. Результат легко модифицируется для конечносвязных плоских областей. Напомним, что Ю.Д. Бураго и В.Г. Мазья [19] получили необходимые и достаточные условия продолжения для функций класса BV. Если плоская односвязная область и ее дополнение удовлетворяют одновременно условию продолжения для класса BV, то из результата работы [19] следует, что граница области является квазиокружностью. В работе [18] доказано также, что условие квазиокружности является достаточным для продолжения классов $\mathcal{L}_p^1$ из плоских односвязных областей.

Позднее для областей, введенных в рассмотрение Л. Лихенштейном, П. Джонс [20] доказал возможность продолжения функций классов Соболева $W_p^{(\ell)}$. Результат П.Джонса является частным случаем работы П.В. Шварцмана [21-22], которая базируется на более ранней работе [23] того же автора и описании пространств дифференцируемых функций в терминах локальных приближений, данном Ю.А. Брудным [24-25].

Напомним, что открытое множество $G \subset R^n$ удовлетворяет условию Лихенштейна, если существуют положительные постоянные $\varepsilon=\varepsilon(G), \delta=\delta(G)$ такие, что

I) для любого ℓ-шара Q с центром в G и радиусом $r(Q)\le\delta$ выполнено неравенство

$$diam\,(Q\cap G)\geqslant \varepsilon r(Q);$$

2) для любых точек $x,y\in G$ с $\rho_\ell(x,y)<\delta$ существует непрерывная кривая $\gamma\subset G$, соединяющая x и y и такая, что для любого $z\in\gamma$ выполняется

$$\rho_\ell(x,z)+\rho_\ell(z,y)\le\frac{1}{\varepsilon}\rho_\ell(x,y), \tag{0.1'}$$

$$\rho_\ell(z,R^n\setminus G)\geqslant\frac{1}{\varepsilon}\min\left(\rho_\ell(x,z),\rho_\ell(z,y)\right). \tag{0.2}$$

(Здесь ρ_ℓ есть произвольная ℓ-метрика.)

В [22], в частности, доказано, что для области G, удовлетворяющей условию Лихенштейна, существует оператор продолжения для любого из модельных нормированных пространств.

Заметим, что п.I) в условии Лихенштейна выполняется для любого связного множества G. В п. 2) неравенство (0.1') легко переформулируется в терминах относительного расстояния: поскольку

$$diam\,\gamma=\rho_\ell(z_1,z_2)\le M(\rho_\ell(x,z_1)+\rho_\ell(z_1,y)+\rho_\ell(x,z_2)+\rho_\ell(z_2,y))\le\frac{M}{\varepsilon}\rho_\ell(x,y),$$

где M зависит лишь от размерности пространства и ℓ-метрики, то из (0.I′) следует, что для $C=\frac{M}{\varepsilon}$

$$\rho_G(x,y)\le C\rho_\ell(x,y),$$

т.е. относительное расстояние в G эквивалентно ℓ-метрике. С другой стороны, если для любых точек $x,y\in G$ с $\rho_\ell(x,y)\le\delta$ выполняется (0.I) с постоянной C, не зависящей от выбора точек x и y, то такие точки x и y могут быть соединены кривой γ, для которой

$$\operatorname{diam}\gamma\le 2C\rho_\ell(x,y).$$

Отсюда для любой точки $z\in\gamma$

$$\rho_\ell(x,z)+\rho_\ell(z,y)\le 2\operatorname{diam}\gamma\le 4C\rho_\ell(x,y),$$

т.е. выполняется (0.I′) с $\varepsilon=\frac{1}{4C}$.

Следовательно, п.2 в условии Лихенштейна мы можем переформулировать следующим образом:

2 а) относительное расстояние в области G локально эквивалентно ℓ-метрике, т.е. для любых точек $x,y\in G$ с $\rho_\ell(x,y)<\delta$ имеет место неравенство

$$\rho_G(x,y)\le C\rho_\ell(x,y),$$

где постоянная C не зависит от выбора точек x и $y\in G$;

2 в) любые две точки $x,y\in G$ с $\rho_\ell(x,y)\le\delta$ могут быть соединены непрерывной кривой $\gamma\subset G\cap Q(x,2C\rho_\ell(x,y))$, для любой точки $z\in\gamma$ которой выполняется

$$\rho_\ell(z,R^n\setminus G)\ge\frac{1}{\varepsilon}\min(\rho_\ell(x,z),\rho_\ell(z,y)).$$

На плоскости между условиями 2 а) и 2 в) наблюдается определенная двойственность: в ограниченной конечносвязной области $G\subset R^2$ условия 2 а) и 2 в) выполняются тогда и только тогда, когда условие 2 а) выполняется как для области G, так и для дополнительной области $G^*=R^2\setminus\bar G$.

Таким образом, имеет место

П р е д л о ж е н и е 0.2. <u>Для ограниченной конечносвязной области $G\subset R^2$ следующие условия эквивалентны</u>:

а) <u>область G удовлетворяет условию Лихенштейна</u>;

в) <u>дополнительная область $G^*=R^2\setminus G$ удовлетворяет условию Лихенштейна</u>;

с) <u>как в области G, так и в дополнительной области $G^*=R^2\setminus\bar G$ относительное расстояние эквивалентно ℓ-метрике</u>.

Комбинацией теоремы 0.I и предложения 0.2 с результатами П.В. Шварц-

мана доказывается следующая

Т е о р е м а   0 . 3 . Пусть $G \subset R^2$-ограниченная конечносвязная область. Для существования ограниченных операторов продолжения

$$ext: S_p^{\ell}(G) \to S_p^{\ell}(R^2), \quad ext^*: S_p^{\ell}(G^*) \to S_p^{\ell}(R^2), \; p \geq \frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} \;,$$

где S_p^{ℓ} - любое из модельных нормированных пространств, необходимо и достаточно, чтобы как в области G, так и в дополнительной области $G^* = R^2 \setminus \bar{G}$ относительное расстояние было эквивалентно ℓ-метрике.

В изотропном случае, а также в случае числового параметра гладкости, когда ℓ-метрика совпадает с евклидовой, ограниченная конечносвязная область тогда и только тогда удовлетворяет условию Лихенштейна, когда ее граница состоит из квазиокружностей и точек.

После работ [16-18] необходимые условия продолжения в случае числового параметра гладкости изучались в работах [26-37], принадлежащих в основном В.М. Гольдштейну. Теорема 0.3 для пространств Соболева $\mathcal{L}_p^{(\ell)}(R^2)$ и $W_p^{(\ell)}(R^2)$ была доказана в [26-30], для пространства Бесова $B_{p,\theta}^{(\ell)}(R^2)$ в [31-32]. В работе [33] введены в рассмотрение области, удовлетворяющие "условию с диаметром дуги", которые в нашей терминологии есть в точности те, для которых относительное расстояние эквивалентно евклидову. В этой же работе теорема 0.1 доказана для пространств Соболева $\mathcal{L}_p^{(\ell)}(R^n)$ и $W_p^{(\ell)}(R^n)$, а для пространств Бесова $B_{p,\theta}^{(\ell)}(R^n)$ теорема 0.1 доказана в работах [34-35]. В работах [34-36], отправляясь от случая пространств Соболева или Бесова при $\ell p > n$, выделяются свойства емкости, которые в абстрактной ситуации приводят к теореме, аналогичной теореме 0.1.

Настоящая работа является продолжением статьи [37], где в абстрактном варианте доказаны теоремы, позволяющие получать необходимые условия продолжения для широкого набора пространств, включая анизотропный случай, который ранее не рассматривался. Во втором параграфе мы получаем для абстрактных функциональных пространств геометрические условия продолжения в более общей по сравнению с предыдущими работами ситуации, когда оператор продолжения может ухудшать дифференциальные свойства функций. Систематическое изучение в § 3 геометрии группы ℓ-гомотетий $\{H_\mu\}$, $\mu \in R^+$, в пространстве R^n и геометрии группы $\{H_\mu^*\}$, $\mu \in R^+$, в пространстве функций позволяет свести получение необходимых условий продолжения к изучению емкостных характеристик простейших множеств: емкости кольца и емкости Тейхмюллера. В конце статьи приводятся некоторые приложения полученных результатов.

§ I. Емкость и условие продолжения

Мы рассматриваем полунормированные пространства функций, т.е. линейные подпространства $N(G)$ пространства измеримых функций $M(G)$, определенных на открытом множестве G евклидова пространства R^n и являющихся одновременно полунормированными пространствами. Это значит, что для каждой функции $f \in N(G)$ определена некоторая полунорма $\|f\|_{N(G)}$. Напомним, что в отличие от нормы из $\|f\|_{N(G)} = 0$ не следует $f(x)=0$ почти всюду.

Пусть $N(G)$ - полунормированное пространство функций, а (F_0, F_1) - пара множеств, содержащихся в замыкании множества G. Функция $f \in N(G)$ называется N-допустимой для пары множеств (F_0, F_1), если $f(x)=1$ для всех x, принадлежащих некоторой окрестности множества F_1 и $u(x)=0$ для всех x, принадлежащих некоторой окрестности множества F_0 (имеются в виду окрестности множеств F_0 и F_1 относительно области G, т.е. открытые множества V_0 и V_1 такие, что $F_i \cap G \subset V_i \subset G$ и $\overline{V}_i \supset F_i$, $i=0,1$).

Множество всех функций из $N(G)$, допустимых для пары множеств (F_0, F_1) обозначим символом $\mathfrak{N}(F_0, F_1; N(G))$.

Величина

$$C(F_0, F_1; N(G)) = \inf_{f \in \mathfrak{N}(F_0, F_1; N(G))} \|f\|_{N(G)}$$

называется N-емкостью пары множеств F_0, F_1 в пространстве $N(G)$.

Если для пары (F_0, F_1) допустимых функций не существует, то полагаем $C(F_0, F_1; N(G)) = \infty$.

Мы приведем здесь лишь те свойства емкости, которые нам понадобятся для доказательства основных результатов. Подробное обсуждение этой концепции можно найти, например, в [30].

С в о й с т в о I.I. <u>Монотонность емкости относительно пары множеств</u>. Если пара множеств (F_0', F_1') содержится в паре множеств (F_0, F_1), т.е. $F_i' \subset F_i$, $i=0,1$, то

$$C(F_0', F_1'; N(G)) \leq C(F_0, F_1; N(G)).$$

Это неравенство прямо следует из определения, поскольку

$$\mathfrak{N}(F_0, F_1; N(G)) \subset \mathfrak{N}(F_0', F_1'; N(G)).$$

Следующее свойство связывает между собой емкости одной и той же пары множеств (F_0, F_1) в полунормированных пространствах $N(G)$ и $N(R^n)$. Мы считаем далее, что полунормированные пространства $N(G)$ и $N(R^n)$ связаны между собой следующим соотношением: для любой функции $f \in N(R^n)$ ее сужение

$g=f|_G$ принадлежит пространству $N(G)$ и оператор сужения $\tau: N(R^n)\to$ $\to N(G)$ является ограниченным, т.е. $\|\tau(f)\|_{N(G)} \le k\|f\|_{N(R^n)}$, где k - норма оператора сужения.

Свойство I.2. Монотонность относительно области определения. Для любой пары множеств $F_0, F_1 \subset \bar{G}$ справедливо неравенство

$$C(F_0,F_1; N(G)) \le k\, C(F_0,F_1; N(R^n)).$$

Доказательство следует из определения емкости и соотношения

$$\mathfrak{N}(F_0,F_1; N(R^n)) \longrightarrow \mathfrak{N}(F_0,F_1; N(G)),$$

определенного по правилу

$$\mathfrak{N}(F_0,F_1; N(R^n)) \ni f \longrightarrow g=f|_G \in \mathfrak{N}(F_0,F_1; N(G)).$$

Следующее свойство является в некотором смысле обращением свойства 2. Мы говорим, что открытое множество $G\subset R^n$ удовлетворяет условию продолжения, если существуют полунормированное пространство $H(R^n)$ и ограниченный оператор продолжения (не обязательно линейный) $ext: N(G)\to H(R^n)$, т.е. такой оператор, что для любой функции $f\in N(G)$

$$ext f|_G \equiv f \qquad \text{и} \quad \sup_{f\in N(G)} \frac{\|ext f\|_{H(R^n)}}{\|f\|_{N(G)}} = K < \infty.$$

Предложение I.3. Пусть некоторое открытое множество $G\subset R$ удовлетворяет условию продолжения. Тогда для пары множеств (F_0,F_1), содержащихся в G, справедливо неравенство

$$C(F_0,F_1; H(R^n)) \le K\,C(F_0,F_1; N(G)),$$

где K - постоянная из условия продолжения.

Доказательство. Рассмотрим произвольную допустимую для пары (F_0,F_1) функцию $f\in \mathfrak{N}(F_0,F_1; N(G))$. Ее продолжение $ext f$ является допустимой для пары (F_0,F_1) функцией в $H(R^n)$ и

$$\|ext f\|_{H(R^n)} \le K\|f\|_{N(G)}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$C(F_0,F_1; H(R^n)) \le K\|f\|_{N(G)}.$$

Так как допустимая функция f выбиралась произвольно, то предложение доказано.

Полученное в предложении I.3 емкостное условие продолжения можно интерпретировать как геометрические условия на границу области. Эти условия формулируются в следующем параграфе.

Мы закончим этот параграф формулировкой одного условия, которое выполняется для всех модельных пространств, перечисленных во введении.

Пусть M - множество, содержащееся в области G. Звездной окрестностью множества M относительно области G называется множество

$$S_G(M)=\{y\in G: \exists x\in M\ ([x,y]\subset G)\}.$$

(Здесь $[x,y]$ - отрезок, соединяющий точки x и y.) Очевидно, что $M\subset S_G(M)$ и $S_G(M)$ - всегда открытое множество, поскольку G открыто.

У с л о в и е   н е в и д и м о с т и. Пусть $V\subset G$ - открытое множество и функция $f\in N(G)$ равна нулю во всех точках множества $S_G(V)\setminus\overline{V}$. Тогда функция

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\overline{V},\\ 0, & x\notin\overline{V},\end{cases}$$

также принадлежит пространству $N(G)$ и при этом

$$\|\tilde{f}\|_{N(G)}\leq \varkappa\|f\|_{N(G)}.$$

Непосредственно проверяется, что для всех модельных пространств условие невидимости выполняется с постоянной $\varkappa=1$.

Из сформулированного условия на функции пространства $N(G)$ имеем следующее свойство емкости:

С в о й с т в о   I.4. Пусть множество F_1 содержится в открытом множестве $V\subset G$ и емкость $C(S_G(V)\setminus V,\ F_1;N(G))$ конечна. Тогда емкость $C(G\setminus V, F_1; N(G))$ также конечна и справедливо неравенство

$$C(G\setminus V,F_1;N(G))\leq\varkappa C(S_G(V)\setminus V,F_1;N(G)).$$

Чтобы проверить это свойство, рассмотрим какую-нибудь допустимую для пары $(S_G(V)\setminus V, F_1)$ функцию $f\in N(G)$. Функция f равна нулю в окрестности $S_G(V)\setminus V$, а по условию невидимости функция $\tilde{f}$ равна нулю в окрестности $G\setminus V$, т.е. функция $\tilde{f}$ является допустимой для пары $(G\setminus V, F_1)$ и при этом

$$\|\tilde{f}\|_{N(G)}\leq\varkappa\|f\|_{N(G)}.$$

Отсюда имеем неравенство

$$C(G\setminus V,F_1;N(G))\leq\varkappa\|f\|_{N(G)},$$

а так как допустимая функция $f\in\mathfrak{N}(S_G(V)\setminus V,F_1;N(G))$ выбиралась

произвольно, то свойство 3 доказано.

§ 2. Геометрические условия продолжения

В этом параграфе мы даем геометрическое истолкование емкостного условия продолжения, сформулированного в предложении I.3.

Для этого рассмотрим семейство $\{Q(\lambda),\ 0<\lambda<\infty\}$ множеств, удовлетворяющих следующим условиям:

а) каждое множество $Q(\lambda)$ открыто, выпукло и центрально-симметрично;

в) $\bigcap\limits_{\lambda} Q(\lambda)=\{0\}$; $\bigcup\limits_{\lambda} Q(\lambda)=R^n$;

с) для любых $0<\lambda<\mu<\infty$ $\quad Q(\lambda)\subsetneqq Q(\mu)$;

d) $\bigcup\limits_{0<\lambda<\mu} Q(\lambda)=Q(\mu)$; $\quad \bigcap\limits_{\lambda<\mu<\infty} Q(\mu)=\overline{Q}(\lambda)$.

Для любой точки $a\in R^n$ семейство $\{Q(a,\lambda),\ 0<\lambda<\infty\}$ определяется соотношением $Q(a,\lambda)=a+Q(\lambda)$, $0<\lambda<\infty$.

При наложенных условиях на семейство $Q(\lambda)$ неотрицательная функция $\rho: R^n\times R^n\to R$, определенная по правилу

$$\rho(x,y)=\inf\{\lambda: Q(x,\lambda)\ni y\},$$

является непрерывной и обладает следующими свойствами:

I) $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

3) для любых двух точек x и y , для которых $\rho(a,x)\leq\rho(a,y)$, имеем

$$\rho\left(a,\tfrac{1}{2}(x+y)\right)\leq\rho(a,y);$$

4) $\rho(x,y)$ инвариантно относительно переноса;

5) открытый ρ-шар $\{y:\rho(a,y)<\lambda\}$ радиуса λ есть множество $Q(a,\lambda)$.

Обратно, всякая непрерывная неотрицательная функция $\rho: R^n\times R^n\to R$, обладающая свойствами I) - 4), определяет семейство центрально-симметричных выпуклых множеств

$$Q(\lambda)=Q(0,\lambda)=\{x:\rho(0,x)<\lambda\},$$

удовлетворяющих условиям а) - d). Функцию $\rho: R^n\times R^n\to R$, удовлетворяющую условиям I) - 4), назовем ρ-метрикой.

Открытое множество

$$D_{r,R}(a)=\begin{cases} Q(a,R)\setminus\{a\}, & r=0,\\ Q(a,R)\setminus\overline{Q}(a,r), & 0<r<R,\end{cases}$$

определенное для любых двух чисел $0\le r<R<\infty$ называется кольцом. Граничными компонентами кольца являются ρ-сферы: внутренняя $S(a,r)=\{x:\rho(a,x)=r\}=\bar{Q}(a,r)\setminus Q(a,r)$ при $r>0$ и точка a при $r=0$, и внешняя $S(a,R)=\{x:\rho(a,x)=R\}=\bar{Q}(a,R)\setminus Q(a,R)$.

Введем в рассмотрение емкость кольца

$$C_a(r,R)=\begin{cases} C(R^n\setminus Q(a,R),\{a\};N(R^n)), & r=0,\\ C(R^n\setminus Q(a,R),\bar{Q}(a,r);N(R^n)), & r>0.\end{cases}$$

Из свойств емкости и семейства $Q(a,r)$ следует, что для каждого фиксированного R емкость кольца $C_a(r,R)$ является неубывающей функцией от r при $0\le r<R$ и для каждого фиксированного r - невозрастающей функцией от R при $r<R<\infty$.

Л е м м а 2.1. Предположим, что некоторое открытое множество G удовлетворяет условию продолжения и условию невидимости и пересечение некоторого шара $Q(a,R)$ с областью G содержит некоторую непустую связную компоненту V, которая пересекается с замкнутым ρ-шаром $Q(a,\rho)$, $a\le\rho<R$.

Тогда для любых замкнутых множеств $F_1\subset V\cap Q(a,\rho)$ и $F_0\subset G\setminus V$

$$C(F_0,F_1;H(R^n))\le k\varkappa K\,C_a(\rho,R),$$

где k - норма оператора сужения, K - норма оператора продолжения и $\varkappa$ - постоянная из условия невидимости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу ограниченности оператора продолжения, по предложению 1.3, имеем

$$C(F_0,F_1;H(R^n))\le KC(F_0,F_1;N(G)).$$

Так как, по условию, $F_0\subset G\setminus V$, то в силу монотонности емкости, по свойству 1.1, неравенство продолжается как

$$KC(F_0,F_1;N(G))\le KC(G\setminus V,F_1;N(G)),$$

и, используя далее условие невидимости (свойство 1.4), запишем

$$KC(G\setminus V,F_1;N(G))\le\varkappa KC(S_G(V)\setminus V,F_1;N(G)).$$

Вспомним теперь, что V есть одна из связных компонент открытого множества $G\cap Q(a,R)$, и поэтому по определению звездной окрестности множество $S_G(V)$ не пересекается со связными компонентами множества $G\cap Q(a,R)$, отличными от V. Поэтому в силу монотонности емкости (свойство 1.1) имеем

$$\varkappa KC(S_G(V)\setminus V,F_1;N(G))\le$$

$$\leq æKC(S_G(V)\setminus Q(a,R), F_1; N(G)) \leq$$

$$\leq æKC(S_G(V)\setminus Q(a,R), G\cap \bar{Q}(a,\rho); N(G)).$$

Последний переход мы делаем, используя монотонность относительно области (свойство I.2), а затем опять применяем свойство I.I:

$$æKC(S_G(V)\setminus Q(a,R), G\cap \bar{Q}(a,\rho); N(G)) \leq$$

$$\leq kæKC(S_G(V)\setminus Q(a,R), G\cap \bar{Q}(a,\rho); N(R^n)) \leq$$

$$\leq kæKC(R^n\setminus Q(a,R), \overline{Q(a,\rho)}; N(R^n)) = kæKC_a(\rho,R).$$

Выпишем теперь крайние выражения этой цепочки неравенств:

$$C(F_0,F_1; H(R^n)) \leq kæKC_a(\rho,R).$$

Лемма доказана.

Метрика ρ, существование которой сопутствует семейству $\{Q(\lambda), 0<\lambda<\infty\}$, введенному в начале параграфа, определяет для каждой области $G\subset R^n$ относительное расстояние $\rho_G(x,y)$, $x,y\in G$:

для $x,y\in G$ положим

$$\rho_G(x,y) = \inf_\gamma (diam\,\gamma),$$

где нижняя грань берется по всем кривым $\gamma\subset G$, соединяющим в G точки x и y, и $diam\,\gamma$ есть ρ-диаметр γ, т.е. $diam\,\gamma = \sup\limits_{a,b\in\gamma} \rho(a,b)$.

Понятно, что относительное расстояние определено лишь для точек, принадлежащих одной связной компоненте множества G.

Очевидно, всегда имеем неравенство

$$\rho(x,y) \leq \rho_G(x,y) \qquad \text{для всех } x,y\in G.$$

Если для какой-нибудь постоянной C справедливо неравенство

$$\rho_G(x,y) \leq C\rho(x,y) \qquad \text{для всех } x,y\in G,$$

то мы говорим, что относительное расстояние и ρ-метрика эквивалентны в области G. Такие множества так же, как и в евклидовом случае [28,33], локальносвязны в каждой граничной точке.

Нашей ближайшей целью является геометрическая интерпретация емкостного условия продолжения. Специализируя поведение емкости, мы в целом ряде случаев доказываем, что задача о продолжении может быть решена лишь в

областях, в которых ρ-метрика и относительное расстояние эквивалентны.

Напомним ситуацию, которую мы изучаем. Мы рассматриваем три функциональных пространства $N(R^n), N(G)$ и $H(R^n)$, связанных между собой следующей диаграммой:

$$N(R^n) \xrightarrow{r} N(G) \xrightarrow{ext} H(R^n),$$

где $r: N(R^n) \to N(G)$ - оператор ограничения с нормой, равной k, а $ext: N(G) \to H(R^n)$ - оператор продолжения с нормой, равной K. Нас интересуют геометрические условия на область G, которые следуют из существования оператора продолжения.

Определим прежде всего емкость, которая в случае $H(R^n)=\mathcal{L}^1_n(R^n)$ называется емкостью Тейхмюллера [38] : положим

$$T_a(r,R) = \inf_{F_0,F_1} C(F_0,F_1; H(R^n)),$$

где $0<r<R<\infty$ и нижняя грань берется по всем замкнутым связным множества F_0,F_1 кольца $D_a(r,R)$, пересекающимся как с внутренней $Q(a,r)$, так и с внешней $Q(a,R)$ граничными компонентами кольца. Отметим здесь одно свойство емкости Тейхмюллера $T_a(r,R)$, которое следует из монотонности емкости: при фиксированом R функция $T_a(r,R)$, $0<r<R$, является невозрастающей функцией от r, а при фиксированном r функция $T_a(r,R)$, $r<R<\infty$, является неубывающей функцией от R.

Введем теперь в рассмотрение следующие функции:

$$\Phi_\alpha(c) = \inf_{\substack{0<r^{1-\alpha}\le \frac{c}{4} \\ a\in R^n}} \frac{T_a(r,\frac{1}{2}Cr^\alpha)}{C_a(\frac{1}{2}Cr^\alpha, Cr^\alpha)} \quad \text{и} \quad \psi_\alpha(c) = \inf_{\substack{0<r^{1-\alpha}\le \frac{c}{4} \\ a\in R^n}} \frac{T_a(r,2r)}{C_a(2r,Cr^\alpha)},$$

в определении которых емкость кольца вычисляется в пространстве $N(R^n)$, число $\alpha\in(0,1]$, а условие $r^{1-\alpha}\le\frac{c}{4}$ накладывается для корректного определения емкостей $T_a(r,\frac{1}{2}, Cr^\alpha)$ и $C_a(2r,Cr^\alpha)$. Заметим, что нижняя грань при $\alpha=1$ берется по всем r при условии, что $C\geq 4$. Из монотонности емкости кольца и емкости Тейхмюллера следует, что функции $\Phi_\alpha(C)$ и $\psi_\alpha(C)$ не убывают с увеличением C.

Т е о р е м а 2 . 2 . <u>Пусть открытое множество G удовлетворяет условиям невидимости и продолжения. Тогда если величина</u>

$$C_0 = \sup_{\substack{x,y\in G \\ \rho^{1-\alpha}(x,y)\le 1}} \frac{\rho_G(x,y)}{2^{1-\alpha}\rho^{\alpha}(x,y)}$$

конечна и $C_0 > 4$, то для нормы оператора продолжения имеют место оценки снизу

$$\frac{\Phi_\alpha(C_0-0)}{k\varkappa} \le K \quad \text{и} \quad \frac{\Psi_\alpha(C_0-0)}{k\varkappa} \le K.$$

Т е о р е м а 2.3. Пусть открытое множество G удовлетворяет условиям невидимости и продолжения. Тогда если норма оператора продолжения равна K и $\bar{C}(\tilde{C})$ - такое число, большее 4, что $\Phi_\alpha(\bar{C}) > k\varkappa K$ $(\Psi_\alpha(\tilde{C}) > k\varkappa K)$, то в каждой связной компоненте множества G относительное расстояние эквивалентно ρ-метрике с показателем Гёльдера, равным α, при условии $\rho(x,y) \le \rho^{\alpha}(x,y)$:

$$\rho_G(x,y) \le 2^{1-\alpha}\bar{C}\rho^{\alpha}(x,y) \quad (\rho_G(x,y) \le 2^{1-\alpha}\tilde{C}\rho^{\alpha}(x,y)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о обеих теорем проведем одновременно. Начнем с теоремы 2.2. Пусть C - произвольное число $4 < C < C_0$. Тогда найдутся точки $x, y \in G_i$ (G_i - какая-нибудь связная компонента G), для которых

$$\rho_G(x,y) > 2^{1-\alpha} C\rho^{\alpha}(x,y).$$

Положим $\rho(x,y) = 2r$. Условие $\rho_G(x,y) > 2^{1-\alpha} C\rho^{\alpha}(x,y) = 2Cr^{\alpha} \ge 2Cr$ означает, что точки x и y лежат в различных связных компонентах множества $G_i \cap Q(a, Cr^{\alpha})$, где $a = \frac{1}{2}(x+y)$. (Если бы точки x и y принадлежали одной связной компоненте множества $G_i \cap Q(a, Cr^{\alpha})$, то $\rho_G(x,y)$ было бы меньше $2Cr^{\alpha}$.)

Рассмотрим вначале случай функции $\Phi_\alpha(C)$. В лемме 2.I положим $R = Cr^{\alpha}$, $\rho = \frac{1}{2}Cr^{\alpha}$, а в качестве F_0 и F_1 возьмем такие замкнутые связные множества в $D_{r,\rho}(a) \cap G$, пересекающиеся как с внутренней, так и с внешней компонентами кольца $D_{r,\rho}(a)$, что F_1 (F_0) принадлежит связной компоненте множества $Q(a,R) \cap G_i$, содержащей точку $x(y)$. Тогда, по лемме 2.I,

$$C(F_0, F_1; H(R^n)) \le k\varkappa K C_a\left(\tfrac{1}{2}Cr^{\alpha}, Cr^{\alpha}\right)$$

или

$$T_a\left(r, \tfrac{1}{2}Cr^\alpha\right) \leq k\varkappa K C_a\left(\tfrac{1}{2}Cr^\alpha, Cr^\alpha\right),$$

откуда немедленно получаем

$$\Phi_\alpha(C) \leq \frac{T_a\left(r, \frac{1}{2}Cr^\alpha\right)}{C_a\left(\frac{1}{2}Cr^\alpha, Cr^\alpha\right)} \leq k\varkappa K.$$

Так как C выбирались произвольно из условия $4 < C < C_0$, то утверждение теоремы для функции $\Phi_\alpha(C)$ доказано.

Рассмотрим теперь случай функции $\psi_\alpha(C)$. В лемме 2.I положим $\rho = 2r$, $R = Cr^\alpha$, а в качестве F_0, F_1 возьмем замкнутые связные множества в $D_{r,\rho}(a) \cap G_i$ так же, как и в предыдущем случае. Тогда, по лемме 2.I,

$$C(F_0, F_1; H(R^n)) \leq k\varkappa K C_a(2r, Cr^\alpha)$$

или

$$T_a(r, 2r) \leq k\varkappa K C_a(2r, Cr^\alpha),$$

откуда немедленно получаем

$$\Phi_\alpha(C) = \frac{T_a(r, 2r)}{C_a(2r, Cr^\alpha)} \leq k\varkappa K.$$

Отсюда следует утверждение теоремы для функции ψ_α.

Переходим теперь к доказательству теоремы 2.3. Предположим противное. Пусть найдутся две точки x, y, принадлежащие одной связной компоненте множества G такие, что $\rho(x,y) \leq \rho^\alpha(x,y)$ и

$$\rho_G(x,y) > 2^{1-\alpha}\bar{C}\rho^\alpha(x,y) \quad \left(\rho_G(x,y) > 2^{1-\alpha}\tilde{C}\rho^\alpha(x,y)\right).$$

Тогда мы попадаем в ситуацию начала доказательства и, как уже было показано в этом случае, имеем

$$\Phi_\alpha(\bar{C}) \leq k\varkappa K \qquad \left(\psi_\alpha(\tilde{C}) \leq k\varkappa K\right),$$

что противоречит условию теоремы 2.3. Следовательно,

$$\rho_G(x,y) \leq 2^{1-\alpha}\bar{C}\rho^\alpha(x,y) \quad \left(\rho_G(x,y) \leq 2^{1-\alpha}\tilde{C}\rho^\alpha(x,y)\right).$$

Теорема 2.3 доказана.

В тех случаях, когда емкость точки в пространствах $H(R^n)$ и $N(R^n)$ отлична от нуля, можно рассмотреть функцию

$$\Delta_\alpha(C) = \inf_{\substack{0<r^{1+\alpha}\le C \\ a,b\in R^n,\ \rho(a,b)=r}} \frac{C(\{a\},\{b\};H(R^n))}{C_a(0,Cr^\alpha)},$$

которая фактически введена в работе [36] в изотропном случае при $\alpha=1$. Достаточным условием необращения в ноль емкости точки является, например, возможность непрерывного вложения пространства в пространство непрерывных функций [36].

Сформулируем в одном утверждении аналоги теорем 2.2 и 2.3 для функции $\Delta_\alpha(C)$.

Т е о р е м а 2.4. Пусть открытое множество G удовлетворяет условиям невидимости и продолжения. Тогда

I) если величина

$$C_0 = \sup_{\substack{x,y\in G \\ \rho^{1+\alpha}(x,y)\le 1}} \frac{\rho_G(x,y)}{2\rho^\alpha(x,y)}$$

конечна и $C_0>1$, то для нормы оператора продолжения имеют место оценки снизу

$$\frac{\Delta_\alpha(C_0-0)}{k\varkappa} \le K;$$

2) если K - норма оператора продолжения и C - такое число, что $\Delta_\alpha(C)>k\varkappa K$, то в каждой связной компоненте множества G относительное расстояние эквивалентно ρ-метрике с показателем Гёльдера, равным α, при условии $\rho(x,y)\le\rho^\alpha(x,y)$:

$$\rho_G(x,y)\le 2C\rho^\alpha(x,y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.3 проводится так же, как и в предыдущем случае со следующими модификациями. Для произвольного числа $1<C<C_0$ две точки x и y с условием $\rho_G(x,y)>2C\rho^\alpha(x,y)$ лежат в различных связных компонентах множества $G_i\cap Q(x,Cr^\alpha)$, поскольку $\rho_G(x,y)>2C\rho^\alpha(x,y)\ge 2C\rho(x,y)$ (здесь $r=\rho(x,y)$). Теперь в лемме 2.I полагаем $a=x, R=Cr^\alpha, \rho=0, F_1=\{x\}, F_0=\{y\}$. Тогда

$$C(\{x\},\{y\};H(R^n))\le k\varkappa K C_\varkappa(0,Cr^\alpha)$$

и далее так же, как и в доказательстве теоремы 2.2.

§ 3. Геометрия группы гомотетий

Цель этого параграфа - свести изучение поведения функций $\Phi_\alpha(C), \Psi_\alpha(C)$

и $\Delta_\alpha(C)$, определенных в предыдущем параграфе, к емкостным характеристикам некоторых простейших пар множеств. Для этого мы введем дополнительные условия на рассматриваемые функциональные пространства, которые выполняются для всех перечисленных во введении модельных пространств. Кроме этого, мы укажем для всех модельных пространств один способ оценки емкости снизу.

Мы рассматриваем пространства R^n с некоторой определенной на нем ρ-метрикой. Мы считаем, что на пространстве R^n определена некоторая однопараметрическая группа гомеоморфизмов

$$H_\mu : R^n \to R^n, \quad \mu \in R^+, \quad H_\mu \circ H_\nu = H_{\mu+\nu},$$

для которой

$$\rho(H_\mu(x)) = \mu\rho(x), \quad x \in R^n.$$

Элементы этой группы будем называть ρ-гомотетиями с центром в начале координат.

Ясно, что ρ-гомотетия H_μ переводит в себя семейство ρ-шаров $Q(\lambda)=\{x:\rho(x)<\lambda\}$: ρ-шар $Q(\lambda)$ переходит в ρ-шар $Q(\mu\lambda)$. Та же самая гомотетия отображает кольцо $D_{r,R}(0)=Q(R)\setminus\bar{Q}(r)$ на кольцо $D_{\mu r,\mu R}(0)$.

Однопараметрическую группу ρ-гомотетий H_μ с центром в точке a определим следующим образом:

$$H_\mu^a = \tau_a \circ H_\mu \circ \tau_{-a},$$

где $\tau_a : R^n \to R^n$ есть сдвиг на вектор a , т.е. $\tau_a(x) = x+a$. При таком определении ρ-шар $Q(a,\lambda)$ переходит в ρ-шар $Q(a,\mu,\lambda)$:

$$H_\mu^a(Q(a,\lambda)) = \tau_a \circ H_\mu \circ \tau_{-a}(Q(a,\lambda)) = \tau_a \circ H_\mu(Q(\lambda)) =$$
$$= \tau_a(Q(\mu\lambda)) = Q_a(\mu\lambda)$$. Кольцо $D_{r,R}(a)$ отображается на кольцо $D_{\mu r,\mu R}(a)$.

Произвольное полунормированное пространство функций, определенных на R^n , мы обозначим через $\mathcal{F}$. Мы предполагаем, что пространство $\mathcal{F}$ инвариантно относительно сдвигов и ρ-гомотетии, при этом соответствующие функциональные операторы являются ограничениями. Это означает следующее:

I) функциональное пространство $\mathcal{F}$ выдерживает замену переменной, определяемую сдвигом, т.е. для любого сдвига $\tau_a : R^n \to R^n$ на вектор a и любой функции $f \in \mathcal{F}$ функция $\tau_a^* f = f \circ \tau_a$ принадлежит пространству $\mathcal{F}$ и $\|\tau_a^* f\| = \|f\|$;

2) функциональное пространство $\mathcal{F}$ выдерживает замену переменной, определяемую ρ-гомотетией, т.е. для любой ρ-гомотетии $H_\mu : R^n \to R^n$,

$\mu \in R^+$, и любой функции $f \in \mathcal{F}$ функция $H_\mu^* f = f \circ H_\mu$ принадлежит пространству $\mathcal{F}$ и

$$\|H_\mu^* f\| = \mu^\sigma \|f\|, \quad f \in \mathcal{F},$$

где $\sigma \in R$ не зависит от выбора ρ-гомотетии H_μ.

В качестве примера рассмотрим одно из полунормированных модельных пространств, характеризуемое показателем гладкости $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$, $\ell_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и степенью суммируемости $1 \leq p \leq \infty$ (параметр θ в рассмотрение не берется). Обозначим такое пространство через S_p^ℓ, а норму функции $f \in S_p^\ell$ через $\|f\|_S$.

Непосредственно проверяется, что пространство S_p^ℓ инвариантно относительно сдвигов, т.е. для любого сдвига $\tau_a : R^n \to R^n$, $a \in R^n$, и функции $f \in S_p^\ell$ имеем $\tau_a^* f \in S_p^\ell$ и $\|\tau_a^* f\|_S = \|f\|_S$.

С каждым функциональным пространством S_p^ℓ мы связываем однопараметрическую группу $H_\mu : R^n \to R^n$, $\mu \in R^+$, анизотропных гомотетий (ℓ-гомотетий). Для любого вещественного положительного числа μ гомеоморфизм $H_\mu : R^n \to R^n$ определяется по правилу:

для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ $H_\mu(x) = (\mu^{\frac{\ell^*}{\ell_1}} x_1, \ldots, \mu^{\frac{\ell^*}{\ell_n}} x_n)$, где $\frac{1}{\ell^*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\ell_i}$. В изотропном случае отображения являются частью обычной группы гомотетий, соответствующей растяжению на положительное число.

Прямым вычислением проверяется, что для любого отображения H_μ и любой функции $f \in S_p^\ell$ функция

$$(H_\mu^* f)(x) = f(H_\mu(x)), \quad x \in R^n,$$

также принадлежит пространству S_p^ℓ и при этом

$$\|H_\mu^* f\|_S = \mu^\sigma \|f\|_S,$$

где
$$\sigma = \ell^* - \frac{\ell^*}{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\ell_i}.$$

Если теперь ρ - произвольная ℓ-метрика, то ее изменение при действии ℓ-гомотетии H_μ происходит по правилу

$$\rho(H_\mu(x)) = \rho(H_\mu(x), 0) = \mu \rho(x, 0) = \mu \rho(x).$$

Такой характер изменения ℓ-метрики пространства R^n и нормы пространства S_p^ℓ при действии ℓ-гомотетий влечет следующее правило для изменения емкости пары множеств (F_0, F_1) при ℓ-гомотетиях:

$$C(H_\mu(F_0),H_\mu(F_1);S_p^\ell) = \mu^{-6}C(F_0,F_1;S_p^\ell).$$

Последнее свойство мы будем доказывать в общей ситуации, к рассмотрению которой мы сейчас переходим.

Прежде всего сделаем следующее замечание относительно сдвигов и ρ-гомотетий. Так как для любых сдвигов τ_a и τ_b имеем $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$, то $\tau_{a+b}^* = \tau_b^* \circ \tau_a^*$. В частности, $\tau_{-a}^* \circ \tau_a^* = I$, где I - тождественный оператор пространства в $\mathcal{F}$, т.е. оператор τ_{-a}^* является обратным к оператору τ_a^*, и поэтому оператор τ_a^* является изоморфизмом функционального пространства $\mathcal{F}$.

Аналогично из свойства $H_{\mu\nu} = H_\nu \circ H_\mu$ для двух ρ-гомотетий H_ν и H_μ мы получаем $H_{\mu^{-1}}^* \circ H_\mu^* = I$. Поэтому оператор $H_{\mu^{-1}}^*$ является обратным к оператору H_μ^*, и, следовательно, оператор H_μ^* также является изоморфизмом пространства $\mathcal{F}$.

Пусть для любого множества $M \subset R^n$ множество $M+a=\{x+a : x \in M\}$. Выясним теперь вопрос о том, как меняется емкость пары множеств при сдвигах и ρ-гомотетиях.

П р е д л о ж е н и е 3 . I . Для любой пары множеств $F_0, F_1 \subset R^n$ и любой точки $a \in R^n$ $C(F_0,F_1;\mathcal{F}) = C(F_0+a, F_1+a; \mathcal{F})$.

П р е д л о ж е н и е 3 . 2 . Для любой пары множеств $F_0,F_1 \subset R^n$ и любой ρ-гомотетии H_μ, $\mu \in R^+$,

$$C(F_0,F_1;\mathcal{F}) = \mu^{6} C(H_\mu(F_0),H_\mu(F_1);\mathcal{F}).$$

Доказательство обоих предложений вытекает из следующей леммы.

Л е м м а 3 . 3 . Пусть гомеоморфизм $\varphi: R^n \to R^n$ индуцирует ограниченный изоморфизм $\varphi^*: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ по правилу

$$(\varphi^* f)(x) = f(\varphi(x)),\ x \in R^n,$$

и при этом

$$\|\varphi^* f\| = c\|f\|$$

для всех $f \in \mathcal{F}$. Тогда для любой пары множеств $F_0, F_1 \subset R^n$

$$C(F_0,F_1;\mathcal{F}) = cC(\varphi(F_0),\varphi(F_1);\mathcal{F}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть u - произвольная допустимая функция для пары $\varphi(F_0), \varphi(F_1)$. Тогда $\varphi^* u$ является допустимой функцией для пары (F_0,F_1), при этом в силу изоморфизма $\varphi^*: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ мы имеем биекцию множеств соответствующих $\mathcal{F}$-допустимых функций

$$\mathcal{N}(\varphi(F_0),\varphi(F_1);\mathcal{F})\ni u \xleftrightarrow{\varphi^*} \varphi^* u\in\mathcal{N}(F_0,F_1;\mathcal{F}),$$

для которой

$$|\varphi^* u| = c|u|.$$

Переходя в этом равенстве к нижним граням, получаем

$$C(F_0,F_1;\mathcal{F}) = cC(\varphi(F_0),\varphi(F_1);\mathcal{F}).$$

Переходим теперь к изучению функций Φ_α, ψ_α и Δ_α, введенных в предыдущем параграфе. Отметим прежде всего несколько свойств емкости кольца и емкости Тейхмюллера. Из предложения 3.I непосредственно следует

П р е д л о ж е н и е 3.4. <u>Емкости</u> $C_a(r,R)$ <u>и</u> $T_a(r,R)$ <u>не зависят от выбора точки</u> a.

Так как ρ-гомотетия H_μ переводит кольцо $D_{r,R}(0)$ в кольцо $D_{\mu r,\mu R}(0)$, то из предложения 3.2 получаем

П р е д л о ж е н и е 3.5. <u>Емкости колец</u> $D_{r,R}(0)$ <u>и</u> $D_{\mu r,\mu R}(0)$ <u>связаны условием</u>

$$C_0(r,R) = \mu^\sigma C_0(\mu r,\mu R).$$

Полагая в последнем равенстве $r=\frac{R}{2}$, $\mu=\frac{1}{R}$, получаем

$$C_0\left(\frac{R}{2},R\right) = R^{-\sigma} C_0\left(\frac{1}{2},1\right). \tag{1}$$

Если же положить $R=2r$, $\mu=\frac{1}{r}$, то

$$C_0(r,2r) = r^{-\sigma} C_0(1,2). \tag{2}$$

Заметим, что $C_0\left(\frac{1}{2},1\right)=2^\sigma C_0(1,2)$, поэтому для получения необходимых оценок в изучаемом нами вопросе достаточно проверить, что в данном пространстве

$$C_0(1,2)\neq 0. \tag{3}$$

Перейдем теперь к изучению емкости Тейхмюллера.

П р е д л о ж е н и е 3.6. <u>Емкости</u> $T_0(r,R)$ <u>и</u> $T_0(\mu r,\mu R)$ <u>связаны условием</u>

$$T_0(r,R) = \mu^\sigma T_0(\mu r,\mu R).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в кольце $D_{r,R}(0)$ произвольную пару связных множеств F_0, F_1, которые пересекаются как с внутренней, так и с внешней компонентами кольца. Тогда пара связных замкнутых множеств $(H_\mu(F_0),H_\mu(F_1))$ пересекается с внутренней и внешней компонентами кольца $D_{\mu r,\mu R}(0)$, при этом, по лемме 3.3,

$$C(F_0, F_1; \mathcal{F}) = \mu^{\sigma} C(H_\mu(F_0), H_\mu(F_1); \mathcal{F}).$$

Переходя в этом равенстве к нижним граням, мы получаем утверждение предложения 3.6, поскольку для любой пары замкнутых связных множеств (F_0', F_1') кольца $D_{\mu r, \mu R}(0)$, пересекающихся как с внутренней, так и с внешней компонентами этого кольца, пара замкнутых связных множеств $(H_\mu^{-1}(F_0'), H_\mu^{-1}(F_1'))$ содержится в кольце $D_{r,R}(0)$ и пересекается как с внутренней, так и внешней компонентами последнего.

Следствием предложения 3.6 являются два соотношения. Первое из них получается при $\mu = \frac{1}{r}$:

$$T_0(r, R) = r^{-\sigma} T_0\left(1, \frac{R}{r}\right), \tag{4}$$

а второе - при $\mu = \frac{1}{R}$:

$$T_0(r, R) = R^{-\sigma} T_0\left(\frac{r}{R}, 1\right). \tag{5}$$

Посмотрим теперь, от чего зависит поведение функций $\Phi_\alpha(C)$ и $\psi_\alpha(C)$ при больших C . Прежде всего уточним ситуацию, в которой происходят наши рассмотрения: область G удовлетворяет условиям продолжения и невидимости, функциональные пространства $N(R^n)$ и $H(R^n)$ инвариантны относительно сдвигов и ρ-гомотетий $\{H_\mu, \mu \in R^+\}$ при условии, что для пространства $N(R^n)$

$$\|H_\mu^* f\|_{N(R^n)} = \mu^{\sigma} \|f\|_{N(R^n)}, \quad f \in N(R^n),$$

а для пространства $H(R^n)$.

$$\|H_\mu^* f\|_{H(R^n)} = \mu^{\delta} \|f\|_{H(R^n)}, \quad f \in H(R^n).$$

Мы рассматриваем соотношение $0 < \delta \leq \sigma$ между степенями однородности норм функциональных пространств, что соответствует случаю продолжения функций с возможным понижением дифференциальных свойств, $\alpha = \frac{\delta}{\sigma}$ при $0 < \delta \leq \sigma$, $\alpha = 1$ при $\delta = \sigma = 0$.

Поскольку функциональные пространства $H(R^n)$ и $N(R^n)$ инвариантны относительно сдвигов, то емкости, входящие в определение функций Φ_α и ψ_α , не зависят от выбора точки a . Будем считать поэтому, что $a = 0$. Применим соотношения (I) и (4) к емкостям, входящим в определение функции Φ_α . Имеем

$$\frac{T_0\left(\tau, \frac{1}{2}C\tau^{\alpha}\right)}{C_0\left(\frac{1}{2}C\tau^{\alpha}, C\tau^{\alpha}\right)} = \frac{\tau^{-\delta}T_0\left(1, \frac{1}{2}C\tau^{\alpha-1}\right)}{(C\tau^{\alpha})^{-6}C_0\left(\frac{1}{2}, 1\right)} = C^{6}\frac{T_0\left(1, \frac{1}{2}C\tau^{\alpha-1}\right)}{C_0\left(\frac{1}{2}, 1\right)},$$

и поэтому

$$\Phi_{\alpha}(C) \geqslant \begin{cases} C^{6}\dfrac{T_0(1,2)}{C_0\left(\frac{1}{2}, 1\right)} & \text{при } 0<\delta\leqslant 6, \\[2ex] \dfrac{T_0\left(\frac{2}{C}, 1\right)}{C_0\left(\frac{1}{2}, 1\right)} & \text{при } \delta = 6 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Аналогично получается оценка снизу для функции ψ_{α} :

$$\frac{T_0(\tau, 2\tau)}{C_0(2\tau, C\tau^{\alpha})} = \frac{\tau^{-\delta}T_0\ (1,2)}{(C\tau^{\alpha})^{-6}C_0\left(\frac{2\tau^{1-\alpha}}{C}, 1\right)} = C^{6}\frac{T_0(1,2)}{C_0\left(\frac{2\tau^{1-\alpha}}{C}, 1\right)},$$

$$\psi_{\alpha}(C) \geqslant \begin{cases} C^{6}\dfrac{T_0(1,2)}{C_0\left(\frac{1}{2}, 1\right)} & \text{при } 0<\delta\leqslant 6, \\[2ex] \dfrac{T_0(1,2)}{C_0\left(\frac{2}{C}, 1\right)} & \text{при } \delta = 6 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Приведем также оценку для функции $\Delta_{\alpha}(C)$:

$$\Delta_{\alpha}(C) \geqslant C^{6}\frac{\inf\limits_{\rho(0,\ell)=1} C(\{0\},\{\ell\}; H(R^n))}{C_0(0,1)} \quad \text{при } 0<\delta\leqslant 6. \tag{8}$$

Теперь уже легко видеть, от чего зависит поведение рассматриваемых функций при больших C , и поэтому мы в состоянии указать простые критерии выполнимости условий теорем 2.3 и 2.4. Резюмируем сказанное выше в следующем варианте теоремы 2.3.

Т е о р е м а 3.7. Пусть открытое множество G удовлетворяет условиям невидимости и продолжения и функциональные пространства $H(R^n)$ и $N(R^n)$ инвариантны относительно сдвигов и ρ-гомотетий, причем норма пространства $H(R^n)$ однородна степени δ , а норма пространства $N(R^n)$ однородна степени 6 относительно группы ρ-гомотетий $\{H_{\mu}, \mu\in R^{+}\}$. Тогда если

$$\text{а) } 0<\delta\leqslant 6 \quad \text{и} \quad C^{6} = \frac{k\varkappa K C_0\left(\frac{1}{2}, 1\right)}{T_0(1,2)}, \quad C>4, \tag{9}$$

или

б) $\delta=\sigma=0$ и $C>4$ таково, что

$$T_0\left(\frac{2}{C},1\right)>k\varkappa K C_0\left(\frac{1}{2},1\right)\left(C_0\left(\frac{2}{C},1\right)<\frac{T_0(1,2)}{k\varkappa K}\right), \tag{10}$$

то для всех точек x,y, принадлежащих одной связной компоненте множества G,

$$\rho_G(x,y)<2^{1-\alpha}C\rho^{\alpha}(x,y), \quad \alpha=\begin{cases}\dfrac{\delta}{\sigma} & \text{при } 0<\delta\le\sigma,\\ 1 & \text{при } \delta=\sigma=0,\end{cases}$$

при условии, что $\rho(x,y)\le\rho^{\alpha}(x,y)$.

Доказательство сводится к проверке выполнения условий

$$\Phi_{\alpha}(C)>k\varkappa K \quad \text{или} \quad \Psi_{\alpha}(C)>k\varkappa K$$

в теореме 2.3 из (9) и (10) с учетом полученных оценок снизу (6) и (7) для функций Φ_{α} и Ψ_{α}.

Докажем теперь теорему 0.1, сформулированную во введении. Рассмотрим сначала случай полунормированного модельного пространства S_p^{ℓ}. Возьмем в теореме 3.7 в качестве пространств $H(R^n)$ и $N(R^n)$ пространство $S_p^{\ell}(R^n)$, а в качестве $N(G)$ - пространство $S_p^{\ell}(G)$ и рассмотрим оператор продолжения $ext: S_p^{\ell}(G)\longrightarrow S_p^{\ell}(R^n)$. Условие невидимости, как уже отмечалось, выполняется с постоянной $\varkappa=1$, а норма k оператора ограничения равна 1.

Для того чтобы проверить (9) и (10), достаточно знать следующее:

$$C_0\left(\frac{1}{2},1\right)\neq 0, \tag{11}$$

$$T_0(1,2)\neq 0, \tag{12}$$

либо $$T_0\left(\frac{2}{C},1\right)\longrightarrow\infty \quad \text{при} \quad C\longrightarrow\infty, \tag{13}$$

либо $$C_0\left(\frac{2}{C},1\right)\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad C\longrightarrow\infty. \tag{14}$$

Соотношение (14) не выполняется в тех случаях, когда пространство S_p^{ℓ} непрерывно вкладывается в пространство непрерывных функций, поскольку в этом случае

$$\|u\|_C=1\le\|i\|\cdot\|u\|_{S_p^{\ell}}$$

и поэтому $\|i\|^{-1} \leq C_0\left(\frac{2}{C}, 1\right)$, где $\|i\|$ - норма оператора вложения.

Соотношения (I2)-(I3) хорошо известны для пространства Соболева $\mathcal{L}_p^{(\ell)}$, $\ell p \geq n$ (см., например, [28]). В анизотропном случае они получаются при $p \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\ell_i}$ тем же методом с учетом специфики этого случая. Для пространств Никольского - Бесова $B_{p,\theta}^{\ell}$, $p \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\ell_i}$, они могут быть получены на основе известных соотношений между пространствами $B_{p,\theta}^{\ell}$ и пространствами анизотропных бесселевых потенциалов [39]. Альтернативное доказательство будет приведено в последующей публикации автора.

Для модельного нормированного пространства WS_p^{ℓ} можно применить метод работы [28], где делается переход от полунормированного пространства $\mathcal{L}_p^{(\ell)}$ к пространству Соболева $W_p^{(\ell)}$. Основой такого перехода в нашем случае служит неравенство

$$\|u\|_{L_p(R^n)} \leq CR^{\ell^*} \|u\|_{S_p^{\ell}(R^n)}, \tag{I5}$$

справедливое для любой функции $u \in S_p^{\ell}(R^n)$, чей носитель содержится в ℓ-шаре $Q(R)$. Из неравенства (I5) немедленно получается оценка для емкости $\tilde{C}(r,R)$ кольца $D_{r,R}$ в пространстве WS_p^{ℓ} через емкость $C(r,R)$ того же кольца в пространстве S_p^{ℓ}:

$$\tilde{C}(r,R) \leq \left[1 + CR^{\ell^*}\right] C(r,R),$$

где постоянная C не зависит от радиуса R. После этих замечаний последующие рассуждения не отличаются от соответствующих рассуждений работы [28].

Соотношение (II) получается из (I5), поскольку для любой допустимой функции u имеет место неравенство $\left[m\left(Q\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right]^{1/p} \leq \|u\|_{L_p}(R^n) \leq$ $\leq C\|u\|_{S_p^{\ell}}$, откуда $C^{-1}\left[m\left(Q\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right]^{1/p} \leq C_0\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Теорема 0.I доказана.

Доказательство теоремы 0.I свелось к проверке условий (9) и (I0) теоремы 3.7, которые выполняются для любого модельного пространства S_p^{ℓ}. Следовательно, справедливо заключение этой теоремы в случае существования оператора продолжения модельных пространств, понижающего дифференциальные свойства функций. Сформулируем этот результат как отдельное утверждение, обобщающее теорему 0.I.

Т е о р е м а 3 . 8 . Для любого ограниченного оператора продолжения

$$ext: S_p^l(G)\to S_q^r(R^n),\ 0<r^*-\frac{r^*}{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}\le l^*-\frac{l^*}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i},\ r_i=\varkappa l_i,\ i=1,2,\dots,n,\ \varkappa\le 1$$

существует такая постоянная C, что при условии $\rho(x,y)\le\rho^{\alpha}(x,y)$ ($\rho(x,y)\le 1$ в случае нормированных пространств)

$$\rho_G(x,y)\le C\rho_l^{\alpha}(x,y),$$

где

$$\alpha=\begin{cases}\dfrac{r^*-\frac{r}{q}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}}{l^*-\frac{l^*}{p}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}} & \text{при } 0<r^*-\frac{r^*}{p}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}<l^*-\frac{l^*}{p}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i},\\ 1 & \text{при } 0=r^*-\frac{r^*}{q}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}=l^*-\frac{l^*}{p}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}.\end{cases}$$

§ 4. Приложение

I. Пусть в пространстве R^n со стандартным базисом фиксирована некоторая координатная ось, например, с номером i, $1\le i\le n$. Положим $x^{(i)}=(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$ и точку $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n=R^{n-1}\times R$ будем записывать как $x=(x^{(i)},x_i)$.

Рассмотрим произвольную плоскость $L\subset R^{n-1}$, проходящую через начало координат, которая разбивает R^{n-1} на два полупространства P^+ и P^-. Предположим, что на P^+ задана непрерывная положительная функция $\varphi: P^+\to R$, равная нулю на плоскости L. Пусть на области $G=\{(x^{(i)},x_i):(x^{(i)}\in P\setminus L)\cup(x_i<\varphi(x^{(i)}),\ x^{(i)}\in P^+)\}$ задан оператор продолжения

$$ext: S_p^l(G)\to S_q^r(R^n),$$

где соотношения между l,r,p,q такие же, как в теореме 3.8. Оценим характер локального поведения функции φ при $x^{(i)}\to L$, $x^{(i)}\in P^+$.

Рассмотрим произвольную точку $(x^{(i)},\varphi(x^{(i)}))$. Пусть $y^{(i)}\in L$ есть точка плоскости L, ближайшая к точке $x^{(i)}$ относительно l-метрики (если существует несколько ближайших, то возьмем любую из них): $\rho_l(x^{(i)},L)=\rho(x^{(i)},y^{(i)})$. Для точек $z_1=(x^{(i)},\varphi(x^{(i)}))$, $z_2=(y^{(i)},\varphi(x^{(i)}))$ справедлив вывод теоремы 3.8, т.е.

$$\rho_G(z_1,z_2) \le C\rho_\ell^\alpha(z_1,z_2).$$

Заметим, что $\rho_G(z_1,z_2) \ge [\varphi(x^{(i)})]^{\ell_i/\ell^*}$ и $\rho_\ell(z_1,z_2) = \rho_\ell(x^{(i)},y^{(i)})$, а это приводит к следующей оценке для функции φ :

$$[\varphi(x^{(i)})]^{\frac{\ell_i}{\ell^*}} \le C\left[\sqrt{\sum_{j\ne i}|x_j-y_j|^{\frac{2\ell_j}{\ell^*}}}\right]^\alpha,$$

где α - то же, что и в теореме 3.8. В начале координат мы имеем следующую оценку на локальное поведение функции:

$$[\varphi(x^{(i)})]^{\frac{\ell_i}{\ell^*}} \le C\left[\sqrt{\sum_{j\ne i}|x_j|^{\frac{2\ell_j}{\ell^*}}}\right]^\alpha. \qquad (16)$$

Полученные условия на характер поведения функции φ в рассматриваемом случае в точности совпадают при $\alpha=1$ с условиями работы [40], в которой для специальных областей класса $A(\ell_1,\dots,\ell_n)$ были получены теоремы о продолжении функций из анизотропных пространств с сохранением класса.

В изотропном случае неравенство (16) при $\alpha=1$ сводится к известному условию Липшица: $\varphi(x^{(i)}) \le C|x^{(i)}|$. Если в изотропном случае оператор продолжения понижает дифференциальные свойства, то функция φ удовлетворяет условию Гёльдера

$$\varphi(x^{(i)}) \le C|x^{(i)}|^\alpha,$$

где $\alpha = \dfrac{r-\frac{n}{q}}{\ell-\frac{n}{p}}$ при условии, что оператор продолжения действует из изотропного пространства $S_p^\ell(G)$ в изотропное пространство $S_q^r(R^n)$, со следующими соотношениями между показателями $r\le\ell$, $0<r-\frac{n}{q}\le\ell-\frac{n}{p}$.

В двумерном случае комбинируя приведенные рассуждения с теоремой 0.3, мы получаем полное описание локального поведения функции φ : если $x_1=\varphi(x_2)$, то в любой точке $x_2\in R$ либо слева от точки x, либо справа от точки x_2 выполняется неравенство

$$|\varphi(x_2)-\varphi(y_2)|^{\ell_1} \le C|x_2-y_2|^{\ell_2}.$$

Литература

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Ленинград, ЛГУ, 1950; Новосибирск, 1962.- 255 с.
2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.- М.: Наука, 1975.- 480 с.

3. Куратовский К. Топология. Т. 2. -М.: Мир, 1969.- 624 с.

4. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. - М.: Мир, 1973.- 342 с.

5. Whitney H. Analytic extensions of differentiable functions in closed sets. - Trans.Amer.Math.Soc., 1934, v.36, p.63-89.

6. Hestens M.R. Extension of the range of differentiable functions.- Duke Math J., 1941, v.8, p.183-192.

7. Никольский С.М. К вопросу о решении полигармонического уравнения вариационным методом.- Докл. АН СССР, 1953, т. 88, № 3, с. 409-411.

8. Бабич В.М. К вопросу о распространении функций.- Успехи мат. наук, 1953, т. 8, вып. 2, с. 111-113.

9. Calderon A.P. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. - In: Partial Diff.Equations, Providence, RI, Amer.Math. Soc., 1969, p.33-42.

10. Солнцев Ю.К. Об оценке смешанной производной в $L_p(G)$.- Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1961, т. 64, с. 211-238.

11. Smith K.T. Inequalities for formally positive integro-differential forms. - Bull.Amer.Math.Soc., 1961, v.67, p.368-370.

12. Бесов О.В., Ильин В.П. Естественное расширение класса областей в теоремах вложения.- Мат. сб., 1968, т. 75, вып. 4, с. 483-495.

13. Бесов О.В. Продолжение функций из L_p^ℓ и W_p^ℓ .- Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1967, т. 89, с. 5-17.

14. Буренков В.И. Об одном способе продолжения дифференцируемых функций.- Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1976, т. 140, с. 27-67.

15. Буренков В.И. О продолжении функций с сохранением полунормы.- Докл. АН СССР, 1976, т. 228, № 4, с. 779-782.

16. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными.- Успехи мат. наук, 1979, т. 34, вып. 1, с. 17-62.

17. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М., Латфуллин Т.Г. Критерий продолжения функций класса L_2^1 из неограниченных плоских областей.- Сиб. мат. журн., 1979, т. 20, с. 416-419.

18. Gol'dstein V.M., Vodop'janov S.K. Prolongement des fonctions de classe L_p^1 et applications quasiconformes. - C.R.Acad. Sci. Paris, 1980, t.290, Série A, p.453-456.

19. Бураго Ю.Д., Мазья В.Г. Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами.- Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1967, № 3, с. 1-67.

20. Jones P.W. Quasiconformal mappings and extendability of function in Sobolev spaces. - Preprint Univ. of Chicago, 1980, p.1-44.

21. Шварцман П.А. Локальные приближения функций и теоремы вложения. Деп. ВИНИТИ № 2025-83 Деп.- 30 с.

22. Шварцман П.А. Теоремы продолжения для пространств функций, определяемых локальными приближениями: Автореферат дис. на соиск. уч. степ. к. ф.-м.н (01.01.01)- Ярославль, Б.и. 1983.- 139 с.- В надзат.: Ярославск. ун-т.

23. Шварцман П.А. Теорема продолжения для одного класса пространств, определяемых локальными приближениями.- В кн.: Исследование по теории функции многих вещественных переменных. Ярославль, 1978, № 2, с. 215-242.

24. Брудный Ю.А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений.- Труды Моск. мат. об-ва, 1971, т. 24, с. 69-132.

25. Brudny Yu.A. Piecewise polynomial approximation, embedding theorems and rational approximation. - Lecture Notes in Math., Springer, 1976, No 556.

26. Gol'dstein V., Vodop'anov S. Prolongement de différentiables hors de domaines plans. - C.r.Acad.Sc. Paris, 1981, t.293, Série I, p.581-584.

27. Гольдштейн В.М. Продолжение дифференцируемых функций с сохранением класса из плоских областей.- Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 2, с. 451-454.

28. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М. Пространства Соболева и специальные классы отображений.- Новосибирск: изд. Новосиб. ун-та, 1981.- 71 с.

29. Гольдштейн В.М. Емкость и продолжение функций с обобщенными производными.- Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 1, с. 49-59.

30. Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.- М.: Наука, 1983.- 284 с.

31. Гольдштейн В.М. Продолжение функций одного класса Бесова из плоских областей.- Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 1, с. 18-21.

32. Гольдштейн В.М. Продолжение функций классов $B^{\ell}_{p,\theta}$ через квазиконформную границу.- В кн. : Теория кубатурных формул и при-

ложение функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л. Соболева). Новосибирск, 1979, № I, с. 16-36.

33. Гольдштейн В.М. Необходимое условие продолжения классов Соболева.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложение функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л. Соболева), Новосибирск; 1981, № I, с. 34-47.

34. Гольдштейн В.М. Пространства дифференцируемых функций и квазиконформные отображения: Автореферат дис. на соиск. уч. степ. д-ра ф.-м.н. (01.01.01).-Новосибирск, Б.и., 1984.- 294 с.- В надзаг.: Ин-т математики.

35. Гольдштейн В.М., Ситников В.Н. О продолжении функций через границу области определения.- в сб.: Применение функционального анализа к уравнениям с частными производными. Новосибирск, 1983, с. 38-51.

36. Гольдштейн В.М. Теоремы вложения, продолжения и емкость.- Новосибирск: изд. Новосиб. ун-та, 1982.- 83 с.

37. Vodopianov S.K. As condições necessárias de prolongamento para espacos funcionais. - Ciência e tecnologia, 1982, No 6, p.22-25.

38. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям.- М.: Мир, 1969.- 133 с.

39. Лизоркин П.И. Обобщенные гёльдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношение с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$.- Сиб. мат. журн., 1968, т. 9, № 5, с. 1127-1152.

40. Буренков В.И., Фаин Б.Л. О продолжении функций из анизотропных пространств с сохранением класса.- Тр. мат. ин-та АН СССР, 1979, с. 52-66.